

1 論理文

1.1 論理文とは何か

論理文とは、文法的に完全な文であり、「真」または「偽」として評価できるものです。専門的には、この割り当てを「評価」、または「真理値の割り当て」と呼びます。

非常にくだけた言い方をすれば、論理文は議論の構成要素だと解釈すると分かりやすいです。私たちは、さまざまな形や大きさを持つ小さな積み木を想像することができます。これらの積み木にはそれぞれ「T」または「F」が書かれており、それは真理値、つまりその文がTrueであるかFalseであるかを表しています。これらの積み木をうまく組み合わせ、自立する構造を作ることで議論を作る、と考えることができます。

1.2 良い議論とは何か

この比喻を続けると、議論が悪くなる理由は二つあります。それは、誤った論理と偽の前提です。これらをそれぞれ「非妥当性」と「非健全性」と呼びます。

- (1) **誤った論理。** 積み木の比喻で言えば、積み木を置く仕方が悪く、その構造が「醜く」、自立しないような場合を想像できます。これは、議論の前提を取り、それらを非論理的または不正確な方法で配置して結論に到達しようとする状況を表しています。このような状況は「妥当でない議論」と呼ばれます。

この例として、「地球は惑星である。したがって、他のすべての惑星は地球である」という議論を考えてみましょう。ここでの論理構造は明らかに誤っています。結論が間違っているだけでなく、この議論の中では「すべてのもの P について、もし P が惑星ならば P は地球である」のようなことを仮定しているように見えます。これは明らかに間違っており、論理の誤用の例です。

- (2) **偽の前提。** 各積み木には小さな「T」または「F」が書かれていることを思い出しましょう。たとえ積み木をきれいに積み上げ、自立する構造を作ったとしても、その小さな積み木のいくつかに「F」が書かれていれば、悪い議論を作ってしまうことがあります。これは、いくつかの文、つまり前提を取り、それらを妥当な形に配置したとしても、その前提のうち一つがたまたま偽であるという状況を表しています。

このような状況を「妥当ではあるが、健全ではない」と呼びます。ここで「健全」とは、そもそも前提が真であるという意味です。妥当ではあるが健全ではない議論の例は次の通りです。

「すべての犬は猫である。私は犬を飼っている。したがって、私は猫も飼っている」。

技術的には、ここでの論理自体は実は問題ありません。この議論は「すべての P は Q である。私は P を持っている。したがって、私は Q を持っている」のようなことを言っています。この議論が「間違っている」理由は、健全ではないからです。「すべての犬は猫である」という前提が単に間違っているため、その結論を真剣に受け取るべきではありません。

議論の健全性は、結論が明らかに偽であることを要求しない、という点に注意してください。原理的には、健全でない議論を用いて、偶然に真の結論を結んでしまうこともあります。たとえば、

「すべての犬は猫である。私は猫を飼っていない。したがって、私は犬を飼っていない」。

実際のところ、私は犬を飼っていません。したがって、もし私がこの議論をしたなら、「私は犬を飼っていない」という結論は、健全でない議論によって到達したにもかかわらず、技術的には真です。

- (3) **良い議論。** ここまでで、「妥当性」は議論が論理を正しく使っているかどうかに関わり、「健全性」は議論が事実を正しく使っているかどうかに関わることを見ました。良く説得力のある議論には、この二つの性質の両方が必要です。つまり、良い議論は、真の前提から出発し、論理を正しく用いる一連の過程でなければなりません。積み木の比喻で言えば、小さな積み木をすべて持っていて、それらをきれいな構造に積み上げ、しかもすべての積み木に「T」と書かれているなら、私たちは良い議論を持っていることになります。つまり、良い議論とは、良い論理、すなわち積み木を正しい仕方でも積み上げることと、良い前提、すなわち仮定として用いる論理文がすべて真であることの混合です。妥当で健全な議論の例は次の通りです。

「すべての犬は動物である。私は犬を飼っている。したがって、私は動物を飼っている」。

この議論は、正しすぎて当たり前に感じられます。まさにそれが、妥当であり健全でもあるからです。

1.3 論理文の例

論理文とは、明確な真理値を持つ文です。実際、私たちが日常生活で使うすべての文がこの性質を持つわけではありません。以下に、論理文の例と非例を挙げます。

- (1) 「いくつかのバラにはとげがある」。これは論理文の例です。実際、これは真です。
- (2) 「私の机の上にオレンジがある」。これは論理文の例です。これは偽です。
- (3) 「私は大谷翔平よりも裕福である」。これは論理文の例です。悲しいことに、これは偽です。
- (4) 「すべてのバラは花である」。これは論理文の例です。これは真です。
- (5) 「水を取ってください」。これは論理文ではありません。真または偽として評価できないからです。実際、これは単なる依頼です。
- (6) 「疲れていますか」。これは論理文ではありません。これは質問です。ここには理解できる「真」や「偽」はありません。
- (7) 「Gpauwibpuaregbiaebg」。これは論理文ではありません。単に意味を持たないからです。

練習問題

次の文について、それが論理文であるかどうかを判定しなさい。

- (1) ドアを閉めてください。
- (2) 宿題の締切は今日ですか。
- (3) 東京は日本にある。
- (4) 2 は3 より大きい。
- (5) 映画は午後3時に始まる。
- (6) 私はいま座っている。
- (7) John は背が高い。

解答

(3), (4), (5), (6) は論理文です。(1), (2) は論理文ではありません。(7) については、誰に聞くかによります。この点について、これから少し詳しく説明します。

1.4 曖昧さについての注意

何かが文であるかどうか非常にはっきりしない場合があります。日常言語は社会的な実践であり、人と人とのコミュニケーションには、多数の非言語的な假定や慣習がしばしば含まれます。そのため、現実世界の言語はしばしば曖昧であり、ある文が実際に真理値を持つかどうかは明確ではありません。もう一度、次の文を考えてみましょう。

「John は背が高い」。

この文には明確な真理値があるように見えるかもしれませんが、必ずしもそれほど簡単ではありません。実際、「背が高い」という語は相対的な語です。たとえば、John は昆虫と比べれば背が高いですが、木と比べれば背が高くありません。この文だけでは、「John は背が高い」という文は、John を何と比較すべきかを実際には指定していません。

もちろん、この段階で「明らかにJohn と他の人間を比較しているのだ」と反論したくなるかもしれませんが、それは文脈に基づいてあなたが行った假定にすぎず、実際には「John は背が高い」という三語の文の中にそのような内容は含まれていません。別の言い方をすれば、他の人間との比較だと期待したのはあなたであり、それは文脈に基づく単なる假定です。より細かいけれどもより正確な解釈は、「John は背が高い」という文は、本物の論理文と見なすには曖昧すぎる、というものです。追加の情報を与えなければ、この文を明確に真または偽として評価することはできません。

曖昧さの問題は、豊かな哲学的主題であり、かなり興味深いものです。一方では、曖昧な文は真でも偽でもないと認めることができます。他方では、曖昧さこそが人間のコミュニケーションの仕方であるとも観察できます。「鳥は飛ぶ」や「John は背が高い」のような文は曖昧ですが、私たちは皆、それが何を意味しているのかを理解しています。

多くの哲学者や言語学者は、曖昧さの問題を論理的な観点から扱おうとしてきました。このような問いは、哲学的論理の一例と見なすことができます。哲学的論理とは、哲学的問題の分析に論理的技法を用いることです。しかし、一般的に言えば、この授業では話を単純にし、曖昧さに関する深い哲学的問題は、今のところ存在しないものとして扱います。

1.5 美容院

次に、もう一つ興味深い論理パズルを紹介します。これは明確で正確に見えるにもかかわらず、明確な真理値を持ちません。

日本の田舎にある小さな村を想像してください。この村には一軒だけ美容院があり、村が小さいので、そこで働いている女性も一人だけです。この女性には自分のための規則があり、それを(R)と呼ぶことにします。

(R): 「私は、自分の髪を自分で切らない女性の髪だけを切る」。

これはかなり合理的に見えます。自分の髪を自分で切る女性は、美容院に行く必要がないからです。しかし、「その女性は自分の髪を切るのか」と問うと、私たちは非常に混乱してしまいます。

二つの状況があります。(1) 彼女は自分の髪を切る、(2) 彼女は自分の髪を切らない、です。状況(1)では、規則(R)によれば、彼女は自分の髪を切らない女性の髪を切るのです、これは彼女が自分の髪を切らないことを意味してしまいます。状況(2)では、彼女は自分の髪を切らないので、その規則を適用して自分の髪を切ることができます。すると私たちは状況(1)に戻り、論理の無限ループに入ります。(1)は(2)を意味し、(2)は(1)を意味し、さらに(1)は(2)を意味し、という具合です。しかし、(1)と(2)は反対の文です。では、どちらが真なのでしょう。

この例では、私たちは論理の中の奇妙な「無限ループ」に出会っています。そこには正確な、つまり曖昧でない文があるにもかかわらず、それを考えようとするたびに、その真理値が真と偽の間で絶えず入れ替わってしまいます。このような状況は「論理的パラドックス」と呼ばれ、かなり混乱を招きます。このようなパラドックスの解決もまた、哲学的論理という学問分野に属します。

実際、私たちの美容院の例は、「床屋のパラドックス」として知られる非常に有名なパラドックスを改変したものです。密接に関連するパラドックスとして、「嘘つきのパラドックス」があります。これは「この文は嘘である」という文をめぐるものです。その文を言うことを想像してみてください。もしあなたがその文を言い、それが真ならば、あなたの発言は真なので、あなたは嘘をついていません。しかし文そのものは、その文が嘘であると言っています。つまり、あなたは嘘をついていることになります。あるいは、「この文は嘘である」と言って、それが偽であるなら、それは「この文は嘘ではない」という意味になります。つまり、あなたは真実を言っていることになります。このように、私たちは真と偽の間を永遠に行き来することになります。これは、気の毒な美容院の従業員の場合とよく似ています。

この授業では、これらのより深い論理的問題を解決しようとはしません。代わりに、話を単純にするため、明確で曖昧でない論理文の例だけを扱います。

2 量子化

2.1 思考実験

全能の神を想像してください。神の前には段ボール箱があります。神は宇宙にあるすべての物を取り出し、それらをすべて自分の前に一列に並べます。そして、一つずつその列を確認し、すべてのギターを段ボール箱の中に入れていきます。この作業の終わりに、神は段ボール箱を閉じ、その外側に「ギター」と書かれたステッカーを貼ります。それから神はその箱を、他の

さまざまな物の段ボール箱の山に置きます。「ピクルス」の箱、「紙」の箱、「数」の箱、などがあるわけです。

また、同じ物が複数の段ボール箱に入ることもあると考えてください。たとえば、私は「イギリス人」と書かれた箱に入るかもしれませんが、「David たち」と書かれた箱にも入り、「人間」と書かれた箱にも入るでしょう。

なぜこの話をしているのでしょうか。なぜなら、ある意味では、もちろんはるかに限定された有限の意味ではありますが、私たち人間はいつも対象を心の中の箱に入れているからです。この過程は認知的分類と呼ばれます。

2.2 認知的分類

私たち人間は、常に対象を識別し、自分たちの判断に従ってそれらを分類しています。これはしばしば瞬間的で無意識の過程であり、十分に高度な生命体にとって基本的な機能です。他の動物、たとえば犬、猫、猿も常にこれを行っています。彼らは、自分が見たものについて判断を下すことで、世界についての内的な理論を作っています。私たち人間の場合、新しい対象に出会うたびに、すぐにそれを心の中で「箱に入れ」、それに何らかの言語的ラベルを割り当てます。

2.3 量子化

量子化とは、分類に関わる論理文の小さな部分です。それは、私たちに箱の中へ入っていき、物が特定のあり方をしているかどうかを確認するよう求める言語の特徴です。量子化を含む論理文の例は次の通りです。

- (1) すべてのギターは楽器である。
- (2) 青いギターが存在する。
- (3) 水でできたギターは存在しない。

これらの文のそれぞれにおいて、私たちは何らかの形で「すべてのギターの箱」を評価し、その文の真理値を決定しています。第一の場合、すべてのギターを一つひとつ確認し、それが楽器であるかどうかを見なければなりません。第二の場合、その箱の中に青いギターの例を見つけようとしなければなりません。第三の場合、すべてのギターを一つひとつ確認し、それが水でできていないことを確かめなければなりません。

通常の言語では、量子化は「すべて、いくつか、存在する、一つもない、あらゆる、ない」などの語です。これらは文の小さな部分であり、あるカテゴリーの中の対象が特定の性質、たとえば水でできていること、を持つかどうかを確認するよう私たちに要求します。

2.4 練習問題（量子子を見つける）

練習問題

次の文に含まれる量子子を見つけなさい。

- (1) すべての人間は、それぞれ固有の指紋を持っている。
- (2) Q で始まるアメリカ合衆国の州は存在しない。
- (3) このクラスの学生の中に、南極を訪れたことがある者はいない。
- (4) 中国には、人口が1000万人を超える都市が18ある。
- (5) この部屋には、Android スマートフォンを持っている人が少なくとも二人いる。

解答

- (1) 「すべて」。(2) 「存在しない」。(3) 「いない」。(4) 「ある」。(5) 「少なくとも二人」。

2.5 量子子を表す他の方法

英語では、同じ量子子を表すために多くの異なる語を使うことができます。量子子の同義語の例をいくつか挙げます。

- (1) All, every, every single
- (2) Some, a few
- (3) There is, there exists
- (4) No, there aren't, there are no, none of

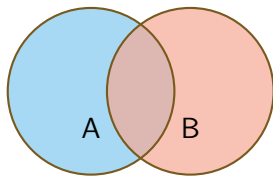
実際には、本当の論理的量子子は二つだけです。それは「すべて」と「存在する」です。他の量子子は、この二つから作ることができます。

2.6 別の表現：ベン図

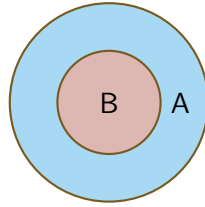
量子子を含む文を表す別の方法は、ベン図を使うことです。段ボール箱を使う代わりに、これは円を使って描かれる図です。対象のカテゴリー、たとえばギター、水でできたもの、青いものなどを円で表します。円の内側にあるものはそのカテゴリーの中にあり、円の外側にあるものはそのカテゴリーの中にはありません。たとえば、地面に輪を描き、すべてのギターをその輪の内側に置き、ギターでないものを輪の外側に残すようなものと想像できます。

これらの円を使って、量子子を含む文を表すことができます。二つの円があり、一方の円がすべての対象Aを表し、もう一方の円がすべての対象Bを表すとします。この二つの円の関係には三つの可能性があります。

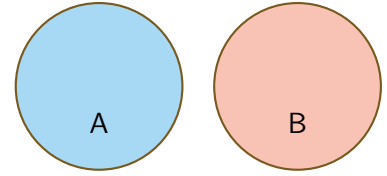
- (a) 二つの円が少し重なっている。この場合、A であり同時にB でもあるものがいくつか存在します。これは「いくつかのA はB でもある」という文を表しています。
- (b) 一方の円が小さく、もう一方の円の中に完全に含まれている。たとえば、B の円がA の円の中に完全に含まれている場合です。この場合、これは「すべてのB はA でもある」という文を表しています。



(a) いくつかのBはAでもある



(b) すべてのBはAでもある

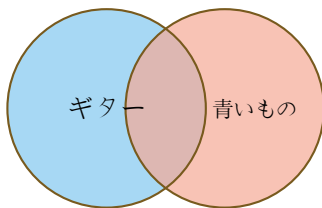


(c) BでありAでもあるものはない

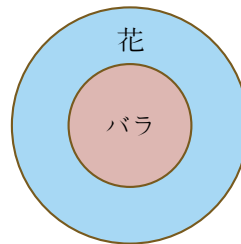
(c) 二つの円が完全に離れている。この場合、これは「BでありAでもあるものはない、AでありBでもあるものもない」という文を表しています。

2.7 ベン図の例

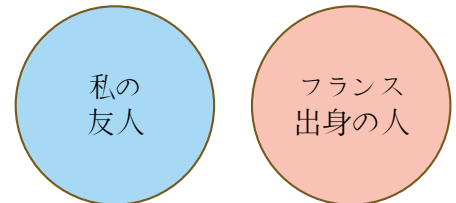
この例として、三つのベン図を示します。



(a) 「いくつかのギターは青い」



(b) 「すべてのバラは花である」



(c) 「私はフランス人の友人を一人も持っていない」

- (1) 二つの円が少し重なっている。カテゴリーA = ギター、カテゴリーB = 青いものとすれば、重なっている二つの円は「青いギターがいくつか存在する」という文を表します。
- (2) 一方の円がもう一方の円に含まれている。カテゴリーA = バラ、カテゴリーB = 花とすれば、Aの円がBの円に含まれていることは、「すべてのバラは花である」という文を表します。
- (3) 二つの円が完全に離れている。カテゴリーA = 私の友人、カテゴリーB = フランス人とすれば、二つの円が離れていることは、「私はフランス人の友人を一人も持っていない」という文を表します。

3 結合子

3.1 結合子とは何か

結合子とは、二つの論理文を取り、それらを組み合わせて新しい論理文を作る方法です。つまり、二つの文を何らかの仕方で「結合」するものです。新しく作られたものも論理文なので、それは真理値を持ちます。すなわち、それは真または偽です。そして、その真理値の正確な性質は、出発点となる文をどのように結合したかに依存します。これは少し混乱するように聞こえるかもしれませんが、結合子の例を見ると実際にはかなり簡単になります。実のところ、私たちは日常生活の中で、意識しないまま常に結合子を使っています。別の言い方をすれば、論理文と論理結合子は日常生活においてあまりに明らかで一般的なので、私たちはそれらを当然のものとして受け取っています。

これから、論理文を組み合わせて新しい論理文を作る五つの基本的な方法を学びます。これら

は基本的なものであり、論理文の他のどんな巧妙な組み合わせも、常にこの五つの基本的な技法によって記述することができます。実は、こっそり言えば、必要な結合子は二つだけです。五種類の結合子は、否定、連言、選言、含意、同値です。ふつうの英語で理解するなら、これらの難しそうな語は次のように考えるとよいです。

- (1) Negation = Not
- (2) Conjunction = And
- (3) Disjunction = Or
- (4) Implication = If ... then ...
- (5) Equivalence = ... if and only if ...

3.2 否定

否定を考える最も簡単な方法は、日常言語の「ではない」を意味するものだと考えることです。否定は一つの論理文を取り、「...ではない」という意味の新しい文を作ります。元の文が真なら、否定された文は偽になり、元の文が偽なら、否定された文は真になります。つまり、否定は出発点の文の真理値を単に反転させます。

たとえば、「外は雨が降っている」という文の否定は、「外は雨が降っていない」です。

否定を考えるもう一つの方法は、前の文に対する即座の反論のようなものだと考えることです。もし私が「今朝、朝食前に100万ドル稼いだ」と言ったなら、明らかな返答は「いいえ、稼いでいません」です。後者の文は否定です。実際には、「いいえ、あなたは今朝、朝食前に100万ドルを稼いでいません」と言っているのです。否定とはこれだけのことです。ある文の否定とは、反対の真理値を持つ文です。

3.3 連言

連言を考える最も簡単な方法は、日常言語の「かつ」や「そして」を意味するものだと考えることです。連言は二つの論理文を組み合わせ、「文1かつ文2」という意味の一つの大きな文を作ります。連言は、二つの個別の文がどちらも真であるときにのみ真です。したがって、二つの文のうち一方が偽なら、または両方が偽なら、連言は偽です。なぜでしょうか。連言は単に「かつ」を意味し、それ自体が「同時に両方」を意味するからです。

たとえば、文1が「私は今朝コーヒーを飲んだ」であり、文2が「私は今朝オートミールを食べた」であるとします。この二つの文の連言は「私は今朝コーヒーを飲み、オートミールを食べた」です。この連言が真であり得るのは、実際に私がその二つのことを両方とも行った場合だけです。もし私がコーヒーを飲んでいなかった、またはオートミールを食べていなかったなら、「私は今朝コーヒーを飲み、オートミールを食べた」という連言は偽になります。

念のため説明すると、英語の“conjunction”という語は“conjoined”という語に非常によく似ています。“conjoined”は、双子の赤ちゃんが母胎内でつながっている非常にまれな状況についてよく使われる語です。ここで接頭辞“con”は「一緒に」や「ともに」を意味するので、“conjoined”は単に「結合された」という意味です。連言とはそれだけのことです。二つの論理文を取り、それらの真理値を「一緒に結合して」評価するのです。

3.4 選言

選言を考える最も簡単な方法は、日常言語の「または」を意味するものだと考えることです。選言は二つの論理文を組み合わせ、「文1または文2」という意味の一つの大きな文を作ります。論理では、「または」はふつう包括的です。つまり、両方が真であってもよいという意味です。別の言い方をすれば、選言は少なくとも一方の文が真であるときに真です。両方が真の場合も含まれます。逆に、選言が偽になるのは、両方の文が偽であるときだけです。

たとえば、文1が「John はカフェにいる」であり、文2が「John は東京にいる」であるとします。この二つの文の選言は「John はカフェにいる、または東京にいる」です。この選言は三つの状況で真です。John が東京の外のカフェにいる場合、John が東京にいるがカフェにはいない場合、またはその両方、つまりJohn が東京のどこかのカフェにいる場合です。この文が偽であり得るのは、John がカフェにも東京にもいない場合だけです。

接頭辞“dis”は「離れて」または「分離して」という意味です。たとえば“discard”という語は「カードを捨てる」という意味で、古いカードゲームに由来します。多くのカードゲームでは、自分の手札として多くのカードを持っています。つまり、それらはあなたの直接の管理下にあるカードです。ゲームによっては、手札から何らかのカードを「捨てる」ことが求められます。つまり、手札の残りから一枚のカードを分離することで“discard”するのです。この意味で、“dis”は「離れて」を意味します。“disjunction”という語に戻ると、それは「結合されているが、離れている」のような意味を持つことが分かります。実際、これは選言の真理値を見つける方法を非常によく表しています。出発点の二つの文の真理値を別々に考え、そのうちどちらか一方が真であれば、選言は真になるのです。

3.5 練習問題（否定、連言、選言）

練習問題

他の結合子に進む前に、簡単な練習を行います。ここで二つの文を考えます。文1は「John は月にいる」、文2は「John は東京にいる」です。

- (1) 文1を否定しなさい。
- (2) 文2を否定しなさい。
- (3) 文1と(1)の答えの連言を作りなさい。あなたの新しい文は真ですか、偽ですか。
- (4) 文2と(2)の答えの選言を作りなさい。あなたの新しい文は真ですか、偽ですか。

解答

- (1) John は現在、月にいない。
- (2) John は現在、東京にいない。
- (3) John は現在、月にいて、かつJohn は現在、月にいない。（偽）
- (4) John は現在、東京にいる、または現在、東京にいない。（真）

3.6 含意

含意を考える最も良い方法は、日常言語の「もし...ならば...」という文だと考えることです。含意は二つの論理文を組み合わせ、「もし文1が真ならば、文2が真である」という意味の一つ

の大きな文を作ります。含意が偽になるのは一つの場合だけです。すなわち、文1が真であるのに文2が偽である場合です。それ以外の場合、含意は真です。

これを考える良い方法は、含意を条件付きの規則、または約束と考えることです。その規則や約束は、第一の部分が起こったのに第二の部分が起こらないときにちょうど破られます。空港の保安検査を想像すると分かりやすいかもしれません。保安ゲートを通るとき、職員は「ノートパソコンを持っているなら、それをかばんから出して別のトレイに置いてください」と言い、その後で通過を許可します。これは含意です。あなたがノートパソコンを持っているかどうかに応じて適用する必要があるかもしれない規則です。職員があなたをゲートに通さない唯一の状況は、あなたがその規則に違反する場合です。つまり、かばんの中にノートパソコンを持っているのに、それを取り出さない場合です。

別の例として、文1を「あなたは20歳を超えている」、文2を「あなたはコンビニでビールを買うことができる」とします。文1から文2への含意は、「もしあなたが20歳を超えているなら、あなたはコンビニでビールを買うことができる」となります。この文が偽になるのは、文1が真であるのに文2が偽である場合だけです。つまり、あなたが20歳を超えているのに、何らかの理由でコンビニでビールを買うことができない場合です。

3.7 同値

同値を考える最も良い方法は、日常言語の「そのとき、かつそのときに限る」を意味するものだと考えることです。同値は二つの論理文を組み合わせ、「文1が真であるのは、ちょうど文2が真であるときである」という意味の一つの大きな文を作ります。同値は、二つの文が同じ真理値を持つとき、つまり両方とも真であるか、両方とも偽であるときに真です。同値は、それらが異なるとき、つまり一方が真で他方が偽であるときに偽です。同値は双方向のつながりを表します。それぞれの文が他方を保証するのです。

たとえば、文1が「私はあなたが好きである」であり、文2が「あなたはフランス出身ではない」であるとします。この二つの文から作られる同値は「私があなたを好きであるのは、あなたがフランス出身ではないとき、かつそのときに限る」となります。この文は、私がフランス人を好きであるような状況、または私が好きではない非フランス人がいるような状況があれば偽になります。

3.8 練習問題（含意と同値）

練習問題

前の練習問題の二つの文を考えます。つまり、文1は「John は現在、月にいる」であり、文2は「John は現在、東京にいる」です。

- (1) 文1から文2の否定への含意を表す文を作りなさい。これは真ですか、偽ですか。
- (2) 文1と文2の間の同値を表す文を作りなさい。

解答

- (1) もしJohn が現在、月にいるならば、John は現在、東京にいない。（これは真です。）
- (2) John が現在、月にいるのは、彼が現在、東京にいるとき、かつそのときに限る。