MAT120：论证　第3讲讲义

形式逻辑

如果有一个电脑程序，可以把论证输入进去，然后输出某种"是或否"的答案，告诉我们这个论证是否有效，那就很好了。事实上，这其实是可能的，而且它就叫作你的大脑！在本讲中，我们将介绍这个电脑程序的最简单版本，也就是所谓的真值表。我们要做的是把上一讲的想法和概念拿过来，并给所有东西附上符号，从而看看我们如何"计算"论证，以检查它们是否有效。

1 逻辑

1.1 一个动机

考虑下面三个例子：

- “如果昨晚下雨了，那么今天早上地面就会是湿的。但是今天早上地面不是湿的。因此，昨晚不可能下过雨。”
- “如果Jimmy 喝咖啡，那么他会变得非常兴奋。但是他现在看起来相当平静，所以他不可能喝过咖啡。”
- “如果我的包裹已经送达，那么我的邮箱里应该会有一张投递通知单。我的邮箱里没有通知单，所以我的包裹一定还没有送达。”

这三个陈述谈论的是不同的事情。但与此同时，它们在某种意义上又是相同的。它们都在说类似于“如果p 那么q。但是非q，所以因此非p”这样的东西。

事实上，它们都是某条底层逻辑规律的例子！这条特定规律叫作否定后件式。许多逻辑规律都有很华丽的拉丁语或希腊语名字，因为它们是在古代由亚里士多德这样的人（以及其他人）发现的。否定后件式的表述如下。

否定后件式

从“p 蕴含q”和“非q”，我们可以推出“非p”。

逻辑中有各种各样有趣的规律。在这门课中，我们会保持简单，只介绍其中三条。不过，值得注意的是，你其实已经知道其他所有逻辑规律。你每天在思考事情和理解世界时都在使用它们。逻辑与推理是我们这个物种的根本能力；当你与世界互动时，你无法不对世界进行推理。下面是我们在这门课中会关心的三条逻辑规律：

- **否定后件式：** 从“p 蕴含q”和“非q”，我们可以推出“非p”。
- **肯定前件式：** 从“p 蕴含q”和“p”，我们可以推出“q”。
- **假言三段论：** 从“p 蕴含q”和“q 蕴含r”，我们可以推出“p 蕴含r”。

现在，考虑到这一点，什么是“逻辑”？事实上，最好的理解方式是：逻辑是一种语言！把逻辑当作一种语言，可以让我们：

- 一般性地表达逻辑陈述，而不需要使用具体例子。
- 描述所使用的推理的“结构”。
- 检查推理是否有效。

1.2 什么是语言？

在介绍细节之前，我们必须先问：如果逻辑是一种语言，那么语言到底是什么？语言的精确定义和特征有些复杂，但也非常深刻并且有启发性。我们会把讨论简化到最重要的事实：任何语言都是某种有意义事物的符号表示。这意味着，一种语言是一个“符号集合”，并且具有：

- 一组规则，说明如何把符号组合成新的“好的”组合；
- 附着在这些符号上的解释或意义。

这有点抽象和令人困惑，所以让我们以英语为例。在英语中，我们有一个符号集合：a, b, c, d, ...，以及括号、撇号、引号等等标点符号。无论你是否注意到，都存在一大套规则，规定如何把这些符号组合成新的"好的"符号组合。例如，我们知道在英语中"tree" 是一个词，因为它以正确的方式组合了符号t, r, e 和e。然而，我们也知道"eert" 不是一个词，因为它以错误的方式组合了符号t, r, e 和e。这说明了上面的第一点。除了知道某个东西是一个好的符号组合之外，我们还会给符号以解释："tree" 也有意义（这些符号表示公园或森林里的那种大型木质东西）。

我们再选一个例子：在日语中，我们有一个符号集合：平假名、片假名和汉字。我们知道这些符号可以组合成新的词，但只能以"正确"的方式组合。同样，这里也存在解释：符号き 与英语词"tree" 有相同的解释。事实上，这正是语言之间的翻译在做的事情：我们把一种语言中的符号换成另一种语言中的符号，同时不改变这些符号的解释。有趣的是，在日语中，解释这个想法甚至更加清楚：日语中有多个不同符号可以具有相同的解释。例如，这就是き 和木 之间的区别。

英语或日语这样的例子自然地出现在现实世界中。因此，我们称它们为自然语言。逻辑是一种不同风格的语言：它是人为的，是由亚里士多德这样聪明的人创造出来的，目的是为了更好地理解推理规律。

1.3 逻辑看起来是什么样的?

记住语言的两个组成部分（符号和解释），为了定义"逻辑"，我们需要指定一个符号集合以及这些符号的解释。细节如下：

- 符号p, q, r, ...，表示逻辑陈述。
- 表示逻辑连接词的符号，如下所列：
  - 否定：$\neg$
  - 合取：$\wedge$
  - 析取：$\vee$
  - 蕴含：$\rightarrow$
  - 等价：$\leftrightarrow$
- 符号(和)，也就是普通括号。

一个公式是任何可以从符号$p, q, r, \cdots$ 出发，使用连接词$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 和括号，并按照预期规则构造出来的表达式。例如，公式可以长得像：p, $\neg q$, $(p \vee r) \rightarrow q$ 等等；而像$p \wedge \rightarrow r \vee$ 或$\vee pq \neg r$ 这样的组合就不是公式。

这种语言叫作命题逻辑，因为"命题"这个词只是逻辑陈述的另一个名称。所以，我上面列出的这套符号语言，就是逻辑陈述的语言（事实上，它是这种语言的最简单版本）。

在英语或日语这样的自然语言中，我们使用的符号有解释，也就是说，页面上的符号指向现实世界中的某个对象或概念。在命题逻辑中，所谓的"现实世界对象"基本上不再存在。相反，符号p, q, r, ... 只有两种可能的解释：它们要么为真（T），要么为假（F）。这就是为什么我们只考虑p, q, r, ... 这些逻辑陈述，因为我们感兴趣的是研究它们可能的真值。

使用命题逻辑，我们可以把句子翻译成数学：

- "非p" 变成$\neg p$
- "p 并且q" 变成$p \wedge q$
- "p 或者q" 变成$p \vee q$
- "如果p 那么q" 变成$p \rightarrow q$

- “p 当且仅当q” 变成$p \leftrightarrow q$

括号(和) 用来告诉我们计算的顺序：我们先处理括号里的运算，然后再看括号外的运算。

1.4 例子

为了看看如何使用所有这些符号，我们现在练习把普通英语翻译成命题逻辑的语言。

令$p =$ “我养了一只狗”，$q =$ “我养了一只猫”。我会把下面的陈述翻译成命题逻辑：

- 如果我养了一只狗，那么我养了一只猫。
  答： $p \to q$
- 如果我养了一只猫，那么我养了一只狗。
  答： $q \to p$
- 我养了一只狗和一只猫。
  答： $p \wedge q$
- 我没有养狗，但我养了一只猫。
  答： $(\neg p) \wedge q$

在最后一个例子中，我们写括号，是因为写成$\neg(p \wedge q)$ 表示的是不同的东西（也就是说，它代表一个不同的论证）。

1.5 练习

练习

令$p =$ “我穿着凉鞋”，$q =$ “我在海滩”。把下面的陈述转换成命题逻辑：

- 我在海滩，或者我穿着凉鞋。
  答：
- 如果我在海滩，那么我穿着凉鞋。
  答：
- 我不在海滩，并且我没有穿凉鞋。
  答：
- 我在海滩，当且仅当我穿着凉鞋。
  答：

1.6 用命题逻辑表达否定后件式

暂时回到否定后件式。回忆一下下面这个论证：

> “如果昨晚下雨了，那么今天早上地面就会是湿的。但是今天早上地面不是湿的。因此，昨晚不可能下过雨。”

如果我们令$p =$ “昨晚下雨了”，$q =$ “今天早上地面是湿的”，那么这个论证可以重新表述为类似于“我们可以使用两个陈述$(p \to q)$ 和$\neg q$ 推出$\neg p$ 也成立”。更准确地说，用符号表示就是公式

$$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$$

无论p 和q 表示什么，也无论它们是真是假，永远都是真的。特别地，这条一般性的“逻辑规律”也适用于上面关于雨水的论证。很酷，对吧！

2 真值表

现在我们讨论这份讲义开头提到的那个“电脑程序”。简而言之，确实存在一种算法，可以用来检查一个论证是否有效。这个算法接受一个用命题逻辑写成的公式，然后通过遍历其变量$p, q, r, \ldots$ 的所有可能真值来评估它，并检查这些真值会使整体公式为真还是为假。整个“检查”过程可以一次性展示在一种叫作真值表的东西中。现在我们来总结它。我们从一个好用的类比开始。

2.1 一个使用鸟居的类比

假装你和你的朋友正在乡间散步。

2.1.1 红色鸟居

在散步途中，你们发现了一座涂成红色的鸟居。门口站着一个奇怪的男人。他对你们说：“站住！我是这座门的守门人。除非你们通过我的测试，否则我不会让你们过去。” 你和朋友回答说：“好吧，当然！” 然后这个男人说：

> “前方道路危险。除非你们有地图和指南针，否则我不会让你们通过这座门。”

你不记得包里有没有地图和指南针，所以你需要检查。在检查包之前，让我们先想想可能的情况。事情只有四种可能：

情况1: 你没有地图，也没有指南针；
情况2: 你没有地图，但你有指南针；
情况3: 你有地图，但你没有指南针；
情况4: 你既有地图，也有指南针。

根据这个奇怪男人所说，为了通过他的测试，你需要同时向他出示地图和指南针。所以，在四种可能情况中，只有一种情况可以通过测试，也就是情况4。

幸运的是，你检查了包，成功了！你正好找到了地图和指南针。所以，这个奇怪男人让你们通过，你们继续散步。

2.1.2 木制鸟居

你和朋友继续愉快地在乡间散步。途中你们发现了第二座鸟居。这座门和第一座不同，现在它是木头做的，所以看起来是棕色而且很自然。令人惊讶的是，你们又发现另一个奇怪的男人站在门口！这个男人说："站住！我是这座门的守门人。除非你们通过我的测试，否则我不会让你们过去。"你和朋友又回答说："好吧，当然！"这个奇怪男人说：

> "天很快就要黑了。如果你们有手机或手电筒（或者两者都有），我才会让你们通过。"

你又说"呃......"，然后开始检查包。同样，按照之前的推理，只有四种可能情况：

情况1: 你没有手机，也没有手电筒；
情况2: 你没有手机，但你有手电筒；
情况3: 你有手机，但你没有手电筒；
情况4: 你既有手机，也有手电筒。

根据他说的话，这个奇怪男人要求你们要么有手机，要么有手电筒，要么两者都有。因此，现在有三种可能情况可以通过测试：情况2、3 和4 都可以。他只会在情况1 阻止你们通过，也就是当你们既没有手机也没有手电筒时。

总之，你检查包后找到了一支手电筒。于是这个奇怪男人说"太好了！"，并让你们通过。

2.1.3 石制鸟居

你和朋友继续走，发现了第三座鸟居！这一座和前两座不同：它不是涂漆的，也不是木制的，而是由石头做成的。所以，它看起来坚硬而不通融。正如你可能预料到的，石鸟居前站着第三个奇怪男人。他对你们说："站住！我是这座门的守门人。除非你们通过我的测试，否则我不会让你们过去。" 到这时，你和朋友已经开始觉得这件事相当好笑了。总之，你们都回答说"好吧，当然！"，然后那个男人说：

> "你们即将进入野生动物保护区。如果你们带着相机，那么你们需要提供摄影许可才能进入。"

同样，按照之前的推理，只有四种可能情况：

情况1: 你没有相机，也没有摄影许可；
情况2: 你没有相机，但你有摄影许可；
情况3: 你有相机，但你没有摄影许可；
情况4: 你既有相机，也有摄影许可。

根据第三个奇怪男人的规则，只有当他发现你有相机但没有摄影许可时，他才会阻止你。在情况1 和情况2 中，你没有相机，所以这个奇怪男人不在乎你有没有摄影许可。在情况4 中，你既有相机也有摄影许可，所以一切都没问题。然而，在情况3 中，你明确违反了这个奇怪男人的规则：你有相机，但你没有许可。所以，情况3 是唯一会让你测试失败的情况。

2.2 定义真值表

根据定义，逻辑陈述总是有一个真值，要么真，要么假。所以，如果我们选取两个这样的陈述p和q，事情只有四种可能：

- 情况1：p 为假，q 为假
- 情况2：p 为假，q 为真
- 情况3：p 为真，q 为假
- 情况4：p 为真，q 为真

注意这里的四种情况和前面的例子之间的相似性：它们基本上是同一件事！这一次，我们不再像前面那样写出"情况1，情况2，情况3，情况4"，而是把所有内容写进一张表格中，以整洁的视觉形式展示所有信息。我们令"T" 表示"真"，"F" 表示"假"。"真值表"只是一种把所有可能情况写进表格的方法，如下所示。

情况	p	q
1	F	F
2	F	T
3	T	F
4	T	T

2.3 连接词的真值表

三个二元连接词$\wedge$, $\vee$ 和$\rightarrow$ 就是前面的三座鸟居！我会一个一个把它们写出来。

2.3.1 合取

合取的真值表看起来像红色鸟居。$p \wedge q$ 的合取真值表，是通过在前面的表格中增加一列来写出的：

情况	地图?	指南针?	
1	没有	没有	没有
2	没有	有	没有
3	有	没有	没有
4	有	有	有

$\xrightarrow[\text{“有”=T}]{\text{“没有”=F}}$

情况	p	q	$p \wedge q$
1	F	F	F
2	F	T	F
3	T	F	F
4	T	T	T

如果我们令$p =$ “我们有地图”，$q =$ “我们有指南针”，那么例子中的四种情况会直接对应到这个真值表：“通过奇怪男人的测试”对应真值表中的输出“真”，而“没有通过奇怪男人的测试”对应输出“假”。合取只有在两个陈述都为真时才可能为真。

2.3.2 析取

析取的真值表看起来像木制鸟居。真值表如下。

情况	手机?	手电筒?	
1	没有	没有	没有
2	没有	有	有
3	有	没有	有
4	有	有	有

$\xrightarrow[\text{“有”=T}]{\text{“没有”=F}}$

情况	p	q	$p \vee q$
1	F	F	F
2	F	T	T
3	T	F	T
4	T	T	T

这张表告诉我们，析取有三种可能方式可以为真：两个陈述中任意一个为真即可（或者两个都为真）。换句话说，析取为假的唯一方式，是两个陈述同时为假。

2.3.3 蕴含

蕴含的真值表看起来像石制鸟居。它写成如下形式。

情况	相机?	许可?	
1	没有	没有	有
2	没有	有	有
3	有	没有	没有
4	有	有	有

$\xrightarrow[\text{“有”=T}]{\text{“没有”=F}}$

情况	p	q	$p \to q$
1	F	F	T
2	F	T	T
3	T	F	F
4	T	T	T

这个情况就像前面的石制鸟居：$p =$ “我们有相机”，$q =$ “我们有摄影许可”。那么，蕴含失败的情况只有一种，也就是p 为真而q 为假（这对应于我们有相机但没有许可）。

2.4 计算其他公式的真值表

如前所述，我们可以使用逻辑连接词，从较小的公式构造出更复杂的公式。评估这些复杂公式真值的关键，是把它们拆成我们已经知道如何处理的小部分。

作为例子，我们考虑前面提到的否定后件式公式：$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$。为了写出公式$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$ 的真值表，我们首先必须使用括号(和) 把公式“拆解”成较小的部分。从这个公式可以看出，它有四个较小部分：

- 第1 部分：公式$(p \to q)$
- 第2 部分：公式$\neg q$
- 第3 部分：公式$(p \to q) \land \neg q$
- 第4 部分：公式$\neg p$

这些部分组合起来给出最终公式$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$。为了建立这个公式的真值表，我们先把这些子公式分别写成不同的列。为了更好地解释方法，列被编号。

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$
F	F					
F	T					
T	F					
T	T					

现在从这里开始，我们使用连接词$\land$, $\lor$, $\to$ 的真值表，以及否定$\neg$ 来填写每一列。否定$\neg$ 只是把其输入的真值反过来。从左往右，我们一列一列填写：

- **列(C1)**： 我们试图评估一个蕴含，也就是$p \to q$。根据蕴含的真值表（第2.1.3 节和第2.3.3 节中的石制鸟居），蕴含$p \to q$ 只会在p 为真且q 为假时为假。所以，列(C1) 会读作“T T F T”：

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T				
F	T	T				
T	F	F				
T	T	T				

- **列(C2)**： 我们试图评估一个否定，也就是$\neg q$。否定只是翻转输入的真值。在这里，q 那一列的真值是“F T F T”。所以否定只是把这些值反过来，使这一列变成“T F T F”：

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \land \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T	T			
F	T	T	F			
T	F	F	T			
T	T	T	F			

- **列(C3)**： 我们试图评估一个合取，也就是$(p \to q) \wedge \neg q$。合取只有在两个输入都为真时才为真。在这里，这意味着我们需要$p \to q$ 和$\neg q$ 都为真。列(C1) 和(C2) 分别包含$p \to q$ 和$\neg q$ 的所有真值。所以，我们只需要查看(C1) 和(C2)，并寻找二者都为T 的行。检查后可以看到，第1 行中$p \to q$ 和$\neg q$ 都为真，而第2、3、4 行中这两个陈述至少有一个为假。因此，第1 行是唯一会使合取$(p \to q) \wedge \neg q$ 为真的情况。在其他所有情况下，它都会为假。我们写出这一列：

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T	T	T		
F	T	T	F	F		
T	F	F	T	F		
T	T	T	F	F		

- **列(C4)**： 这里我们再次取一个简单否定，也就是$\neg p$。这个情况类似于列(C2)，只不过这里我们是否定p 而不是q。所以，我们看p 那一列，发现它读作“F F T T”，然后把所有内容反过来。因此，列(C4) 会读作“T T F F”：

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T	T	T	T	
F	T	T	F	F	T	
T	F	F	T	F	F	
T	T	T	F	F	F	

- **列(C5)**： 最后，我们考虑蕴含$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$。类似于(C1)，我们使用第2.1.3 节和第2.3.3 节中的石制鸟居例子。再次强调，蕴含为假的唯一情况，是第一个陈述为真而第二个陈述为假。在公式$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$ 中，第一个陈述是$\big((p \to q) \wedge \neg q\big)$，第二个公式是$\neg p$。所以，为了评估蕴含符号“$\to$”，我们需要查看列(C3) 和(C4) 中列出的真值。我们要寻找表中某一行，使得列(C3) 为真而列(C4) 为假，因为这会使连接词“$\to$” 也为假。然而，在这个例子中，我们看到四行中没有任何情况满足(C3) 为T 且(C4) 为F。所以，不存在使蕴含“$\to$” 为假的情况。因此，每个条目都是T，这就完成了表格：

p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

例如，我们可以把公式$(p \vee q) \to (p \wedge q)$ 拆成较小的部分$p \vee q$ 和$p \wedge q$，然后这两个部分再由蕴含$\to$ 连接起来。因此，为了构造这个公式的真值表，我们看到蕴含是最后发生的，而两个子公式$p \vee q$ 和$p \wedge q$ 需要先被评估。

2.5 真值表的用途

1. 真值表可以告诉我们一个公式是否是逻辑规律。
2. 真值表可以告诉我们哪些p 和q 的取值会使一个公式为真（或为假）。

3. 真值表可以告诉我们两个公式是否暗中是同一个东西（也就是说，它们是否表示同一个意思）。

现在我们会分别讨论这三个主题。在此过程中，我还会提供一些例子，告诉你如何计算给定公式的真值表。

2.5.1 识别重言式

考虑陈述"如果昨晚下雨了，那么今天早上地面就会是湿的。但是今天早上地面不是湿的。因此，昨晚不可能下过雨"。根据我们前面的讨论，我们知道这是一个否定后件式的例子，而我已经说过它是一条逻辑规律。事实上，这些逻辑规律有一个特殊名称：它们叫作"重言式"。这个词来自一个华丽的希腊词，意思是"再次说同一件事"。

我们可以通过检查其真值表来看到否定后件式是一条逻辑规律。在第2.4 节中，我们计算了否定后件式的真值表。再看看最后一列。

p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

如你所见，最后一列中的每个条目都为真。这意味着公式$\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \to \neg p$ 无论如何都是真的。换句话说，它是一个重言式。一般来说，当一个公式的真值表最后一列全是T 时，这个公式就是重言式。

2.5.2 识别假公式

想象某人给出一个糟糕的推理："如果我有一只狗，那么我有一只动物。我有一只动物，因此我有一只狗"，其逻辑公式为$\big((p \to q) \wedge q\big) \to p$。这个论证显然很糟糕，而我们可以用真值表来展示这一点。

这个公式的完整真值表如下。请注意最后一列中的值。

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge q$	$\big((p \to q) \wedge q\big) \to p$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

注意，在第二行中，最后一列有一个F。这意味着存在某种情况，使公式$\big((p \to q) \wedge q\big) \to p$ 为假。回到那一行的开头，我们看到，当p 为假而q 为真时，公式为假。
我们可以把这翻译回英语。这个论证说："如果我有一只狗，那么我有一只动物。我有一只动物，因此我有一只狗"，其中$p =$ "我有一只狗"，$q =$ "我有一只动物"。根据我们的真值表，当q 为真但p 为假时，这个论证为假。翻译成英语，这种情况是在说，只要"我有一只动物但我没有狗"，整

体论证就是假的。这完全说得通！仅仅因为你有一只动物，并不意味着你有一只狗。例如，你可能有一只猫，这会使q 为真而p 为假。所以，我们已经成功地使用真值表找出了这个论证崩溃的地方。

2.5.3 识别等价

作为真值表的第三个也是最后一个用途，我们将测试两个公式实际上是否相同。考虑两个公式$\neg p \vee q$ 和$p \to q$。现在我会展示它们表示同一件事，也就是说，它们对p 和q 具有相同的作用。让我们看$\neg p \vee q$ 的真值表。

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	F	T

在上表中，$\neg p \vee q$ 在第1、2、4 行为真，在第3 行为假。然而，这恰好就是蕴含$p \to q$ 的真值表！因此，我们可以得出结论：这两个公式对p 和q 做的是同一件事。换句话说：真值表刚刚向我们展示了，公式$\neg p \vee q$ 和$p \to q$ 实际上是等价的（也就是相同的）。

2.6 练习

练习

我们要检查两个公式$\neg(p \wedge q)$ 和$(\neg p) \vee (\neg q)$ 是否等价。为此，我们需要计算两个真值表：一个是$\neg(p \wedge q)$ 的真值表，另一个是$(\neg p) \vee (\neg q)$ 的真值表，然后比较它们。填写下面两个真值表。这里是$\neg(p \wedge q)$ 的真值表，其中空格处留给你填写。请把空格替换成T 或F。

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
F	F		
F	T		
T	F		
T	T		

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

根据你在两个真值表中的答案，判断公式$\neg(p \wedge q)$ 和$(\neg p) \vee (\neg q)$ 是否相同。
答：

2.7 如何计算真值表的进一步说明

作为第2.4 节的补充，我现在会更详细地解释如何计算真值表。我们的例子是公式$(\neg p) \wedge (\neg q)$。为了写出这个公式的真值表，我们需要首先识别子公式，也就是组成整体公式$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 的较小逻辑陈述。根据括号的排列方式，我们看到这里只有两个较小部分：

- 第1 部分：子公式$\neg p$，
- 第2 部分：子公式$\neg q$。

然后，这两个部分通过合取组合成整体公式$(\neg p) \wedge (\neg q)$。所以，为了弄清楚这个合取在做什么，我们需要先理解$\neg p$ 和$\neg q$ 是如何表现的。因此，真值表会长这样：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F			
F	T			
T	F			
T	T			

如果我们先填写表格中对应否定的部分，那么就可以利用这些答案来计算$\wedge$ 的部分。

由于否定一个陈述总是翻转真值，所以我们可以很容易地填写真值表的前两列。为了完成$\neg p$ 那一列，我们只需要看p 那一列，检查每一行中的T 或F，然后在$\neg p$ 那一列中写出相反的值。从第1 行往下读，p 那一列是“F F T T”。$\neg p$ 那一列会翻转这些值，所以它会读作“T T F F”。

完全相同的推理适用于$\neg q$。我们再次只需要查看与q 相关的那一列中的值，然后在$\neg q$ 那一列中写出相反的值。往下读q 那一列，我们看到它是“F T F T”。把这些全部反过来，$\neg q$ 那一列会读作“T F T F”。

我们的真值表现在已经部分完成：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	
F	T	T	F	
T	F	F	T	
T	T	F	F	

剩下的就是评估最后一列。这里的关键点是识别正在使用哪个连接词。在这个例子中，我们试图弄清楚公式$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 中的合取在做什么。关键是，我们现在必须记住合取的真值表是什么样的。

回看第2.3.1 节，我们看到两个陈述的合取只有在这两个陈述本身都为真时才为真。换句话说，如果两个陈述中有一个为假，那么合取就是假。也许最令人困惑的部分是，第2.3.1 节中的真值表看起来和我们现在这里的表并不完全一样。但那是因为我们现在考虑的是两个不同东西的合取：我们现在不关心$p \wedge q$，而是关心$(\neg p) \wedge (\neg q)$。在我们的真值表中，我们应该看的是这两列：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T $\longrightarrow$	?
F	T	T	F $\longrightarrow$	?
T	F	F	T $\longrightarrow$	?
T	T	F	F $\longrightarrow$	?

对于第1 行，我们看到$\neg p$ 为真，并且$\neg q$ 也为真。这对应于第2.3.1 节真值表中的第4 行，也就是说，这正是使合取$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为真的条件。所以，最后一列的第一行会是“T”。合取$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为

真的唯一方式，是$(\neg p)$ 和$(\neg q)$ 二者都为真。我们看到，在第2、3、4 行中，$(\neg p)$ 和$(\neg q)$ 的列中总是至少有一个“F”。所以，在这3 种情况下，合取都会为假。因此，公式$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 的那一列会读作“T F F F”：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	F	F	F