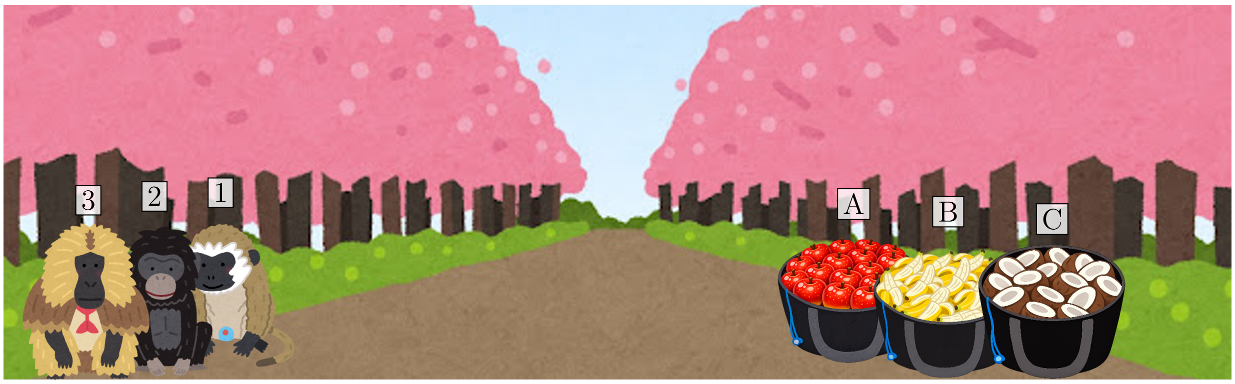
MAT120：数量的推論　第17講ハンドアウト
社会選択理論

前回の講義では、数学とお金を学び、成長、利子、期待値、リスクに注目しました。今回の講義では、「数学と社会」というまとまりをさらに進み、数学を用いて集団的意思決定をどのように研究できるかを考えます。中心となる主題は社会選択理論 です。つまり、多くの個人の選好を、集団としての一つの結果へどのようにまとめるべきか、という問題です。基本的な用語を導入し、いくつかの投票方式を学び、公平性についての二つの競合する考え方を見たのち、最後にスポイラー効果とコンドルセ循環を扱います。より深い教訓は、「投票をとる」という非常に身近な行為でさえ、主観的な要素を含み、その背後には興味深い数学が隠れているということです。

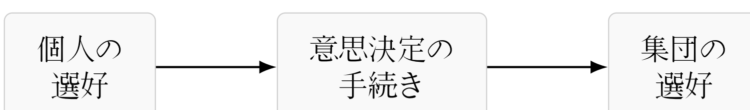
1　社会選択とは何か

三匹のサルが森の中を歩いていて、三つの異なる食べ物の袋を見つけたとしましょう。一つの袋にはリンゴが、もう一つにはバナナが、そしてもう一つにはココナツが入っています。さて、このサルたちはこれらの果物を盗みたいと思っていますが、袋は大きくて重いので、一つの袋を持ち上げるのに三匹のサル全員が必要です。このことを踏まえて、サルたちは三つの果物の袋のうち一つしか盗めないことにします。



もちろん、それぞれのサルには自分自身の好みがあります。たとえば、サル1 はココナツやリンゴよりもバナナを好むかもしれませんし、サル3 は本当にリンゴが好きかもしれません。集団としては、こうした選好を何らかの形で一つの共同の決定へと変換しなければなりません。どうすればよいのでしょうか。最初は簡単に聞こえます。サルたちはただ投票をして、票を数えて、勝者を選べばよいように思えます。しかし、ここで私たちは、票をどのように 数えるべきかという問題にぶつかります。

これが社会選択理論 の基本問題です。つまり、個々の選好の集まりにもとづいて、どのように集団としての決定を下すのか、という問題です。



もちろん、これは非常に重要な問いです。日和見的で盗み癖のある霊長類を超えて、私たち人間はふつう社会を民主的に組織しています。つまり、社会の資格ある構成員は皆、政治的指導者を選ぶ際に平等な発言権をもつということです。このような民主的状況においては、私たちの票の数え方の制度が、公平で、合理的で、数学的にきちんと振る舞うものかどうかを知ることができれば望ましいでしょう。

1.1　規範的な問いと経験的な問い

社会選択理論は主として規範的 な分野であって、経験的 な分野ではないことに注意しておきましょう。これは、「私たちは何をすべき か」という問いに答えようとするのであって、単に「私たちは実際に何をしているか」と問うのではない、ということです。これはヒュームの有

名なis/ought distinction、つまり「ある」と「べき」の区別です。ある種の文は、世界が実際にどうある かを記述しようとする単なる記述的なものであり、別の文は、世界がどうあるべき かを述べようとします。

規範的主張と経験的主張

- **規範的** 主張は、何をするのが正しいかを問います。
- **経験的** 主張は、現実の世界で実際に何が起こるかを問います。

もちろん、現実の選挙には心理学、歴史、メディア、制度、文化運動、戦略などが関わっています。しかし、そうした複雑さを議論する前に、基本的な数学的問題を切り分けて考えることは有益です。すなわち、有権者が自らの選好を報告したあとで、どの規則がそれらの選好を一つの結果へと変換すべきなのか、という問題です。今日議論するのはこの点です。

1.2　基本用語

実際のところ、投票規則には多くの異なる種類があります。これらを議論する前に、まずいくつかの新しい言葉を導入する必要があります。

社会選択理論の基本用語

- **有権者：** 入力を与える集団。
- **選択肢：** 可能な結果または候補。
- **選好順位：** 一人の有権者が選択肢を最良から最悪まで並べたもの。
- **選好プロファイル：** すべての有権者の順位づけを集めた完全な一覧。
- **社会選択規則：** 選好プロファイルを受け取り、一つの結果を生み出す方法。
- **結果：** 投票過程によって生み出される決定。

三匹のサルと果物の袋の例でいえば、

- **有権者** はサルたちであり、
- **選択肢** は三つの果物の袋であり、
- **選好順位** は各サルがリンゴ、バナナ、ココナツをどの順で好むかという個別の順位づけであり、
- **選好プロファイル** は三つの選好順位の集まりであり（一匹ごとに一つずつ）、
- **社会選択規則** は、サルたちが個々の選好の集まりを一つの決定へと変換するために採用する特定の方法であり、
- **結果** は、彼らがどの果物の袋を盗むと決めたか、ということです。

1.3　選好プロファイル

選好プロファイルは通常、表の形で書かれます。各列が一人の有権者に対応し、各行が順位に対応します。ふつう、最上段の行が最も好まれる選択肢を示し、最下段の行が各有権者にとって最も好まれない選択肢を示します。

三匹のサルを使うと、選好プロファイルの一例は次のようになります。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望:	A	A	B
第2希望:	B	C	A
第3希望:	C	B	C

数学的記法を導入しておくことも有用です。ここでは、$>$ という記号で選好を表すことにし、$A > B$ を「A はB より好まれる」と読みます。このようにして、選択肢の集合を左から右へと好みの順に並べることで、選好順位を数学的に書くこともできます。たとえば、上の表に書かれた選好プロファイルは次のようにも読めます。

- サル1: $A > B > C$,
- サル2: $A > C > B$,
- サル3: $B > A > C$.

これらは、単に上の表の各列を$>$ を使って書き直したものです。

2 投票規則

社会選択理論における中心的な観察の一つは、同じ選好プロファイルからでも、どの投票規則を課すかによって、まったく異なる勝者が生まれうるということです。したがって、選挙の結果は有権者が何を考えているかだけによって決まるのではなく、票をどのように数えるかというやり方にも左右されます。

重要な点

社会選択規則が異なれば、有権者の選好がまったく同じであっても、異なる勝者が生まれうる。

社会選択理論を扱う講義は一回しかないので、ここでは四つの基本的な社会選択規則だけを導入します。それは、

1. 単純多数決,
2. 決選投票,
3. ボルダ集計,
4. コンドルセ集計

です。

2.1 単純多数決

単純多数決 のもとでは、各有権者はただ一つの選択肢だけを選び、勝者は第1位票を最も多く集めた選択肢です。これは最も単純な集計規則であり、実際にも広く用いられています。

単純多数決の直観。 単純多数決が見るのは、選好プロファイルの最上段だけです。第1位に最も多く現れたものが勝ちます。

たとえば、先ほどの選好プロファイルを考えましょう。ここでは、単純多数決は最初の行だけに注目するので、単に最上段を見て何が勝つかを確かめればよいことになります。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望:	A	A	B
第2希望:	B	C	A
第3希望:	C	B	C

A が勝つ

単純多数決は簡単ですが、その単純さには代償があります。第2位や第3位の情報を完全に無視してしまうのです。多くの人にとって「受け入れ可能」ではあるが、第1位に置かれることが少ない選択肢は、簡単に負けてしまいます。

2.2　決選投票

決選投票規則は、単純多数決の考え方を洗練しようとするものです。この入門的な水準では、最初の投票で上位に来た選択肢どうしの間で行われる第二回投票として考えることができます。これは、第一回投票で決定的な勝者が出なかったときに起こりえます。その狙いは、単純多数決が一層分の情報しか使わないという問題を緩和することにあります。

現実の選挙では、決選投票制度の細部はさまざまです。ここで重要なのは単純に次の考え方です。すなわち、最初の集計で問題が決着しないなら、上位の選択肢どうしを、より焦点を絞った第二段階でもう一度比較する、ということです。

2.3　ボルダ集計

ボルダ集計 は、選好プロファイル全体を使います。「誰が第1位か」だけを問うのではなく、各順位に応じて点数を与えます。三つの選択肢の場合、自然な得点法は

$$\text{第1位} = 3, \qquad \text{第2位} = 2, \qquad \text{第3位} = 1.$$

です。そして、すべての有権者について点数を足し合わせ、合計点が最も高い選択肢が勝ちます。

ボルダ集計の手順

選択肢がm 個あるとき、順位に応じて点数を割り当て、各選択肢についてすべての有権者の点数を足し合わせ、その合計が最大のものを選ぶ。

例として、再び第2.1節の選好プロファイルを考えましょう。得点規則3, 2, 1 を使うと、次のようになります。

- サル1 は$A = 3$, $B = 2$, $C = 1$ を与える。
- サル2 は$A = 3$, $C = 2$, $B = 1$ を与える。
- サル3 は$B = 3$, $A = 2$, $C = 1$ を与える。

したがって合計は

$$A = 3+3+2 = 8, \qquad B = 2+1+3 = 6, \qquad C = 1+2+1 = 4.$$

となります。ゆえに、ボルダ勝者はA です。これを理解する最も簡単な方法は、先ほどの選好表をそのまま使うことかもしれません。上の議論は、次のように要約できます。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望	$A=3$	$A=3$	$B=3$
第2希望	$B=2$	$C=2$	$A=2$
第3希望	$C=1$	$B=1$	$C=1$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} A: 3+3+2 = \boxed{8\text{ 点}} \longleftarrow A\text{ が勝つ} \\ B: 2+1+3 = 6\text{ 点} \\ C: 1+2+1 = 4\text{ 点} \end{array}$$

2.3.1　もう一つのボルダの例

次に、次のプロファイルを考えましょう。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望	B	C	B
第2希望	C	A	C
第3希望	A	B	A

ここでのボルダ合計は

$$A = 1+2+1 = 4, \qquad B = 3+1+3 = 7, \qquad C = 2+3+2 = 7.$$

です。したがって、この場合、ボルダ集計はB とC の同点 を与えます。要するに、次のようになります。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望	$B=3$	$C=3$	$B=3$
第2希望	$C=2$	$A=2$	$C=2$
第3希望	$A=1$	$B=1$	$A=1$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} A: 1+2+1 = 4\text{ 点} \\ B: 3+1+3 = \boxed{7\text{ 点}} \longleftarrow \text{同点} \\ C: 2+3+2 = \boxed{7\text{ 点}} \end{array}$$

2.4　コンドルセ集計

コンドルセ集計 は、ボルダ集計と同様に選好プロファイル全体を使います。しかし、コンドルセ集計は情報を別のやり方で読み取ります。点数を与える代わりに、選択肢の対 を互いに比較するのです。たとえば、三つの選択肢A, B, C があるなら、A とB を比較し、次にA とC を比較し、最後にB とC を比較する必要があります。それぞれの組について、どれだけの有権者が一方を他方より好むかを数えます。コンドルセ集計は、この情報を使って誰が勝つべきかを決めます。

コンドルセの考え方

ある選択肢が、1対1の比較で他のすべての選択肢に勝つとき、その選択肢を**コンドルセ勝者** と呼ぶ。

サルたちの例に戻って、再び次の選好プロファイルを考えましょう。

- サル1: $A > B > C$,
- サル2: $A > C > B$,
- サル3: $B > A > C$.

選択肢が3 個しかないので、必要な1対1比較は3 つです。

1. A 対B: 二人の有権者がA をB より好むので、A がB に勝つ。
2. A 対C: 三人全員がA をC より好むので、A がC に勝つ。
3. B 対C: 二人の有権者がB をC より好むので、B がC に勝つ。

A はB とC の両方に1対1で勝つので、A はコンドルセ勝者です。

選好表の観点からいえば、コンドルセ勝者は、選択肢の対を見て、各列でどちらの選択肢が勝っているかを数えることで決められます。たとえば、上に書いたリンゴとバナナの比較は、次のように視覚化できます。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望:	A	A	B
第2希望:	B	C	A
第3希望:	C	B	C

$A > B$ が2回 $\longleftarrow$ A がB に勝つ
$B > A$ が1回

完全を期すために、比較(2) と(3) の表による形も下に示しておきます。

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望:	A	A	B
第2希望:	B	C	A
第3希望:	C	B	C

$A > C$ が3回 $\longleftarrow$ A がC に勝つ
$C > A$ は0回

	サル1	**サル2**	**サル3**
第1希望:	A	A	B
第2希望:	B	C	A
第3希望:	C	B	C

$B > C$ が2回 $\longleftarrow$ B がC に勝つ
$C > B$ が1回

見て分かるように、三つの1対1比較にもとづいて、A はB にもC にも直接対決で勝っているので、コンドルセ勝者と見なされます。

2.5 ボルダとコンドルセは食い違いうる

ボルダ集計もコンドルセ集計も、単純多数決より多くの情報を使おうとしていますが、両者が一致する必要はありません。実際、選択肢が三つ、有権者が三人だけの場合には、ボルダ法とコンドルセ法のもとで異なる唯一の勝者を得ることはできませんが、同点は起こりえます。しかし、さらに二人の有権者を加えると、そのようなプロファイルを作ることができます。次を考えましょう。

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
第1希望	A	B	A	B	A
第2希望	B	C	B	C	B
第3希望	C	A	C	A	C

両方の規則を明示的に確かめてみましょう。まずボルダ集計から始めます。選好プロファイルは

- 有権者1: $A > B > C$,
- 有権者2: $B > C > A$,
- 有権者3: $A > B > C$,
- 有権者4: $B > C > A$,
- 有権者5: $A > B > C$.

です。したがって、ボルダ得点は

$$A = 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 11,$$

$$B = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12,$$

$$C = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7.$$

となります。したがって、ボルダ集計ではB が勝者です。

次にコンドルセ集計を計算します。1対1比較は次の通りです。

1. **A 対B:** 有権者1, 3, 5 はA をB より好み、有権者2, 4 はB をA より好みます。したがって、A がB に勝ちます。
2. **A 対C:** 有権者1, 3, 5 はA をC より好み、有権者2, 4 はC をA より好みます。したがって、A がC に勝ちます。
3. **B 対C:** すべての有権者がB をC より好むので、B がC に勝ちます。

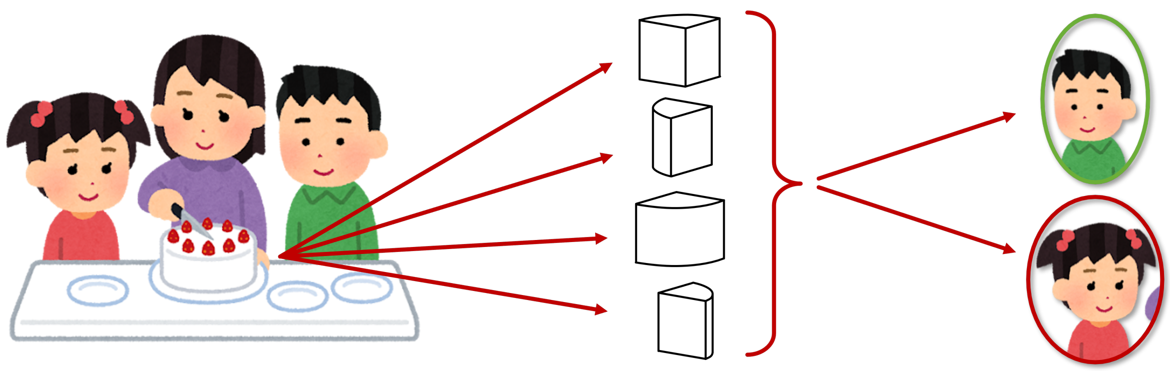
A は直接対決でB にもC にも勝つので、コンドルセ勝者はA です。

この選好プロファイルに対して、ボルダ集計はB を選びますが、コンドルセ集計はA を選びます。これは、二つの投票規則がどちらも選好プロファイル全体を使っていても、それでもなお異なる勝者を生みうることを示しています。

3　公平性と効用

投票は、集団が共同の決定を下さなければならない唯一の場面ではありません。もう一つの重要な問いは、資源をどのように公平に分配するかということです。これは「公平分割」と呼ばれます。時間の都合上、ここでは一つの例を通してのみこの考え方を導入します。

母親が二人の子どものあいだで誕生日ケーキを分けようとしているとしましょう。彼女はケーキを四つの切れに切り分け、それを子どもたちに与えたいと思っています。



このケーキの切れをどのように割り当てるべきでしょうか。

3.1　効用関数

四つのケーキの切れをA, B, C, D とラベルづけするとしましょう。ケーキの切れの割り当てに対する一つの方法は、単に子どもたちにどの切れを好むかを尋ね、それから各子どもにどのように与えれば公平になるかを考えることです。それぞれの切れは子どもごとに異なる価値をもちうるので、各切れに対して10 点満点で点数をつけてもらうことにします。数が大きいほど、その切れがより価値あるものに対応します。たとえば、女の子はアイシングが嫌いなので、アイシングがたくさん載った切れを3 点と評価するかもしれません。男の子はとてもお腹が空いているので、大きい切れを8 点と評価するかもしれません。

子どもたちが各切れを次のように評価しているとしましょう。

	A	B	C	D
男の子	4	8	5	10
女の子	0	4	7	8

各子どもによるこのような価値の割り当ては、効用関数 と呼ばれます。これは、その人がそれぞれの可能な部分をどれだけ価値あるものと見なしているかを示します。このデータが手に入れば、公平性を数的な観点から研究し始めることができます。

3.2　部分集合としての割り当て

ケーキの切れのどのような配分も、集合論を使って記述できます。ここでは、男の子または女の子が受け取る任意の切れの割り当てを、$\{A, B, C, D\}$ の部分集合と同一視できます。もちろん、この割り当ての半分は自動的に決まります。なぜなら、男の子にある部分集合が割り当てられれば、女の子にはその補集合が割り当てられるからです。たとえば、

- もし男の子が切れA, B, C を受け取るなら、女の子は切れD を受け取ります。この割り当ては男の子に部分集合$\{A, B, C\}$ を与え、女の子には部分集合$\{D\}$ を与えることに対応します。
- もし男の子が$\{A, C\}$ を受け取るなら、女の子は$\{B, D\}$ を受け取ります。
- もし男の子が四つすべての切れを受け取るなら、女の子は$\varnothing$ を受け取ります。

原理的には、男の子の割り当ては$\{A, B, C, D\}$ の任意の部分集合でありえます。したがって、可能なすべての割り当ての集合はベキ集合

$$\mathcal{P}(\{A, B, C, D\})$$

によって与えられます。大きさ4 の集合は$2^4 = 16$ 個の部分集合をもつので、可能な割り当ては16 通りあります。

なぜベキ集合が現れるのか

ある割り当てを選ぶことは、男の子がどの部分集合の切れを受け取るかを選ぶことに等しい。その部分集合が決まれば、女の子の取り分は自動的にその補集合になる。したがって、可能な割り当ての数はベキ集合の大きさ、すなわち$2^4 = 16$ である。

3.3　割り当ての価値を数える

割り当てを評価するために、その部分集合に含まれている効用を単純に足し合わせることにします。[1] たとえば、男の子が$\{B, C\}$ を受け取り、女の子が$\{A, D\}$ を受け取るなら、

$$\text{男の子にとっての価値} = 8 + 5 = 13, \qquad \text{女の子にとっての価値} = 0 + 8 = 8.$$

次の表は、可能なすべての割り当てを記録したものです。後で便利なように、表の末尾にさらに二つの列を加えてあります。

[1] これは私たちの方法の一つの仮定であることに注意してください。一般には、割り当て$\{A, B\}$ の価値が、A とB の個別の価値の和でなければならないとは限りません。そうでない状況も想像できます。たとえば、鶏肉を食べることとジャムを食べることの価値はそれぞれ高くても、鶏肉とジャムのサンドイッチを食べる価値はそれより低いかもしれません。

男の子が受け取るもの	女の子が受け取るもの	男の子の価値	女の子の価値	合計	最小値
$\varnothing$	$\{A, B, C, D\}$	0	19	19	0
$\{A\}$	$\{B, C, D\}$	4	19	23	4
$\{B\}$	$\{A, C, D\}$	8	15	23	8
$\{C\}$	$\{A, B, D\}$	5	12	17	5
$\{D\}$	$\{A, B, C\}$	10	11	21	10
$\{A, B\}$	$\{C, D\}$	12	15	27	12
$\{A, C\}$	$\{B, D\}$	9	12	21	9
$\{A, D\}$	$\{B, C\}$	14	11	25	11
$\{B, C\}$	$\{A, D\}$	13	8	21	8
$\{B, D\}$	$\{A, C\}$	18	7	25	7
$\{C, D\}$	$\{A, B\}$	15	4	19	4
$\{A, B, C\}$	$\{D\}$	17	8	25	8
$\{A, B, D\}$	$\{C\}$	22	7	29	7
$\{A, C, D\}$	$\{B\}$	19	4	23	4
$\{B, C, D\}$	$\{A\}$	23	0	23	0
$\{A, B, C, D\}$	$\varnothing$	27	0	27	0

3.4 二つの公平性理論

効用が計算されたなら、そこにさまざまな倫理原理を課すことができます。ここでは今のところ二つだけに焦点を当てます。

二つの公平性理論

- **功利主義：** すべての効用の合計 を最大化する割り当てを選ぶ。
- **平等主義：** 関係者のあいだでの最小 効用を最大化する割り当てを選ぶ。

この二つの規則は同じではありません。功利主義は、全体としての価値の総和をできるだけ大きくする割り当てを見つけようとするのに対し、平等主義は、もっとも不利な人をできるだけ保護する割り当てを見つけようとします。

3.4.1 功利主義的結論

上の表の合計の列を見ると、最大の総価値は29 であり、これは

$$\text{男の子が}\{A, B, D\}\text{ を受け取り，女の子が}\{C\}\text{ を受け取る}$$

ときに達成されます。したがって、功利主義者はこの割り当てを選びます。

3.4.2 平等主義的結論

上の表の最小値の列を見ると、最大の最小値は12 であり、これは

$$\text{男の子が}\{A, B\}\text{ を受け取り，女の子が}\{C, D\}\text{ を受け取る}$$

ときに達成されます。したがって、平等主義者は別の割り当てを選びます。

公平性は原理に依存する

この例では、

- **功利主義** は、男の子に$\{A, B, D\}$、女の子に$\{C\}$ を与える。
- **平等主義** は、男の子に$\{A, B\}$、女の子に$\{C, D\}$ を与える。

したがって、「もっとも公平な割り当て」は絶対的でも、必ずしも客観的でもありません。それは、私たちがどの公平性原理を採用するかに依存します。

4 スポイラー効果

スポイラー効果 は、多数決型の投票に伴うもっとも有名な問題の一つです。これは、第三の候補者が現実的には勝つ見込みをほとんど持っていないにもかかわらず、最終結果を変えてしまうときに起こります。

もっともよく知られた例は、2000年アメリカ大統領選挙のフロリダ州です。この状況では、主な候補者はGeorge W. Bush、Al Gore、Ralph Nader の三人でした。フロリダ州における彼ら三人の得票数は次の通りでした。

	Bush	**Gore**	**Nader**
得票数	2,912,790	2,912,253	97,421

したがって、Bush はわずか537 票差でフロリダ州を制しました。

Nader はGreen Party の候補であり、Al Gore よりもさらに政治的左派に位置していました。したがって、もし二者択一で選ぶなら、Nader に投票した人の多くはBush よりGore を選んだであろうと考えられます。そうであれば、Gore がフロリダを制していた可能性は十分にあります。しかし、選択肢として*Nader* が存在したことそれ自体 がGore から票を奪ったかもしれず、その結果として現実にはGore は敗れました。

スポイラー効果

スポイラー効果 とは、勝つ見込みのほとんどない候補者が、近い立場の候補者から票を奪うことで、最終結果を変えてしまうときに起こる。

言い換えれば、「無関係」な選択肢を加えることが、実際には無関係でないことがあるのです。これが、社会選択理論が勝者そのものだけでなく、ある規則が余分な選択肢の存在にどれほど敏感かにも関心をもつ理由の一つです。

5 コンドルセ循環

1対1の多数決比較を用いれば、常に選挙をきれいに決着させられるのではないか、と期待したくなるかもしれません。コンドルセ循環は、その期待が誤っていることを示します。次の選好プロファイルを考えましょう。

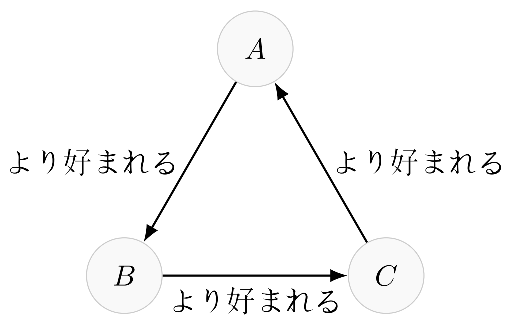
	有権者1	有権者2	有権者3
第1希望	A	C	B
第2希望	B	A	C
第3希望	C	B	A

このプロファイルでは、多数派勝者は存在せず、単純多数決は3 者同点になります。したがって、決選投票制度には追加の同点処理規則、あるいはより詳しい制度設計が必要になります。さらに、ボルダ集計でも三つの選択肢すべてが同点になります。もっとも興味深いことに、コンドルセ集計では次の1対1比較が得られます。

講義ではその帰結を次のようにまとめています。

- $A > B$ が2回、$B > A$ が1回なので、A がB に勝つ。
- $C > A$ が2回、$A > C$ が1回なので、C がA に勝つ。
- $B > C$ が2回、$C > B$ が1回なので、B がC に勝つ。

したがって、集団はA をB より好み、B をC より好みながら、同時にC をA より好むという「選好のループ」を作ってしまいます。



コンドルセ循環

コンドルセ循環 は、多数派の選好が循環的になるときに起こる。

$$A > B, \qquad B > C, \qquad \text{and} \qquad C > A.$$

この状況では、コンドルセ勝者は存在しない。

これは非常に興味深い結果です。きわめて単純な状況であっても、個々の有権者はそれぞれ完全に整合的な順位づけをもっているにもかかわらず、集団の選好全体としては整合性を失いうることを、私たちは今まさに示したのです。

6　練習問題

練習問題1: 投票規則

次の選好プロファイルを考えなさい。

	有権者1	**有権者2**	**有権者3**
第1希望	B	C	B
第2希望	C	A	C
第3希望	A	B	A

(a) 単純多数決では誰が勝つか。
(b) 得点規則$3, 2, 1$ を用いてボルダ合計を計算しなさい。
(c) 1対1比較によってコンドルセ勝者を決定しなさい。

解答

(a) 単純多数決では、第1位票だけが重要です。B は第1位に2回現れ、C は1回なので、単純多数決はB を選びます。
(b) ボルダ合計は

$$A = 1 + 2 + 1 = 4, \qquad B = 3 + 1 + 3 = 7, \qquad C = 2 + 3 + 2 = 7.$$

したがって、ボルダ法ではB とC の同点になります。
(c) 1対1比較を行うと、
- B はA に2 対1 で勝つ。
- C はA に3 対0 で勝つ。
- B はC に2 対1 で勝つ。

したがって、B は他の二つの選択肢の両方に1対1で勝つので、コンドルセ勝者はB です。

練習問題2: 公平性と効用

次の効用表を用いなさい。

	A	B	C	D
男の子	4	8	5	10
女の子	0	4	7	8

男の子が$\{A, D\}$ を受け取り、女の子が$\{B, C\}$ を受け取るとする。
(a) 男の子の価値を計算しなさい。
(b) 女の子の価値を計算しなさい。
(c) 功利主義的総和と平等主義的最小値を計算しなさい。

解答

男の子の価値は

$$4 + 10 = 14.$$

女の子の価値は

$$4 + 7 = 11.$$

したがって、功利主義的総和は

$$14 + 11 = 25,$$

平等主義的最小値は

$$\min(14, 11) = 11.$$