

## 1 逻辑陈述

### 1.1 什么是逻辑陈述?

逻辑陈述是完整的、语法正确的句子，并且可以被判断为“真”或“假”。严格来说，我们把这种判断称为“赋值”，或者称为“给出一个真值”。

用非常非正式的方式来说，可以把逻辑陈述理解为论证的积木：我们可以想象一些形状和大小不同的小积木。这些积木上都写着一个“T” 或一个“F”，表示它们的真值（也就是它们是真的还是假的）。我们可以想象，通过把这些积木放在一起，形成一个能够自己站立的结构，从而构造论证。

### 1.2 什么构成一个好论证?

继续使用我们的类比，一个论证可能坏在两个方面：逻辑有缺陷，或者前提为假。我们分别称之为“无效性”和“不健全性”。

(1) **逻辑有缺陷**。在积木的类比中，我们可以想象把积木摆放成一个“难看”而且不能自己站立的结构。这代表这样一种情况：我们拿到一个论证的前提，但以不合逻辑或不正确的方式把它们安排起来，从而得出结论。这种情况称为一个“无效论证”。

作为例子，考虑这个论证：“地球是一颗行星。因此，任何其他行星都是地球”。这里的逻辑结构显然有缺陷：不仅结论是错的，而且在这个论证中，我们似乎假设了类似于“对于所有东西 $P$ ，如果 $P$  是一颗行星，那么 $P$  就是地球”这样的东西。这显然是错的，也是逻辑误用的一个例子。

(2) **前提为假**。回忆一下，每块积木上都写着一个小小的“T” 或“F”。即使我们把积木叠成一个能够自己站立的漂亮结构，只要其中某些小积木上写着“F”，我们仍然会构造出一个坏论证。这代表这样一种情况：我们拿一组陈述（也就是前提），以有效的方式安排它们，但其中某个前提恰好是假的。

我们称这种情况为“有效但不健全”。这里的“健全”意思是，前提一开始就是真的。一个有效但不健全的论证例子是：

“所有狗都是猫。我有一只狗，所以我也有一只猫。”

严格来说，这里的逻辑其实是可以的：这个论证说的类似于“所有 $P$  都是 $Q$ 。我有一个 $P$ ，所以我有一个 $Q$ ”。这个论证之所以“错”，是因为它不健全：前提“所有狗都是猫”本身就是错的，因此结论不值得认真接受。

需要注意的是，一个论证不健全，并不要求它的结论明显为假。原则上，我们可能用一个不健全的论证，偶然得出一个真实的结论。例如：

“所有狗都是猫。我没有猫，所以我没有狗。”

事实上，我确实没有狗。所以，如果我作出这个论证，那么“我没有狗”这个结论在技术上是真的，尽管我是通过一个不健全的论证得到它的。

- (3) **好论证**。到目前为止，我们已经看到，“有效性”关心的是论证是否正确使用逻辑，而“健全性”关心的是论证是否使用真实事实。一个好而有说服力的论证需要同时具备这两个特征：我们需要一个好论证从真实前提出发，并且由一系列正确的逻辑步骤构成。

在积木类比中：如果我们拥有所有小积木，把它们叠成一个漂亮的结构，而且所有积木上都写着“T”，那么我们就有一个好论证。所以：一个好论证是好逻辑（也就是以正确方式堆叠积木）和好前提（也就是我们作为假设的逻辑陈述都是真的）的混合。一个有效且健全的论证例子可能是：

“所有狗都是动物。我有一只狗，所以我有一只动物。”

这个论证正确到让人觉得显然如此，正是因为它既有效又健全。

### 1.3 逻辑陈述的例子

逻辑陈述是具有确定真值的句子。事实上，并不是我们日常生活中使用的每个句子都具有这个性质。下面是一些逻辑陈述的例子和非例子。

- (1) “有些玫瑰有刺”。这是一个逻辑陈述（事实上，它是真的）。
- (2) “我的桌子上有一个橙子”。这是一个逻辑陈述（它是假的）。
- (3) “我比大谷翔平更有钱”。这是一个逻辑陈述（可惜它是假的）。
- (4) “所有玫瑰都是花”。这是一个逻辑陈述（它是真的）。
- (5) “请把水递给我”。这不是逻辑陈述，因为它不能被判断为真或假。事实上，它只是一个请求。
- (6) “你累了吗？”这不是逻辑陈述；它是一个问题。这里没有我们可以理解的“真”或“假”。
- (7) “Gpauwibpuaregbiaebg”。这不是逻辑陈述，因为它根本没有意义。

#### 练习

判断下面的句子是否为逻辑陈述。

- (1) 请关门。
- (2) 作业今天截止吗？
- (3) 东京在日本。
- (4) 2 大于3。
- (5) 电影下午3 点开始。
- (6) 我现在正坐着。
- (7) John 很高。

#### 解答

第(3)、(4)、(5)、(6) 项是逻辑陈述。第(1)、(2) 项不是逻辑陈述。至于第(7) 项，这取决于你问谁！我们现在会稍微详细地讨论这一点。

### 1.4 关于模糊性的说明

有时，一句话是否是陈述并不清楚。日常语言是一种社会实践，而人际交流往往涉及大量非语言的假设或惯例。因此，现实世界中的语言常常是模糊的，我们并不清楚某个句子是否真的具有真值。让我们再次考虑这个句子：

“John 很高。”

虽然这个句子看起来似乎有一个确定的真值，但事情并不总是这么简单。事实上，“高”这个词是一个相对词。例如，与昆虫相比，John 很高；但与一棵树相比，他并不高。孤立地看，“John 很高”这个句子并没有具体说明我们应该把John 和什么进行比较。

当然，在这个阶段你可能会反驳说：“很明显，这里是在把John 和其他人类进行比较。”但是，这只是你根据语境作出的一个假设；事实上，在“John 很高”这三个词中，并没有这样的内容。换句话说，是你预期这里的比较对象是其他人类，而这只不过是基于语境的假设。一个更吹毛求疵但更正确的解释是：“John 很高”太模糊了，因此不能被看作真正的逻辑陈述。没有提供更多信息时，它不能被确定地判断为真或假。

模糊性问题是一个丰富的哲学主题，也相当有趣。一方面，我们可以同意模糊陈述既不真也不假。另一方面，我们也可以观察到，模糊性正是人类交流的方式。像“鸟会飞”或“John 很高”这样的陈述是模糊的，但我们都知道它们是什么意思。

许多哲学家和语言学家都试图从逻辑角度处理模糊性问题：这类问题可以被视为哲学逻辑的例子，也就是在分析哲学问题时使用逻辑技术。不过，一般来说，在这门课中，我们会简单生活，暂时假装这些关于模糊性的深层哲学问题不存在。

## 1.5 理发店

现在我们介绍另一个有趣的逻辑谜题。它看起来清楚而精确，但却没有确定的真值。

想象日本乡村里有一个小村庄。在这个村庄里有一家理发店，而且因为村庄很小，所以只有一位女性在那里工作。这位女性给自己定了一条规则，我称之为(R)：

(R)：“我只会给那些不给自己剪头发的女性剪头发。”

这看起来很合理，因为会给自己剪头发的女性并不需要去理发店。然而，如果我们问这个问题，就会变得非常困惑：这位女性会给自己剪头发吗？

有两种情况：(1) 她给自己剪头发；(2) 她不给自己剪头发。在情况(1)中，根据规则(R)，她只给那些不给自己剪头发的女性剪头发，所以这意味着她不给自己剪头发！在情况(2)中，她不给自己剪头发，这意味着她可以应用这条规则并给自己剪头发！这又把我们带回情况(1)，于是我们进入一个逻辑的无限循环：(1) 推出(2)，(2) 推出(1)，(1) 推出(2)，如此等等。但是，(1) 和(2) 是相反的陈述……所以哪一个是真的？

在这个例子中，我们遇到了逻辑中的一种奇怪的“无限循环”。这里有一个精确的（也就是不模糊的）句子，但每当我们试图考虑它时，它的真值都会在真与假之间不断切换。这种情况称为“逻辑悖论”，而且非常令人困惑。解决这类悖论同样属于哲学逻辑这一学术领域。

事实上，我们的理发店例子是一个非常著名的悖论的改编，这个悖论叫做“理发师悖论”。一个密切相关的悖论是“说谎者悖论”，它围绕句子“这句话是谎言”展开。想象一下说出这句话：如果你说了这句话，而它是真的，那么你没有说谎，因为你的陈述是真的。然而，这句话本身说这个句子是谎言，所以你在说谎！另一方面，如果你说“这句话是谎言”，而这句话是假的，那就意味着“这句话不是谎言”，也就是说，你在说真话！因此，我们会永远在真与假之间来回跳动，类似于那位不幸的理发店员工的情况。

值得一提的是，在这门课中，我们不会试图解决这些更深层的逻辑问题。相反，为了保持简单，我只会给你们明确、清楚的逻辑陈述例子。

## 2 量词

### 2.1 一个思想实验

我希望你想象上帝，他是全能的。上帝面前有一个纸板箱。上帝把宇宙中的所有物体都拿出来，并把它们全部排在自己面前。然后，他一个一个地检查这条队列，并把所有吉他放进纸板箱里。在这个过程中结束时，上帝关上纸板箱，并在箱子外面贴上一张写着“吉他”的标签。然后，他把这个箱子放到一堆装着各种东西的纸板箱旁边（有一个箱子装“泡菜”，一个箱子装“纸”，一个箱子装“数字”，等等）。

同时，我也希望你假装同一个物体可以放进多个可能的纸板箱。例如，我可能会被放进贴着“英国人”标签的箱子里，但我也会被放进贴着“David 们”的箱子里，也会被放进贴着“人类”的箱子里。

我为什么要告诉你这些？因为，在某种（更有限、更有限量的）意义上，我们人类一直在把对象放进我们心智中的箱子里。这个过程称为认知分类。

### 2.2 认知分类

我们人类不断识别对象，并根据我们作出的判断对它们进行分类。这往往是一个瞬间发生的、无意识的过程，并且是足够高级生命形式的一项基本功能。其他动物（狗、猫、猴子）也一直在做这件事：它们通过判断自己看到的東西，建立某种关于世界的内部理论。对我们人类来说，每当我们遇到一个新对象时，我们会立刻在心中把它“放进一个箱子”，并给它分配某个语言标签。

### 2.3 量词

现在，量词是逻辑陈述中处理分类的小部分。它们是语言中的一些特征，要求我们进入箱子，检查其中的东西是否具有某种特定性质。包含量词的逻辑陈述例子有：

- (1) 所有吉他都是乐器。
- (2) 存在一把蓝色吉他。
- (3) 没有用水做成的吉他。

在这些陈述中，我们都以某种方式评估“所有吉他的箱子”，以确定陈述的真值。在第一种情况下，我们必须检查每一把吉他，看它是否是乐器。在第二种情况下，我们必须试图在箱子里找到一把蓝色吉他的例子。在第三种情况下，我们必须检查每一把吉他，确保它不是用水做成的。

在普通语言中，量词是像“所有、有些、存在、没有、每一个、无”等等这样的词。它们是句子中的小部分，会迫使我们检查某个类别中的一些对象是否具有特定性质（例如是否是用水做成的）。

## 2.4 练习 (识别量词)

### 练习

识别下面陈述中的量词。

- (1) 每个人都有一套独一无二的指纹。
- (2) 美国没有以Q开头的州。
- (3) 这个班里没有学生去过南极洲。
- (4) 在中国, 有18个城市的人口超过1000万。
- (5) 这个房间里至少有两个人有Android 智能手机。

### 解答

- (1) “每个”。(2) “没有”。(3) “没有”。(4) “有”。(5) “至少两个”。

## 2.5 表达量词的更多方式

在英语中, 许多不同的词实际上可以用来表达同一个量词。下面是一些量词近义表达的例子。

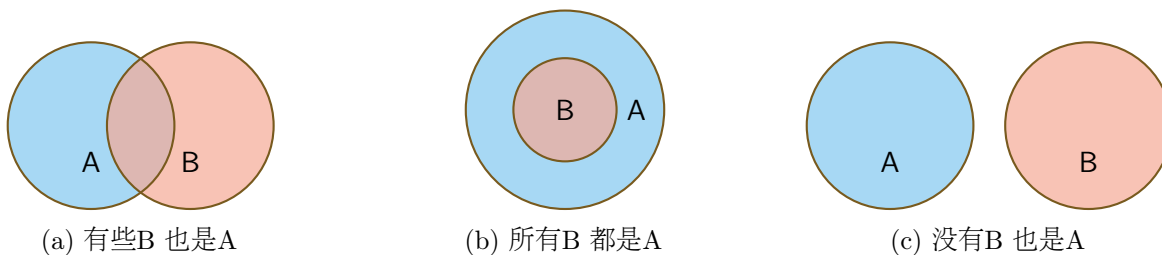
- (1) All, every, every single
- (2) Some, a few
- (3) There is, there exists
- (4) No, there aren't, there are no, none of

事实上, 真正的逻辑量词实际上只有两个: “所有”和“存在”。其余量词都可以由这两个构造出来。

## 2.6 另一种表示方式: 维恩图

另一种表示涉及量词的陈述的方法, 是使用维恩图。与纸板箱不同, 维恩图是用圆圈画出来的图。我们用一个圆表示某一类对象(吉他、用水做成的东西、蓝色的东西, 等等)。圆内的任何东西都属于这个类别, 圆外的任何东西都不属于这个类别。例如, 你可以把这想象成在地上画一个圆圈, 把所有吉他放进圆圈里, 把所有不是吉他的东西留在圆圈外。

我们可以用这些圆来表示涉及量词的陈述。假设我们有两个圆, 一个圆表示所有对象A, 另一个圆表示所有对象B。这两个圆之间有三种相互关系的可能性:

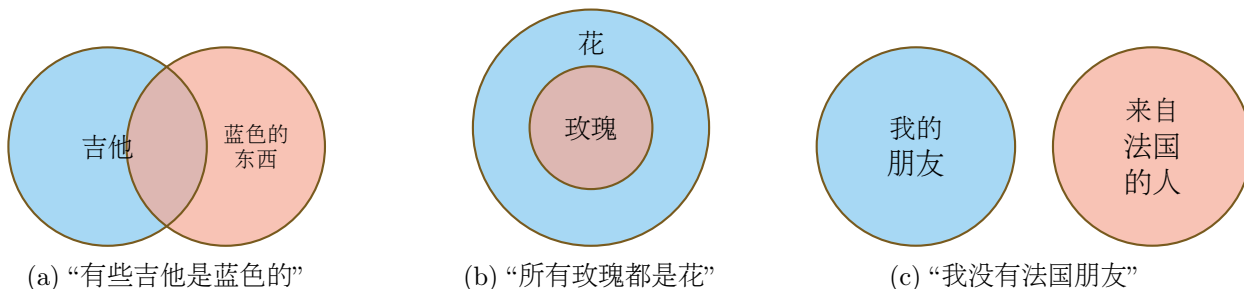


- (a) 两个圆有一点重叠。在这种情况下, 有些东西同时既是A 又是B。这表示陈述“有些A 也是B”。

- (b) 一个圆更小，并且完全包含在另一个圆中。例如， $B$  的圆完全包含在 $A$  的圆中。在这种情况下，这表示陈述“所有 $B$  也是 $A$ ”。
- (c) 两个圆彼此完全分离。在这种情况下，这表示陈述“没有 $B$  也是 $A$ ，并且没有 $A$  也是 $B$ ”。

## 2.7 维恩图的例子

作为例子，下面是3 个维恩图：



- (1) 两个圆有一点重叠。如果我令类别 $A =$  吉他，类别 $B =$  蓝色的东西，那么两个重叠的圆表示陈述“有些蓝色吉他”。
- (2) 两个圆中，一个包含在另一个里面。如果我现在令类别 $A =$  玫瑰，类别 $B =$  花，那么 $A$  的圆包含在 $B$  的圆中，就表示陈述“所有玫瑰都是花”。
- (3) 两个圆完全分离。如果我令类别 $A =$  我的朋友，类别 $B =$  法国人，那么两个圆分离就表示陈述“我没有法国朋友”。

## 3 连接词

### 3.1 什么是连接词？

连接词是一种把两个逻辑陈述组合在一起，从而形成一个新的逻辑陈述的方法。也就是说，我们以某种方式把两个陈述“连接”起来。由于新得到的东西仍然是逻辑陈述，所以它有真值（它要么真，要么假），而这个真值的具体性质取决于我们连接起始陈述的方式。这听起来有点令人困惑，但事实上，一旦我们看到一些连接词的例子，它就会变得很简单。事实上，我们在日常生活中一直在使用连接词，只是没有意识到而已。换句话说，逻辑陈述和逻辑连接词在日常生活中如此明显、如此常见，以至于我们把它们视为理所当然。

现在我们将学习5 种把逻辑陈述组合成新陈述的基本方式。这些方式是基础性的，任何其他巧妙的逻辑陈述组合都总是可以用这五种基本技术来描述（事实上，秘密地说，你只需要两个连接词）。这五种连接词是：否定、合取、析取、蕴含和等价。用普通英语来理解这些复杂词语，最好把它们理解为：

- (1) 否定= Not
- (2) 合取= And
- (3) 析取= Or
- (4) 蕴含= If ... then ...
- (5) 等价= ... if and only if ...

## 3.2 否定

理解否定最简单的方法，是把它看作日常语言中的“不是”。否定接受一个逻辑陈述，并形成一个新的陈述，意思是“情况并非如此：...”。如果原陈述为真，那么否定后的陈述为假；如果原陈述为假，那么否定后的陈述为真。所以，否定只是把你开始时那个陈述的真值翻转过来。

例如：陈述“外面正在下雨”的否定是“外面没有下雨”。

理解否定的另一种方式，是把它看作对前一个陈述的即时反驳。如果我说“今天早上吃早饭前，我赚了一百万美元”，显然的回应会是“不，你没有”。后一个陈述就是一个否定：你真正说的是“不，你今天早饭前没有赚一百万美元”。否定就是这么回事：一个陈述的否定，就是具有相反真值的陈述。

## 3.3 合取

理解合取最简单的方法，是把它看作日常语言中的“并且”。合取把两个逻辑陈述组合成一个更大的陈述，意思是“陈述1 并且陈述2”。只有当两个单独的陈述都为真时，合取才为真。因此，这意味着只要两个陈述中有一个为假（或者两个都为假），合取就是假的。为什么？因为合取的意思就是“并且”，而“并且”本身就表示“二者同时成立”。

例如：如果陈述1 是“我今天早上喝了咖啡”，陈述2 是“我今天早上吃了燕麦粥”，那么这两个陈述的合取就是“我今天早上喝了咖啡并且吃了燕麦粥”。这个合取只有在我确实做了这两件事时才可能为真。如果我没有喝咖啡（或者没有吃燕麦粥），那么合取“我今天早上喝了咖啡并且吃了燕麦粥”就是假的。

如果你好奇的话：“conjunction”这个词听起来很像“conjoined”，后者常用于描述双胞胎婴儿在子宫中连在一起的极其罕见情况。这里前缀“con”的意思是“与”或“一起”，所以“conjoined”的意思就是“连接在一起”。合取也就是这样：我们拿两个逻辑陈述，并把它们的真值“连接在一起”进行评估。

## 3.4 析取

理解析取最简单的方法，是把它看作日常语言中的“或者”。析取把两个逻辑陈述组合成一个更大的陈述，意思是“陈述1 或者陈述2”。在逻辑中，“或”通常是包容性的，这意味着二者同时为真也是可以的。换句话说，只要至少一个陈述为真，析取就为真（包括两个都为真的情况）。相反，只有当两个陈述都为假时，析取才为假。

例如：如果陈述1 是“John 在一家咖啡馆里”，陈述2 是“John 在东京”，那么这两个陈述的析取就是“John 在一家咖啡馆里，或者他在东京”。这个析取在三种情况下为真：John 在东京以外的一家咖啡馆里；John 在东京但不在咖啡馆里；或者二者同时成立，也就是John 在东京某处的一家咖啡馆里。这个陈述只有在John 既不在咖啡馆里，也不在东京时，才会为假。

前缀“dis”的意思是“分开，或分离”。例如，“discard”的意思是“丢弃一张牌”，其来源是旧式纸牌游戏。在大多数纸牌游戏中，你手里拿着许多牌，也就是在你直接控制之下的牌。有些游戏要求你从手牌中“扔掉”某张牌，也就是说，你通过把某张牌与手中其余的牌分离来“discard”。在这个意义上，“dis”表示“离开”或“分开”。回到“disjunction”这个词，我们现在看到它的意思有点像“连接，但分开”。事实上，这完美地描述了寻找析取真值的方式：我们分别考虑两个起始陈述的真值，只要其中一个为真，就会使析取为真。

### 3.5 练习（否定、合取、析取）

#### 练习

在学习其他连接词之前，我们先做一个快速练习。现在考虑两个陈述。陈述1 是“John 在月球上”，陈述2 是“John 在东京”。

- (1) 否定陈述1。
- (2) 否定陈述2。
- (3) 构造陈述1 与你在(1) 中答案的合取。你的新陈述是真还是假？
- (4) 构造陈述2 与你在(2) 中答案的析取。你的新陈述是真还是假？

#### 解答

- (1) John 现在不在月球上。
- (2) John 现在不在东京。
- (3) John 现在在月球上，并且John 现在不在月球上。（假）
- (4) John 现在在东京，或者他现在不在东京。（真）

### 3.6 蕴含

理解蕴含最好的方式，是把它看作日常语言中的“如果... 那么...”陈述。蕴含把两个逻辑陈述组合成一个更大的陈述，意思是“如果陈述1 为真，那么陈述2 为真”。蕴含只有在一种情况下为假：陈述1 为真，但陈述2 为假。在其他所有情况下，蕴含都为真。

一种好的理解方式是：蕴含是一条条件规则（或承诺），它恰好在第一部分发生而第二部分没有发生时被违反。想象机场安检也许有帮助：通过安检门时，工作人员告诉你“如果你有笔记本电脑，那么把它从包里拿出来，放到单独的托盘里”，只有这样，他们才让你通过。这就是一个蕴含：它是一条你可能需要应用的规则，取决于你是否有笔记本电脑。工作人员不让你通过安检门的唯一情况，是你违反了这条规则，也就是你包里有笔记本电脑，但你没有把它拿出来。

再举一个例子：令陈述1 为“你超过20 岁”，陈述2 为“你可以在便利店买啤酒”。那么从陈述1 到陈述2 形成的蕴含就是“如果你超过20 岁，那么你可以在便利店买啤酒”。这个陈述只有在陈述1 为真但陈述2 为假时才会为假，也就是说，你超过20 岁，但由于某种原因你仍然不能在便利店买啤酒。

### 3.7 等价

理解等价最好的方式，是把它看作日常语言中的“当且仅当”。等价把两个逻辑陈述组合成一个更大的陈述，意思是“陈述1 为真恰好在陈述2 为真时”。当两个陈述具有相同真值时（也就是它们都为真或都为假），等价为真。当它们不同（一真一假）时，等价为假。等价表达一种双向联系：每个陈述都保证另一个陈述。

例如：如果陈述1 是“我喜欢你”，陈述2 是“你不是法国人”，那么由这两个陈述形成的等价就是“我喜欢你，当且仅当你不是法国人”。如果存在我喜欢某个法国人的情况，或者存在某个非法国人但我不喜欢的情况，那么这个陈述就是假的。

### 3.8 练习（蕴含与等价）

#### 练习

考虑前一个练习中的两个陈述，也就是陈述1是“John 现在在月球上”，陈述2是“John 现在在东京”。

- (1) 构造一个陈述，表达从陈述1到陈述2的否定的蕴含。这个陈述是真还是假？
- (2) 构造一个陈述，表达陈述1与陈述2之间的等价。

#### 解答

- (1) 如果John 现在在月球上，那么John 现在不在东京。（这是真的。）
- (2) John 现在在月球上，当且仅当他现在在东京。