MAT120：数量的推論　第16講ハンドアウト

金融数学

前回の講義では仮説検定を学びました。そこでは、正規分布、標本分布、そして確率を用いて、データから判断を下しました。今回の講義では、コースの新しいまとまりに入り、数学が貨幣、金融、不確実性、そしてリスクの中でどのように現れるのかを考えます。目標は皆さんを銀行員にすることではなく、これまでに学んだモデル化の考え方、確率の道具、統計の概念が、日常的な金融生活の中に再び現れることを示すことです。物々交換と貨幣の意味から始めて、割合と利子へ進み、その後、期待値、リスク、ボラティリティ、分散投資へと進みます。

1　お金とは何か

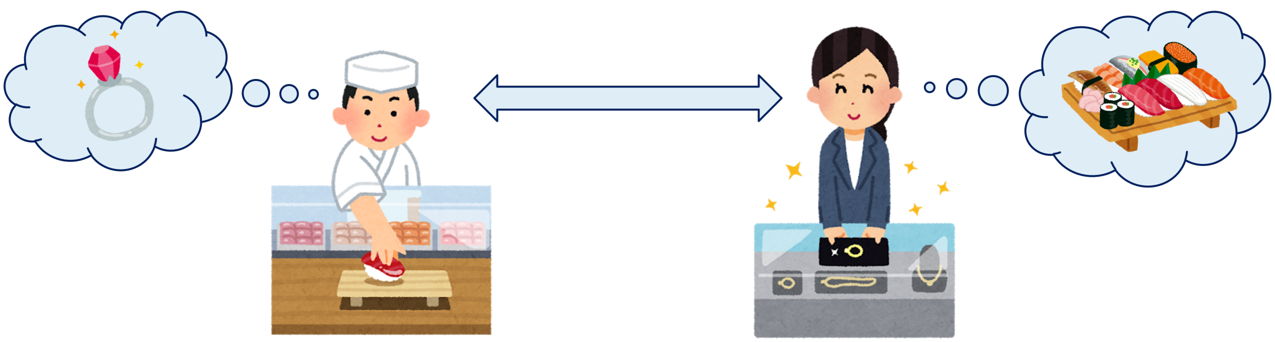
金融について話す前に、まず貨幣とは実際には何であるのかを問うてみる価値があります。貨幣を理解する一つのよくある方法は、それを物々交換の中で生じる問題を解決するものとして見ることです。物々交換の制度では、二人の人が財を直接交換します。たとえば、パンを魚と交換したり、道具を衣服と交換したりします。最初は自然に思えるかもしれませんが、この制度はすぐに実際的な困難に突き当たります。

1.1　物々交換の三つの問題

物々交換の経済には、少なくとも三つの重要な問題があります。

問題1： 物々交換をしたい二人がいるとしましょう。

- プロポーズをしたいすし職人と、
- 光る婚約指輪を作っている、お腹をすかせた宝石職人です。



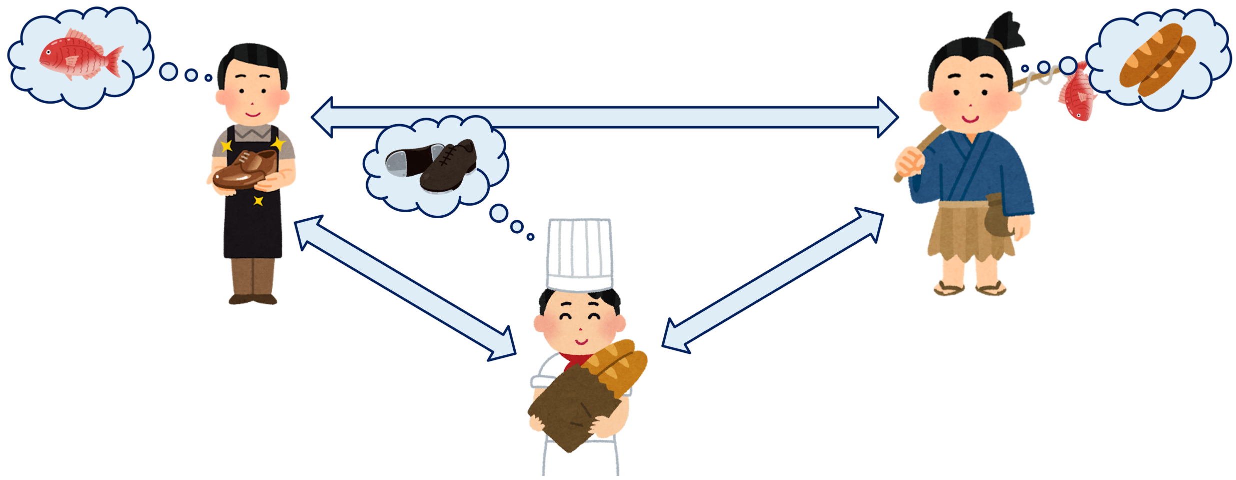
宝石職人は食事を求めてすし店に入り、職人はちょうど新しい光る指輪を探していることを話します。職人は、宝石職人が予備の指輪を持っていることに気づき、さらに彼女がかなり空腹そうであることにも気づきます。そこで、指輪と引き換えにすし一皿を差し出します。二人は交換するでしょうか。答えはいいえ です。なぜなら、指輪は明らかにすし一皿よりもはるかに価値が高いからです。

物々交換の第一の問題

二人の人が、それぞれの持ち物を異なる価値で評価することがあります。もし一方が、その品物は相手の考えよりはるかに高い価値をもつと考えていれば、交換は成立しません。

問題2： 今度は、交換をしたい三人がいるとしましょう。

- パンを必要としている漁師、
- 新しい靴を必要としているパン職人、
- おいしい魚を必要としている靴職人です。

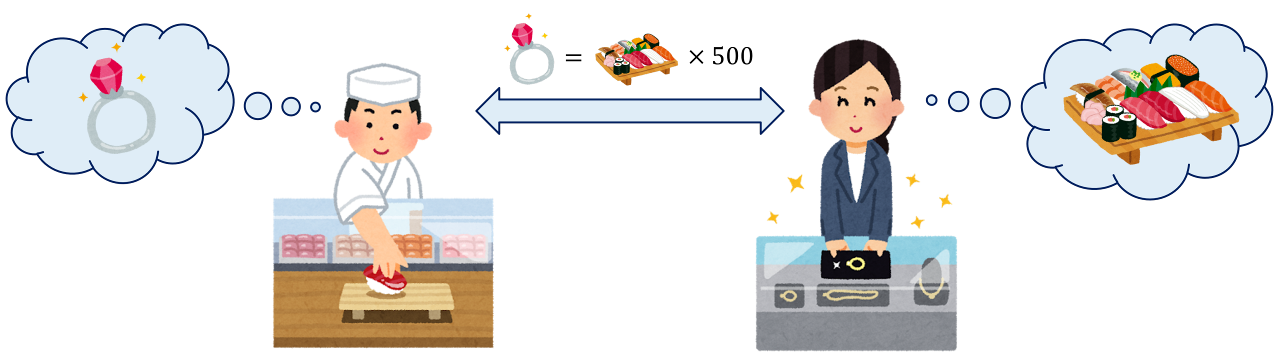


この三人は品物をうまく交換して、全員が満足できそうに見えます。しかし実際には、おそらく交換しません。なぜなら、各人が、次の人の持っているものを同じタイミングで欲しがっていなければならないからです。

物々交換の第二の問題

二人を超える集団が必要になると、物々交換を成立させるのはずっと難しくなります。ある集団の全員が、同じ時点でちょうど互いに欲しいものを持っているとは限りません。

問題3： すし職人と宝石職人の話に戻りましょう。二人が相談した結果、新しい光る指輪はすしおよそ500皿分の価値があると、両者とも認めたとします。



そこで、職人は指輪と引き換えに500皿のすしを差し出します。この場合でも、二人はやはり交換しません。というのも、すしの量は指輪の価値に見合っていても、宝石職人は二日後にはすしが腐って無価値になると気づくからです。これは物々交換の第三の問題を示しています。

物々交換の第三の問題

物の価値の感じられ方は、時間とともに変わることがあります。今日に合理的に見える交換が、明日には合理的に見えなくなるかもしれません。

1.2 貨幣の機能

貨幣は、とりわけ、上で述べた三つの問題を解決しようとするものです。

貨幣の三つの基本機能

現代の貨幣は、主に次の三つの仕方で理解できます。

- **交換手段：** 貨幣は、人々が間接的に交換を行うことを可能にします。
- **価値の尺度：** 貨幣は、価値を表すための共通の数的言語を与えます。
- **価値の保存手段：** 貨幣は、少なくともおおよそ、時間を通じて購買力を保つことができます。

いったん品物に価格をつければ、物々交換はずっと組織しやすくなります。指輪がすしの夕食と「等しい」かどうかを問う代わりに、その価格どうしが釣り合っているかを考えればよいのです。この意味で、貨幣とは価値を数量化する 一つの方法です。もっとも、その価値が完全に客観的であることは決してありません。

古い社会では、貨幣はもっと具体的な形をとっていました。たとえば、硬貨、貴金属、貝殻、穀物、その他の広く認められた物です。現代では貨幣ははるかに抽象的であり、その多くは物理的な現金として存在するのではなく、銀行口座、データベース、デジタル・システムの中の抽象的な数字として存在しています。しかし、その根本的な機能は変わりません。貨幣は価値を保存し、記録し、管理するために用いられるのです。

この講義では、貨幣を一種の社会的エネルギー と考えると役に立ちます。貨幣は保存でき、移転でき、他の形に変換することもできます。しかし、物理的エネルギーと違って、貨幣は純粋に自然的な量ではありません。現代の貨幣は制度によって作られたり消されたりしうるものであり、その意味は社会的信頼、法律、そして集団的な行動に依存しています。貨幣は社会的実践である以上、純粋に数学的なものではないのです。

2 貨幣と増加

数学は、貨幣が時間とともにどのように変化するかを記述するために使えます。ここでは主に利子 の種類に焦点を当てますが、数理ファイナンスが扱う範囲は、これから見る内容よりもずっと広いことには注意が必要です。まずは割合について簡単に復習します。

2.1 百分率と一段階の変化

「パーセント」という言葉は、文字通り「100あたり」を意味します。したがって、

$$25\% = \frac{25}{100} = 0.25.$$

価格が率r だけ上がるなら、$1 + r$ を掛けます。価格が率r だけ下がるなら、$1 - r$ を掛けます。したがって、

$$\text{新しい値} = (\text{元の値})(1 \pm r).$$

例。

- 価格が\$120 のシャツが50% 引きになると、

$$120(1-0.5)=120(0.5)=60.$$

- 価値が\$200,000 の家が10% 値上がりすると、

$$200{,}000(1+0.10)=220{,}000.$$

よくある間違いは、20% の値下がりのあとに20% の値上がりをすると、元の値に戻ると考えてしまうことです。実際にはそうなりません。なぜなら、二つ目の百分率は別の基準値 に対して適用されるからです。

例：値引きのあとに値上がり

あるカメラの価格が\$1000 で、20% の値引きを受けるとします。すると、

$$1000(1-0.20)=1000(0.8)=800.$$

その後、値引き後の価格が20% 上がると、新しい値は

$$800(1+0.20)=800(1.2)=960.$$

となります。したがって、このカメラは元の値段には戻りません。20% の下落と20% の上昇は互いに打ち消し合わないのです。

2.2 単利

利子は、一度きりの変化ではなく、貨幣の反復的な変化を扱います。最初のモデルは単利 です。この場合、利子は常に元本 P を基準に計算されます。

年利がr、時間がt 年であるとき、総額は

$$A=P(1+rt).$$

となります。これは線形 モデルです。なぜなら、毎年同じ額だけ増えていくからです。

単利の公式

$$A=P(1+rt)$$

ここで、

- P は元本（最初のお金）、
- r は小数で表した年利、
- t は年単位の時間、
- A は最終的な総額です。

例：単利の計算

$1000 を年利5% の単利で5 年間運用するとします。すると、

$$A = 1000(1 + 0.05 \cdot 5) = 1000(1.25) = 1250.$$

したがって、5 年後には$1250 になります。

2.3 複利

単利は、現実の銀行や投資で通常使われるモデルではありません。複利 では、利子が残高に加えられ、その後の利子は新しい残高に対して計算されます。これにより、指数関数的 な増加が生じ ます。

$$A = P(1 + r)^t.$$

この違いは概念的に重要です。線形的な増加では、同じ量を足し続けます。指数関数的な増加では、同じ倍率を掛け続けます。

複利の公式

$$A = P(1 + r)^t$$

これは、年ごとに複利計算する基本モデルです。

例：複利の計算

$1000 を年利10% の複利で預けるとします。2 年後には、

$$A = 1000(1.1)^2 = 1000(1.21) = 1210.$$

3 年後には、

$$A = 1000(1.1)^3 = 1000(1.331) = 1331.$$

3 年目の増加額は1 年目より大きいことに注意してください。なぜなら、その時点では残高そのものがすでに大きくなっているからです。

2.4 複利の負債

複利的な増加は、貯蓄だけに当てはまるわけではありません。負債にも当てはまります。たとえば、お金を借りていて、貸し手が未払い額に利子を加えていくなら、その負債額は指数関数的に増えていくことがあります。

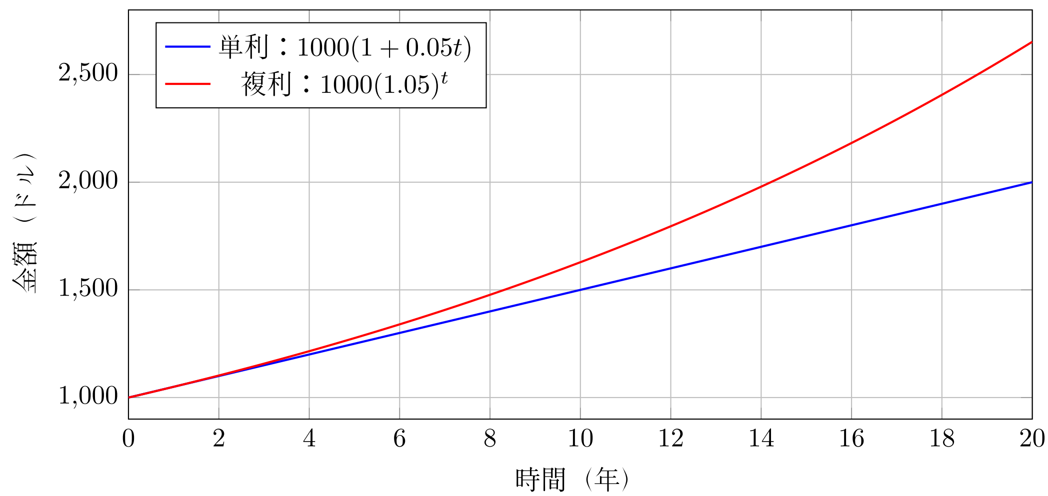
例：複利の負債計算

$10,000 を年利5% の複利で借り、2 年間まったく返済しないとします。すると、負債総額は

$$A = 10{,}000(1.05)^2 = 10{,}000(1.1025) = 11{,}025.$$

となります。したがって、2 年後に支払うべき額は$10,000 ではなく$11,025 です。

単利と複利は最初のうちは似たように見えるかもしれませんが、複利は繰り返し掛け算を行うため、やがて大きく差が開きます。下のグラフでは、同じ初期金額と同じ増加率を用いていますが、複利の効果のために長期的なふるまいは大きく異なります。



2.5　年に複数回の複利計算

原理的には、利子は年に一回だけでなく、毎月、毎週、あるいは毎日など、より細かい頻度で複利計算されることがあります。年にn 回複利計算されるなら、公式は

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

となります。複利計算の回数が多いほど、通常は最終金額も大きくなります。なぜなら、残高がより頻繁に更新されるからです。

複利計算の頻度をますます上げていくと、数学の中でも特に重要な数の一つ、$e \approx 2.71828$ に行き着きます。古典的な極限は

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad (n\to\infty)$$

です。これが、指数関数や数e が、金融、成長、インフレーション、その他多くの現実のシステムにこれほど頻繁に現れる理由です。

連続複利。 利子が連続的に複利計算されるとき、モデルは

$$A = Pe^{rt}.$$

となります。これは複利的増加のもっとも「なめらかな」形です。

3 貨幣と不確実性

前の節では、お金がある予測可能な成長システムの中に置かれていると仮定しました。しかし、現実には、お金は賭け、保険、金融投資など、多くの不確実な仕組みの中で使われています。ここでは状況が異なります。時間とともにお金がどうなるかは完全には分かっていません。したがって、不確実性の要素があり、代わりに確率的な道具が使われます。ここで中心となる数学的概念が、期待値 と呼ばれるものです。

3.1 重み付き平均としての期待値

期待値とは、ランダムな状況における長期的な平均結果のことです。これは、さまざまな結果にお金が結びついた確率的システムとして考えることができます。期待値は、それぞれの可能な結果にその確率を掛け、それらをすべて足し合わせることで求められます。

期待値

確率変数X が、確率$p_1, p_2, \ldots, p_n$ で値$x_1, x_2, \ldots, x_n$ をとるとき、

$$\mathrm{EV}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

これは単なる重み付き平均です。この公式は、データ集合の平均ととてもよく似ています。ただし、期待値は一回の試行で必ず 起こることを予言するものではありません。そうではなく、実験を何度も繰り返したときに現れると期待される平均結果を表しているのです。

3.2 お金のゲームの期待値

あなたがカジノに行って、次のゲームをするとします。あなたが公平なサイコロを振り、

- 5 が出たら\$10 勝ち、
- それ以外なら\$1 負けです。

一般に、お金を失うこと は負の値で表します。したがって、このゲームの二つの結果は、確率1/6 で10、確率5/6 で−1 です。このゲームの期待値は

$$\mathrm{EV} = 10\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}.$$

と計算できます。この値は正なので、長期的には、1 回あたり平均して$\frac{5}{6}$ ドルの純利益が得られることを意味します。したがって、長い目で見れば、このゲームはプレイヤーに有利です。

例：カジノゲームの期待値

あるゲームに参加するのに$10 支払うとします。純利益の可能な結果は三つあります。

- 確率0.6 で$10 負ける、
- 確率0.3 で損得なし、
- 確率0.1 で$40 勝つ。

このとき、

$$\mathrm{EV} = (-10)(0.6) + (0)(0.3) + (40)(0.1) = -6 + 0 + 4 = -2.$$

となります。したがって期待値は$-2 です。平均すると、プレイヤーは1 回あたり$2 失います。

3.3 公平なゲームと不公平なゲーム

ゲームは、その期待値がゼロであるとき公平 であるといいます。これは、長い目で見て、どちらの側にも平均的な有利不利がないことを意味します。

公平性の基準

$$\text{公平なゲーム} \iff \mathrm{EV}(X) = 0.$$

$\mathrm{EV}(X) > 0$ なら、そのゲームはあなたに有利です。$\mathrm{EV}(X) < 0$ なら、そのゲームはあなたに不利です。

これを示す二つの例を見てみましょう。

例1：コインゲーム

アリスとボブが公平なコインを投げるとします。表が出たらアリスがボブに$1 支払い、裏が出たらボブがアリスに$1 支払います。

ボブの立場から見ると、結果は確率1/2 で+1、確率1/2 で−1 です。したがって、

$$\mathrm{EV} = 1\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

よって、このゲームは公平です。

例2：公平ではないサイコロゲーム

今度はアリスとボブがサイコロを振るとします。出た目が3 の倍数ならアリスがボブに$1 支払い、3 の倍数でなければボブがアリスに$1 支払うとします。

ボブの立場から見ると、利得は確率2/6 で+1、確率4/6 で−1 です。したがって、

$$\mathrm{EV} = 1\left(\frac{2}{6}\right) + (-1)\left(\frac{4}{6}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

よって、このゲームはボブにとって不公平です。

このゲームを公平にするために、ボブが負けたときにアリスへ支払う金額を$x とすると、

$$1\left(\frac{2}{6}\right)+(-x)\left(\frac{4}{6}\right)=0.$$

これを解くと、

$$2-4x=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=\frac{1}{2}.$$

となります。したがって、ボブは負けたときに50 セントだけ支払えばよいことになります。

3.4 ルーレットとカジノ

ルーレット風の色当てゲームは、赤と黒が対称に見えるため、公平に感じられる ことがあります。しかし、もしホイールに緑のマスが一つ余分に含まれていれば、その対称性は崩れます。

37 個のマスをもつホイールを考えましょう。18 個が赤、18 個が黒、1 個が緑です。あなたがある色に$1 賭け、その色が出れば純利益$1 を得て、そうでなければ$1 失うとします。このとき期待値は

$$\mathrm{EV}=(+1)\left(\frac{18}{37}\right)+(-1)\left(\frac{18}{37}\right)+(-1)\left(\frac{1}{37}\right)=-\frac{1}{37}.$$

となります。

したがって期待値は負です。1 回の勝負ではカジノの優位は小さいですが、多くの回数を重ねると、その優位は積み重なっていきます。

4 貨幣とリスク

期待値は重要ですが、それがすべてではありません。金融は平均的な結果だけを扱うものではありません。リスク と、その管理 もまた重要です。二つの選択肢が同じ期待値をもっていても、一方がはるかに大きく変動したり、はるかに危険であったりするために、まったく違って感じられることがあります。

4.1 保険

保険は、人々が期待値だけで意思決定しているわけではないことを最もはっきり示す例の一つです。これを説明するために、次の例を考えましょう。

あなたが$200 の価値がある自転車を持っていて、その年のうちに盗まれる確率が10% だとします。保険がない場合、あなたの損失はランダムであり、

- 確率0.1 で$200、
- 確率0.9 で$0

です。したがって、期待損失は

$$\mathrm{EV}(\text{損失})=200(0.1)+0(0.9)=20.$$

となります。

今、保険会社が$30 で完全補償を提供するとします。[1] 純粋に期待値だけを見る数学的観点からは、平均損失$20 を避けるために$30 支払うのは得ではありません。しかし、それでも多くの人は保険に入ります。なぜでしょうか。それは、保険がリスクのある状況を、より予測可能な 状況へと置き換えるからです。

保険という考え方

ある選択が期待値としては不利であっても、大きな損失へのさらされ方を大きく減らすなら、それでも合理的でありえます。

4.2 ボラティリティ

ボラティリティとは、ある量がどれだけ上下に動くかを測るものです。金融では、ボラティリティが低いとは収益が平均値の近くに比較的とどまることを意味し、ボラティリティが高いとは収益が大きく振れることを意味します。私たちは以前、このような「広く散らばる」という考えをすでに見ました。まさにそれがデータ集合のばらつき の概念でした。実際、標準偏差は投資のボラティリティを測るためにも使えるのです。

これを具体的に見るために、次の二つの投資戦略を考えましょう。

観測	戦略A	戦略B
1	+$100	+$200
2	+$110	-$50
3	+$90	+$100
4	+$100	+$150

どちらの戦略も平均収益は同じです。

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 100.$$

しかし、見て分かるように、戦略Aはずっと安定していて信頼しやすいのに対し、戦略Bはずっと大きく変動します。このボラティリティは、両者の標準偏差を計算することで数量化できます。

戦略Aでは、平均からの偏差は$0, 10, -10, 0$ です。したがって、標本分散は

$$s_A^2 = \frac{0^2 + 10^2 + (-10)^2 + 0^2}{4-1} = \frac{200}{3} \approx 66.67.$$

この平方根をとると標準偏差は

$$s_A \approx 8.16.$$

となります。

[1] ここで「完全補償」とは、自転車が盗まれた場合に、その自転車の全額を保険会社が支払うことを意味します。

戦略Bでは、偏差は$100, -150, 0, 50$ であり、これはA のものよりもはるかに大きいです。したがって、標本分散もより大きくなります。

$$s_B^2 = \frac{100^2 + (-150)^2 + 0^2 + 50^2}{4-1} = \frac{35{,}000}{3} \approx 11{,}666.67.$$

平方根をとると、B の標準偏差は

$$s_B \approx 108.01.$$

となります。ご覧のように、平均収益は同じでも、戦略Bのほうがはるかにボラティリティが大きいのです。

解釈

「平均が大きいのはどちらか」だけを問うなら、A とB は同じくらい良く見えます。しかし、ボラティリティまで考慮に入れると、戦略Aのほうがはるかに予測しやすく、戦略Bはずっと大きな振れ幅を伴います。これが、金融が単なる平均収益以上のものだという理由です。重要なのは、どの程度の不確実性に自分が耐えられるかでもあるのです。

4.3 分散投資

分散投資とは、お金を一つの資産に集中させるのではなく、複数の異なる資産に分けることを意味します。考え方は単純です。ある投資が悪い成績でも、別の投資がより良い成績を出すかもしれないので、全体としてのリスクを下げられる可能性があります。

分散投資

「卵を一つのかごに盛るな」ということわざは、金融の原理でもあります。

分散投資は利益を保証しません。そうではなく、どれか一つの結果への依存を減らすことで、リスクを管理するための戦略なのです。

よくある投資戦略

よくある投資戦略の例としては、次のようなものがあります。

- 国債、
- インデックス・ファンド、
- プレミアム・ボンド。

これらの戦略は、予測可能性、期待値、そして分散のされ方において互いに異なります。

ボラティリティの低い投資は、しばしばより予測可能です。ボラティリティの高い投資は、より大きな利益をもたらすかもしれませんが、そのぶん大きな損失にさらされる可能性もあります。ですから、「平均が最も大きいのはどれか」と問うよりも、むしろ次のように問うほうがよいかもしれません。

> どの選択肢なら、自分が現実的に引き受けて生きていけるだろうか。

5　公式のまとめと練習問題

公式のまとめ

$$
\begin{aligned}
\text{百分率変化：}\quad & \text{新しい値} = (\text{元の値})(1 \pm r), \\
\text{単利：}\quad & A = P(1 + rt), \\
\text{複利：}\quad & A = P(1 + r)^t, \\
\text{年}n\text{ 回の複利計算：}\quad & A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \\
\text{連続複利：}\quad & A = Pe^{rt}, \\
\text{期待値：}\quad & \mathrm{EV}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \\
\text{標本分散：}\quad & s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.
\end{aligned}
$$

練習問題

(a) ノートパソコンの価格は\$1800 です。これが15% 値引きされ、その後、値引き後の価格がさらに15% 上がりました。最終的な価格はいくらですか。\$1800 に戻りますか。

(b) \$2500 を年利4% の単利で6 年間運用します。最後にいくらになりますか。

(c) \$3000 を年利6% の複利で4 年間預けます。利子が毎年複利計算されるとき、最終的にいくらになりますか。

(d) あるゲームには三つの純利益の結果があります。確率0.5 で\$5 負け、確率0.3 で\$1 負け、確率0.2 で\$20 勝ちます。期待値を求めなさい。

(e) 公平なコインを投げます。表が出たら\$3 勝ち、裏が出たら\$2 負けます。このゲームは公平ですか、有利ですか、それとも不利ですか。

(f) 次のデータ集合を考えなさい。

$$A = (8, 10, 12, 10), \qquad B = (0, 10, 20, 10).$$

これらが同じ平均をもつことを示し、しかしボラティリティが異なることを示しなさい。

解答例

(a)

$$1800(0.85)(1.15) = 1759.50.$$

したがって、最終価格は\$1759.50 であり、\$1800 には戻りません。

(b)

$$A = 2500(1 + 0.04 \cdot 6) = 2500(1.24) = 3100.$$

(c)

$$A = 3000(1.06)^4 \approx 3000(1.26248) \approx 3787.43.$$

(d)

$$\mathrm{EV} = (-5)(0.5) + (-1)(0.3) + (20)(0.2) = -2.5 - 0.3 + 4 = 1.2.$$

したがって、期待値は\$1.20 です。

(e)

$$\mathrm{EV} = 3\left(\frac{1}{2}\right) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

したがって、このゲームはプレイヤーに有利です。

(f) 両方の平均は10 であり、標本分散は$s_A^2 = \frac{8}{3}$ および$s_B^2 = \frac{200}{3}$ です。したがって、B のほうが分散が大きく、よりボラティリティが高いです。