

MAT120：数量的推論 第3講ハンドアウト

形式論理

議論を入力すると、その議論が妥当かどうかについて何らかの「はい/いいえ」の答えを出してくれるコンピュータ・プログラムがあれば便利でしょう。実のところ、これは実際に可能です。そして、それはあなたの脳と呼ばれます。この講義では、このコンピュータ・プログラムの最も単純な版、いわゆる真理値表を紹介します。ここで言うことは、前回の講義で扱った考えや概念を取り上げ、それらすべてに記号を付けることです。そうすることで、議論が妥当かどうかを確かめるために、議論をどのように「計算」できるかを見ることがになります。

1 論理

1.1 動機づけ

次の三つの例を考えてみましょう。

- 「昨晚雨が降ったなら、今朝地面は濡れているはずですが、今朝地面は濡れていません。したがって、昨晚雨が降ったはずはありません。」
- 「Jimmy がコーヒーを飲むと、とても興奮します。しかし、彼はいまかなり落ち着いているように見えます。だから、彼はコーヒーを飲んでいないはずですが。」
- 「私の荷物が配達されていたなら、郵便受けに配達票が入っているはずですが、郵便受けに配達票はありません。だから、私の荷物は配達されていないに違いありません。」

この三つの文は、それぞれ異なることについて話しています。しかし同時に、何らかの意味で同じです。どれも「もし p ならば q 。しかし q ではない。したがって p ではない」のようなことを述べています。

実際、これらはすべて、根底にある論理法則の例です。この特定の法則はモーダス・トレンスと呼ばれます。多くの論理法則には、ラテン語やギリシャ語に由来する難しそうな名前があります。なぜなら、それらはアリストテレスなどの古代の人々によって発見されたからです。モーダス・トレンスの述べ方は次の通りです。

モーダス・トレンス

「 p は q を含意する」と「 q ではない」から、「 p ではない」を導くことができます。

興味深い論理法則はたくさんあります。この授業では話を単純にし、そのうち三つだけを紹介します。しかし、あなたは他の論理法則もすでにすべて知っている、という点は注目に値します。あなたは物事について考え、世界の中で行動するとき、毎日それらを使っています。論理と推論は私たちの種にとって基本的なものであり、世界と関わる時、私たちはどうしても世界について推論してしまいます。この授業で扱う三つの特定の論理法則は次の通りです。

- モーダス・トレンス：「 p は q を含意する」と「 q ではない」から、「 p ではない」を導くことができます。
- モーダス・ポネンス：「 p は q を含意する」と「 p 」から、「 q 」を導くことができます。
- 仮言三段論法：「 p は q を含意する」と「 q は r を含意する」から、「 p は r を含意する」を導くことができます。

では、これを踏まえて、「論理」とは何でしょうか。実際、それを見る最も良い方法は、論理は一つの言語であると考えことです。論理を言語として扱うことで、私たちは次のことができます。

- 具体例を使う必要なく、論理文を一般的に表現する。
- 用いられている推論の「構造」を記述する。
- 推論が妥当かどうかを確認する。

1.2 言語とは何か

詳細を説明する前に、まず次のことを問わなければなりません。もし論理が言語であるなら、

そもそも言語とは何なのでしょう。言語の正確な定義や性質は少し複雑ですが、とても深く、示唆に富んでいます。ここでは議論を重要な真理に絞ります。どんな言語も、意味のある何かの記号的表現です。これは、言語が次のものを持つ「記号の集まり」であることを意味します。

- 記号を新しい「良い」組み合わせにするための多くの規則。
- 記号に付随する解釈や意味。

これは少し抽象的で分かりにくいので、英語を例に取りましょう。英語には記号の集まりがあります。a, b, c, d, ... や、括弧、アポストロフィー、引用符などの句読記号です。あなたが気づいているかどうかにかかわらず、これらの記号を組み合わせる新しい「良い」ものを作るための規則の大きなリストがあります。たとえば、英語では“tree” が単語であることを私たちは知っています。これは、記号t, r, e, e を正しい仕方で組み合わせているからです。しかし、“eert” は単語ではないことも知っています。これは、記号t, r, e, e を誤った仕方で組み合わせているからです。これが上の第一の点に対応します。記号の良い組み合わせであることを知っているだけでなく、私たちはその記号の解釈も持っています。“tree” は何かを意味します。これらの記号は、公園や森にある大きな木製のものを意味します。

もう一つ例を選びましょう。日本語には、ひらがな、カタカナ、漢字という記号の集まりがあります。これらの記号を組み合わせる新しい語を作ることができると私たちは知っていますが、それは「正しい」仕方で行われる場合に限られます。ここでも解釈が働いています。記号「き」は英語の“tree” と同じ解釈を持ちます。実際、言語間の翻訳が行っているのはまさにこれです。一つの言語の記号を別の言語の記号に交換しながら、記号の解釈は変えないのです。興味深いことに、日本語では解釈という考えがさらに明確です。日本語には、同じ解釈を持つ複数の異なる記号があります。たとえば、「き」と「木」の違いがそれです。

英語や日本語のような例は、現実世界に自然に存在します。そのため、私たちはそれらを自然言語と呼びます。論理は異なる種類の言語です。それは人工的な言語です。推論の法則をよりよく理解するために、アリストテレスのような賢い人々によって作られたものです。

1.3 論理はどのような形をしているか

言語の二つの要素、すなわち記号と解釈を念頭に置くと、「論理」を定義するためには、記号の集まりとそれらの解釈を指定する必要があります。詳細は次の通りです。

- 論理文を表す記号 p, q, r, \dots 。
- 論理結合子を表す記号。以下に示します。
 - 否定： \neg
 - 連言： \wedge
 - 選言： \vee
 - 含意： \rightarrow
 - 同値： \leftrightarrow
- 通常括弧である記号(と)。

論理式とは、記号 p, q, r, \dots を、結合子 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ と括弧を用いて、期待される規則に従って作ることができる任意の表現です。たとえば、論理式は $p, \neg q, (p \vee r) \rightarrow q$ などの形を取ることができます。一方で、 $p \wedge \rightarrow r \vee$ や $\vee p q \neg r$ のような組み合わせは論理式ではありません。

この言語は命題論理と呼ばれます。なぜなら、「命題」という語は論理文を表す別の語にすぎ

ないからです。したがって、上に列挙したこの記号の言語は、単に論理文の言語です。実際、それはそのような言語の最も単純な版です。

英語や日本語のような自然言語では、私たちが使う記号には解釈があります。つまり、紙面上の記号は現実世界の対象や概念を指しています。命題論理の場合、「現実世界の対象」はもはや実際には存在しません。代わりに、記号 p, q, r, \dots は二つの可能な解釈のうち一つを持ちます。それらは真(T)であるか、偽(F)であるかのどちらかです。だからこそ、 p, q, r, \dots には論理文だけを考えるのです。私たちは、それらの可能な真理値を研究することに関心があります。

この命題論理を使うと、文を数学に翻訳できます。

- 「 p ではない」は $\neg p$ になる。
- 「 p かつ q 」は $p \wedge q$ になる。
- 「 p または q 」は $p \vee q$ になる。
- 「もし p ならば q 」は $p \rightarrow q$ になる。
- 「 p であるのは q であるとき、かつそのときに限る」は $p \leftrightarrow q$ になる。

括弧(と)は、物事を評価する順序を教えるために必要です。まず括弧の中の演算を行い、その後で括弧の外の演算を見ます。

1.4 例

これらの記号をどのように使うかを見るために、通常の英語を命題論理の言語に翻訳する練習をしましょう。

$p =$ 「私は犬を飼っている」、 $q =$ 「私は猫を飼っている」とします。次の文を命題論理に翻訳します。

- もし私が犬を飼っているなら、私は猫を飼っている。
A: $p \rightarrow q$
- もし私が猫を飼っているなら、私は犬を飼っている。
A: $q \rightarrow p$
- 私は犬と猫を飼っている。
A: $p \wedge q$
- 私は犬を飼っていないが、猫を飼っている。
A: $(\neg p) \wedge q$

最後の例では括弧を書いています。なぜなら、 $\neg(p \wedge q)$ と書くと別の意味になる、つまり別の議論を表すからです。

1.5 練習問題

練習問題

$p =$ 「私はサンダルを履いている」、 $q =$ 「私は浜辺にいる」とします。次の文を命題論理に変換しなさい。

- 私は浜辺にいる、または私はサンダルを履いている。
A:
- もし私が浜辺にいるなら、私はサンダルを履いている。
A:
- 私は浜辺におらず、サンダルも履いていない。
A:
- 私が浜辺にいるのは、私がサンダルを履いているとき、かつそのときに限る。
A:

1.6 命題論理でモーダス・トレンスを表す

少しモーダス・トレンスに戻り、次の議論を思い出しましょう。

「昨晚雨が降ったなら、今朝地面は濡れているはずですが、しかし、今朝地面は濡れていません。したがって、昨晚雨が降ったはずはありません。」

$p =$ 「昨晚雨が降った」、 $q =$ 「今朝地面が濡れている」とすると、この議論は「二つの文($p \rightarrow q$)と $\neg q$ を使って、 $\neg p$ も成り立つことを導ける」のように言い換えることができます。より正確には、記号では、論理式

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

は、 p と q が何を意味するか、またそれらが真かどうかに関係なく、常に真です。特に、この一般的な「論理法則」は、上の雨水に関する議論にも適用されます。面白いですね。

2 真理値表

ここから、このハンドアウトの冒頭で述べた「コンピュータ・プログラム」について説明します。要するに、ある議論が妥当かどうかを確認するために使えるアルゴリズムが実際に存在します。このアルゴリズムは、命題論理で書かれた論理式を取り、その変数 p, q, r, \dots の可能なすべての真理値を一つずつ調べながら、それらが全体の論理式を真にするか偽にするかを評価します。この「確認」の手順全体は、真理値表と呼ばれるものによって一度に表示することができます。これからそれを要約します。まず、分かりやすい比喻から始めましょう。

2.1 鳥居を使った比喻

あなたと友人が田舎を散歩していると想像してください。

2.1.1 塗られた鳥居



散歩の途中で、赤く塗られた鳥居を見つけます。その鳥居のところには、奇妙な男性が立っています。彼はあなたにこう言います。「止まりなさい。私はこの門の守り手だ。私の試験に合格しない限り、ここを通すわけにはいかない。」あなたと友人は「分かりました」と答えます。するとその男性は次のように言います。

「この先の道は危険だ。地図とコンパスを持っていない限り、この門を通すことはできない。」

あなたは自分のかばんの中に地図とコンパスがあるかどうか覚えていないので、確認する必要があります。かばんを確認する前に、可能な選択肢について考えてみましょう。物事の成り行きには、四つの可能性しかありません。

場合1: 地図を持っておらず、コンパスも持っていない。

場合2: 地図は持っていないが、コンパスは持っている。

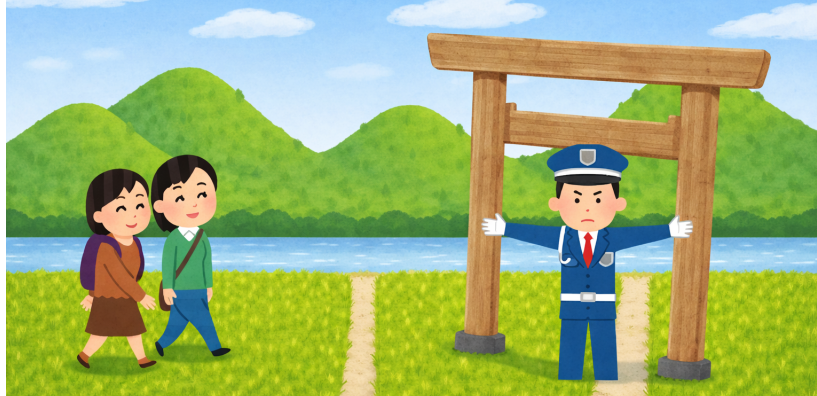
場合3: 地図は持っているが、コンパスは持っていない。

場合4: 地図とコンパスの両方を持っている。

奇妙な男性が言ったことによれば、彼の試験に合格するためには、地図とコンパスの両方を見せる必要があります。したがって、四つの場合のうち、試験に合格できる状況は一つだけです。それは場合4です。

幸運なことに、あなたがかばんを確認すると、成功です。地図とコンパスを見つけます。そこで奇妙な男性はあなたを通してくれ、あなたは散歩を続けます。

2.1.2 木の鳥居



あなたと友人は、楽しい田舎の散歩を続けます。散歩の途中で、二つ目の鳥居を見つけます。この鳥居は最初のものとは違います。今度は木でできているので、茶色く有機的に見えます。驚いたことに、その門にも別の奇妙な男性が立っています。この男性は言います。「止まりなさい。私はこの門の守り手だ。私の試験に合格しない限り、ここを通すわけにはいかない。」再び、あなたと友人は「分かりました」と答えます。この奇妙な男性は次のように言います。

「もうすぐ暗くなる。電話か懐中電灯、またはその両方を持っている場合にだけ、ここを通してあげよう。」

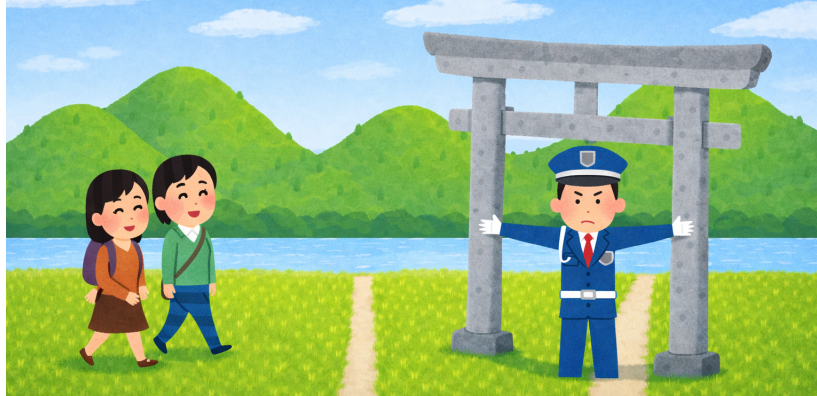
あなたは再び「うーん」と言いながら、かばんを確認し始めます。前と同じ推論に従うと、可能な状況は四つだけです。

- 場合1: 電話を持っておらず、懐中電灯も持っていない。
- 場合2: 電話は持っていないが、懐中電灯は持っている。
- 場合3: 電話は持っているが、懐中電灯は持っていない。
- 場合4: 電話と懐中電灯の両方を持っている。

彼が言ったことによれば、この奇妙な男性は、電話か懐中電灯、またはその両方を持っていることを要求しています。したがって、彼の試験に合格できる状況は三つあります。場合2、場合3、場合4 はすべて問題ありません。彼があなたを門から通さないのは場合1だけです。つまり、電話も懐中電灯も持っていない場合です。

とにかく、あなたがかばんを確認すると、懐中電灯を見つけます。そこで奇妙な男性は「すばらしい」と言い、あなたを通してくれます。

2.1.3 石の鳥居



あなたと友人は歩き続け、三つ目の鳥居を見つけます。この鳥居は他の二つとは違います。塗られているわけでも木でできているわけでもなく、この三つ目の鳥居は石でできています。そのため、頑丈で容赦がないように見えます。予想どおり、石の鳥居のところには三人目の奇妙な男性がいます。彼はあなたに言います。「止まりなさい。私はこの門の守り手だ。私の試験に合格しない限り、ここを通すわけにはいかない。」この時点で、あなたと友人はこれをかなり面白く感じ始めています。ともかく、二人は「分かりました」と答えます。すると男性は言います。

「あなたたちはこれから野生生物保護区に入ろうとしている。カメラを持っているなら、入るためにはカメラ許可証を提示する必要がある。」

再び、前と同じ推論に従うと、可能な場合は四つだけです。

- 場合1: カメラを持っておらず、カメラ許可証も持っていない。
- 場合2: カメラは持っていないが、カメラ許可証は持っている。
- 場合3: カメラは持っているが、カメラ許可証は持っていない。
- 場合4: カメラとカメラ許可証の両方を持っている。

三人目の奇妙な男性の規則によれば、彼があなたを止めるのは、あなたがカメラを持っているがカメラ許可証を持っていないと分かった場合だけです。場合1と場合2では、あなたはカメラを持っていないので、奇妙な男性はあなたがカメラ許可証を持っているかどうかを気にしません。場合4では、カメラとカメラ許可証の両方を持っているので、すべて問題ありません。しかし、場合3では、あなたは奇妙な男性の規則に明示的に違反しています。カメラを持っているのに、許可証を持っていないからです。したがって、場合3だけが、彼の試験に失敗する状況です。

2.2 真理値表の定義

定義により、論理文は常に真理値を持ちます。それは真か偽のどちらかです。したがって、これらの文のうち二つ、 p と q を選ぶと、物事のあり方には四つの可能性しかありません。

- 場合1: p は偽であり、 q も偽である。
- 場合2: p は偽であり、 q は真である。

- 場合3: p は真であり、 q は偽である。
- 場合4: p は真であり、 q も真である。

ここで、これら四つの場合と先ほどの例の間の類似性に注目してください。基本的には同じことです。前のように「場合1、場合2、場合3、場合4」と書き出す代わりに、今度はすべてを表に書き出し、情報を見やすい視覚的な形で表示します。「T」は「True」、「F」は「False」を意味するとします。「真理値表」とは、すべての可能な場合を次のような表に書き出す方法にすぎません。


場合	p	q
1	F	F
2	F	T
3	T	F
4	T	T

2.3 結合子の真理値表

三つの二項結合子 \wedge , \vee , \rightarrow は、先ほどの三つの鳥居です。一つずつ書いていきます。

2.3.1 連言

連言は、塗られた鳥居のような真理値表を持ちます。連言 $p \wedge q$ の真理値表は、先ほどの表に追加の列を加えることで書かれます。

場合	地図?	コンパス?			場合	p	q	$p \wedge q$
1	いいえ	いいえ	いいえ	$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{「いいえ」} = \text{F} \\ \text{「はい」} = \text{T} \end{array}}$	1	F	F	F
2	いいえ	はい	いいえ		2	F	T	F
3	はい	いいえ	いいえ		3	T	F	F
4	はい	はい	はい		4	T	T	T

もし $p =$ 「私たちは地図を持っている」、 $q =$ 「私たちはコンパスを持っている」とすれば、例で見た四つの場合はこの真理値表に直接対応します。「奇妙な男性の試験に合格すること」は真理値表における出力「True」に対応し、「奇妙な男性の試験に失敗すること」は出力「False」に対応します。連言が真になり得るのは、両方の文が真であるときだけです。

2.3.2 選言

選言は、木の鳥居のような真理値表を持ちます。真理値表は次のように書かれます。

場合	電話?	懐中電灯?	⌈	場合	p	q	$p \vee q$	
1	いいえ	いいえ	いいえ	$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{「いいえ」} = F \\ \text{「はい」} = T \end{array}}$	1	F	F	F
2	いいえ	はい	はい		2	F	T	T
3	はい	いいえ	はい		3	T	F	T
4	はい	はい	はい		4	T	T	T

この表は、選言が真になる可能な方法が三つあることを示しています。二つの文のうちどちらか一方が真であれば、または両方が真であれば、選言は真です。言い換えると、選言が偽になる唯一の方法は、二つの文が同時に両方とも偽である場合です。

2.3.3 含意

含意は、石の鳥居のような真理値表を持ちます。次のように書かれます。

場合	カメラ?	許可証?	⌈	場合	p	q	$p \rightarrow q$	
1	いいえ	いいえ	はい	$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{「いいえ」} = F \\ \text{「はい」} = T \end{array}}$	1	F	F	T
2	いいえ	はい	はい		2	F	T	T
3	はい	いいえ	いいえ		3	T	F	F
4	はい	はい	はい		4	T	T	T

この状況は先ほどの石の鳥居とまったく同じです。 $p =$ 「私たちはカメラを持っている」、 $q =$ 「私たちはカメラ許可証を持っている」とします。すると、含意が失敗する状況は一つだけです。すなわち、 p が真であり、 q が偽である場合です。これは、私たちがカメラを持っているが許可証を持っていない、とすることで表されていました。

2.4 他の論理式の真理値表を計算する

前に述べたように、論理結合子を使うことで、小さな論理式からより複雑な論理式を作ることができます。このような複雑な論理式の真理値を評価する鍵は、それを私たちが扱える小さな部分に分解することです。

この例として、先ほど述べたモーダス・トレンスの論理式 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ を考えます。この論理式 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ の真理値表を書くために、まずしなければならないことは、括弧(と)を使って、その論理式をより小さな部分に「分解」することです。この論理式から分かるように、そこには四つの小さな部分があります。

- 部分1：論理式 $(p \rightarrow q)$
- 部分2：論理式 $\neg q$
- 部分3：論理式 $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$
- 部分4：論理式 $\neg p$

これらが組み合わさって、最終的な論理式 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ が得られます。この論理式の真理値表を作るために、まずこれらすべての部分論理式を別々の列として書きます。方法をよりよく説明するために、列には番号を付けています。

	(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)	
p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F					
F	T					
T	F					
T	T					

ここから、結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow$ の真理値表と、入力真理値を単に反転させる否定 \neg を使って、各列を埋めていきます。左から順に、一列ずつ埋めます。

- **列(C1)**：ここでは含意、すなわち $p \rightarrow q$ を評価しようとしています。含意の真理値表、つまり第2.1.3節と第2.3.3節の石の鳥居によれば、含意 $p \rightarrow q$ が偽になるのは、 p が真であり q が偽であるときだけです。したがって、列(C1)は「T T F T」となります。

	(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)	
p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T				
F	T	T				
T	F	F				
T	T	T				

- **列(C2)**：ここでは否定、すなわち $\neg q$ を評価しようとしています。否定は入力真理値を単に反転させます。この場合、 q の列は q の真理値が「F T F T」であることを示しています。したがって、否定はこれらを反転させ、列は「T F T F」となります。

	(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)	
p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T	T			
F	T	T	F			
T	F	F	T			
T	T	T	F			

- **列(C3)**：ここでは連言、すなわち $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ を評価しようとしています。連言は、両方の入力真理値が真であるときにだけ真です。この場合、それは $p \rightarrow q$ と $\neg q$ の両方が真であることを意味します。列(C1)と列(C2)には、それぞれ $p \rightarrow q$ と $\neg q$ のすべての真理値が含まれています。したがって、(C1)と(C2)を見て、両方がTになっている行を探せばよいのです。確認すると、第1行では $p \rightarrow q$ と $\neg q$ の両方が真であり、第2行、第3行、第4行では、これら二つの文の少なくとも一方が偽です。したがって、第1行だけが連言 $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ を真にします。それ以外の場合は偽になります。この列を書き出すと次のようになります。

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T		
F	T	T	F	F		
T	F	F	T	F		
T	T	T	F	F		

- 列(C4)：ここでも単純な否定、すなわち $\neg p$ を取っています。この場合は列(C2)と似ていますが、ここでは q ではなく p を否定しています。そこで p の列を見ると、それは「F F T T」となっています。これをすべて反転させます。したがって、列(C4)は「T T F F」となります。

		(C1)	(C2)	(C3)	(C4)	(C5)
p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T	T	
F	T	T	F	F	T	
T	F	F	T	F	F	
T	T	T	F	F	F	

- 列(C5)：最後に、含意 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ を考えます。(C1)と同様に、第2.1.3節と第2.3.3節の石の鳥居の例を使います。繰り返しますが、含意が偽になる唯一の場合は、第一の文が真であり、第二の文が偽である場合です。論理式 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ において、第一の文は $((p \rightarrow q) \wedge \neg q)$ であり、第二の論理式は $\neg p$ です。したがって、含意「 \rightarrow 」を評価するためには、列(C3)と列(C4)に並んでいる真理値を見る必要があります。表の中で、列(C3)が真であり、列(C4)が偽である行を探しています。なぜなら、それが結合子「 \rightarrow 」を偽にするからです。しかしこの場合、4行の中には、(C3)がTであり(C4)がFである状況は一つもありません。したがって、含意「 \rightarrow 」が偽になる状況はありません。よって、すべての項目はTとなり、表が完成します。

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

たとえば、論理式 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ は、より小さな部分 $p \vee q$ と $p \wedge q$ に分解でき、それらが含意 \rightarrow によって結合されています。したがって、この論理式の真理値表を作るには、含意が最後に来ること、そして二つの部分論理式 $p \vee q$ と $p \wedge q$ を先に評価する必要があることが分かります。

2.5 真理値表の使い道

1. 真理値表は、ある論理式が論理法則であるかどうかを教えてください。
2. 真理値表は、 p と q のどの値が論理式を真、または偽にするかを教えてください。
3. 真理値表は、二つの論理式が実は同じであるかどうか、つまり同じ意味を持つかどうかを教えてください。

これから、この三つの話題を別々に説明します。その途中で、与えられた論理式について真理値表をどのように計算するかを示す例もいくつか提示します。

2.5.1 恒真式を特定する

「昨晚雨が降ったなら、今朝地面は濡れているはずですが、今朝地面は濡れていません。したがって、昨晚雨が降ったはずはありません」という文を考えてみましょう。これまでの議論に基づけば、これはモーダス・トレンスの例であることが分かります。私はすでに、これは論理法則だと言いました。実際、このような論理法則には特別な名前があります。それらは「恒真式」と呼ばれます。これは「同じことを再び言う」という意味を持つ、少し難しそうなギリシャ語由来の語です。

モーダス・トレンスが論理法則であることは、その真理値表を調べることで確認できます。第2.4節では、モーダス・トレンスの真理値表を計算しました。最後の列をもう一度見てください。

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

見て分かるように、最後の列のすべての項目が真です。これは、論理式 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ が何があっても常に真であることを意味します。言い換えると、それは恒真式です。一般に、真理値表の最後の列がすべてTであるとき、その論理式は恒真式になります。

2.5.2 偽になる場合を特定する

誰かが悪い推論をしている状況を想像してください。「もし私が犬を飼っているなら、私は動物を飼っている。私は動物を飼っている。したがって、私は犬を飼っている」という議論です。この論理式は $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ です。この議論は明らかに悪く、真理値表を使ってそれを示すことができます。

この論理式について完成した真理値表を下に示します。最後の列の値に注意してください。

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

第二行では、最後の列にFがあることに注意してください。これは、論理式 $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ が偽になる状況があることを意味します。その行の最初に戻ると、この論理式は p が偽であり q が真であるときに偽になることが分かります。

これを英語に戻してみましょう。この議論は「もし私が犬を飼っているなら、私は動物を飼っている。私は動物を飼っている。したがって、私は犬を飼っている」と言っていました。ここで p = 「私は犬を飼っている」、 q = 「私は動物を飼っている」です。真理値表によれば、この議論は q が真であり p が偽であるときに偽になります。英語に翻訳すると、この状況は「私は動

物を飼っているが、犬は飼っていない」ときには全体の議論が偽である、ということを述べています。これは完全に理にかなっていません。動物を飼っているからといって、犬を飼っているとは限りません。たとえば、猫を飼っている場合、 q は真で p は偽になります。したがって、私たちは真理値表を使って、この議論がどこで破綻するかをうまく特定できました。

2.5.3 同値性を特定する

真理値表の三つ目で最後の使い道として、二つの論理式が実際には同じかどうかを調べます。二つの論理式 $\neg p \vee q$ と $p \rightarrow q$ を考えましょう。これらが同じ意味を持つこと、つまり p と q に対して同じ働きをすることを示します。まず、 $\neg p \vee q$ の真理値表を見てみましょう。

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	F	T

上の表では、 $\neg p \vee q$ は第1行、第2行、第4行で真であり、第3行で偽です。しかし、これはまさに含意 $p \rightarrow q$ の真理値表です。したがって、これら二つの論理式は p と q に対して同じことをしていると結論できます。言い換えると、真理値表は、論理式 $\neg p \vee q$ と $p \rightarrow q$ が実は同値、つまり同じであることを示したのです。

2.6 練習問題

練習問題

二つの論理式 $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ が同値であるかどうかを確認します。そのためには、二つの真理値表を計算する必要があります。一つは $\neg(p \wedge q)$ について、もう一つは $(\neg p) \vee (\neg q)$ についてです。その後、それらを比較します。下の二つの真理値表を埋めなさい。これは $\neg(p \wedge q)$ の真理値表であり、空欄があります。空欄をTまたはFで埋めなさい。

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
F	F		
F	T		
T	F		
T	T		

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

二つの真理値表に対する自分の答えを使って、論理式 $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ が同じであるかどうかを判断しなさい。

A:

2.7 真理値表の計算方法についての追加説明

第2.4節の補足として、真理値表の計算方法について、より詳しい説明を与えます。例として、論理式 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ を考えます。この論理式の真理値表を書くためには、まず部分論理式を特定

する必要があります。つまり、全体の論理式 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ を構成する、より小さな論理文です。括弧の配置に基づくと、小さな部分は二つだけであることが分かります。

- 部分1：部分論理式 $\neg p$,
- 部分2：部分論理式 $\neg q$.

これらは、連言を使って全体の論理式 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ に組み合わされています。したがって、この連言が何をしているのかを理解するためには、まず $\neg p$ と $\neg q$ がどのように振る舞うかを理解する必要があります。真理値表は次のようになります。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F			
F	T			
T	F			
T	T			

否定に対応する部分を先に埋めれば、その答えを使って \wedge の部分をどのように計算すればよいかを判断できます。

文を否定すると常に真理値が反転するので、真理値表の最初の二つの列はかなり簡単に埋めることができます。 $\neg p$ の列を完成させるには、単に p の列を見て、各行のTまたはFを確認し、 $\neg p$ の列にはその反対を書きます。第1行から下を読むと、 p の列は「F F T T」となっています。列 $\neg p$ はこれらの値を反転させるので、「T T F F」となります。

まったく同じ推論が $\neg q$ にも適用されます。再び、 q に対応する列に並んでいる値を見て、 $\neg q$ の列にはその反対を書くだけです。 q の列を下を読むと、「F T F T」となっています。これらをすべて反転させると、 $\neg q$ の列は「T F T F」となります。

これで真理値表は部分的に完成しました。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	
F	T	T	F	
T	F	F	T	
T	T	F	F	

あとは最後の列を評価するだけです。ここで重要なのは、どの結合子が使われているかを認識することです。この場合、論理式 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ の中で連言が何をしているのかを理解しようとしています。決定的に重要なのは、連言の真理値表がどのようなものだったかを思い出すことです。

第2.3.1節に戻ると、二つの文の連言は、その二つの文がどちらも真であるときにのみ真であることが分かります。言い換えると、二つの文のうち一方が偽であれば、連言は偽です。おそらく最も混乱しやすい点は、第2.3.1節の真理値表が、ここで扱っているものとまったく同じには

見えないことです。しかし、それは私たちが今、二つの異なるものの連言を考えているからです。今は $p \wedge q$ には関心がありません。関心があるのは $(\neg p) \wedge (\neg q)$ です。私たちの真理値表では、見るべき二つの列は次の二つです。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	→ ?
F	T	T	F	→ ?
T	F	F	T	→ ?
T	T	F	F	→ ?

第1行では、 $\neg p$ が真であり、 $\neg q$ も真であることが分かります。これは第2.3.1節の真理値表の第4行です。つまり、これは連言 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ を真にするために必要な条件そのものです。したがって、最後の列の第1行は「T」になります。連言 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ が真になる唯一の方法は、 $(\neg p)$ と $(\neg q)$ の両方が真である場合です。第2行、第3行、第4行では、 $(\neg p)$ と $(\neg q)$ の列の中に常に少なくとも一つの「F」があることが分かります。したがって、これら三つの場合では連言は偽になります。よって、論理式 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ の列は「T F F F」となります。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	F	F	F