

## Contents

|          |                          |           |
|----------|--------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>数轴</b>                | <b>2</b>  |
| 1.1      | 不等式 . . . . .            | 3         |
| 1.2      | 绝对值 . . . . .            | 4         |
| <b>2</b> | <b>算术运算</b>              | <b>5</b>  |
| 2.1      | 加法 . . . . .             | 5         |
| 2.2      | 减法 . . . . .             | 6         |
| 2.3      | 乘法 . . . . .             | 7         |
| 2.4      | 除法 . . . . .             | 8         |
| 2.5      | 因数和素数 . . . . .          | 9         |
| 2.6      | 分配律 . . . . .            | 10        |
| 2.7      | 乘方 . . . . .             | 10        |
| 2.8      | 运算顺序 . . . . .           | 11        |
| <b>3</b> | <b>分数</b>                | <b>12</b> |
| 3.1      | 化简分数 . . . . .           | 12        |
| 3.2      | 分数的加减 . . . . .          | 12        |
| 3.3      | 分数的乘法 . . . . .          | 13        |
| 3.4      | 分数的除法 . . . . .          | 13        |
| <b>4</b> | <b>小数</b>                | <b>14</b> |
| 4.1      | 位值 . . . . .             | 14        |
| 4.2      | 分数与小数的转换 . . . . .       | 14        |
| 4.3      | 小数的四舍五入 . . . . .        | 14        |
| 4.4      | 小数运算 . . . . .           | 15        |
| <b>5</b> | <b>百分比</b>               | <b>16</b> |
| 5.1      | 什么是百分比? . . . . .        | 16        |
| 5.2      | 百分比、小数和分数之间的转换 . . . . . | 16        |
| 5.3      | 百分比方程 . . . . .          | 17        |
| 5.4      | 一个巧妙的百分比技巧 . . . . .     | 17        |

上一讲中，我们学习了形式逻辑和真值表。在本讲中，我们回到算术，从而开始本课程的代数部分。虽然算术可能看起来非常基础，但这些技巧是后面许多内容的基础：计数、方程、建模、金融、概率和统计都依赖同一种基本的数的语言。今天的目标不是把算术讲得很难，而是把熟悉的想法清楚地组织起来。我们将复习数轴、不等式、算术运算、分数、小数和百分比。

---

## 1 数轴

我们先从一个几乎带有哲学意味的问题开始：什么是数？古代的数学家们曾经为这个问题给出过几种答案，但我们这里不展开讨论。相反，我们采取下面这种观点：数就是我们需要它成为什么，它是什么。

我们从小处开始，也就是从数量这个想法开始。在人类历史的某个时刻，我们注意到，对于同一类物体，我们可以拥有更多或更少。例如，三个椰子比两个椰子更多，两根香蕉比四根香蕉更少。在某个时刻，我们在认知上实现了一个巨大的飞跃：我们注意到两个椰子和两根香蕉有某种共同之处，于是我们从具体物体中抽象出来，进入数学的领域，并引入了数的概念。像  $1, 2, 3$  这样的数，是数量的抽象表示。后来，我们最终意识到，我们也可能拥有某物的零个，因此我们也引入了数  $0$  来表示这种情况。数学家把这些“计数用的数”  $0, 1, 2, 3, \dots$  称为自然数，并用特殊的字母  $\mathbb{N}$  表示它们的全体。

在显然的意义上，拥有  $2$  个某物比拥有  $1$  个某物更多，所以有一种自然的方法可以把所有这些自然数排列起来：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & & \end{array}$$

此外，我们注意到这些表示数量的数有一种加法运算：如果我有  $3$  根香蕉，又收集了  $2$  根，那么我一共有  $5$  根香蕉。过了一段时间，我们意识到，除了增加数量之外，我们还希望有一种相反的操作，即去掉数量。这当然就是减法。理解减法的一种方式是通过负数：如果我们有  $3$  根香蕉，并从中去掉一根，那么这就像向我们的集合中加上  $-1$  一样。我们当然可以一直这样做，因此我们发现自然数还有另一份副本，只不过这次它指向相反的方向：

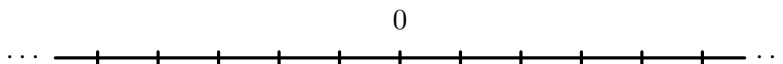
$$\begin{array}{ccccccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \dots & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \dots \end{array}$$

我们把这个集合称为整数，并用字母  $\mathbb{Z}$  表示它们的全体。

过了一段时间，我们会注意到，现实世界中的单个物体也可以被分割。例如，如果我们有一个生日蛋糕，我们可能需要把它切开，并把不同的部分分给不同的人。考虑到这一点，我们也需要一种方法来表示数量的比，例如某物的一半。这引出了有理数的一般定义，也就是说，有理数是可以写成两个整数之比的数： $\frac{a}{b}$ ，其中  $b \neq 0$ 。数学家用字母  $\mathbb{Q}$  表示所有有理数的集合。由于整数有很多，把它们组合成比的写法也有非常非常多。因此，如果我们把所有这些数都写到表示所有数的图上，它大概会开始看起来像这样：



事实上，这些有理数在整数周围分布得非常密集：无论你在某个整数附近放大多少倍，你总能在附近找到一个有理数。令人惊讶的是，在研究有理数数千年之后，古代世界的一些数学家发现了这幅图中一个非常深刻的现象：仍然存在空隙。确实，像  $\sqrt{2}$  这样的特殊数似乎存在，但却不能写成比  $\frac{a}{b}$ 。这样的数称为无理数。如果我们想把上面的图“填满空隙”，也就是把所有无理数也包括进来，那么结果就会是一条连续的直线：



这条连续的直线应当被理解为一个数的集合：这条直线上的任意一点都对应一个单独的数，它可能是自然数，也可能是整数，也可能是有理数或无理数。所有这些数的集合称为实数，我们用字母  $\mathbb{R}$  表示它。

把所有数排列成一条直线，使我们可以把数看成是有顺序的。我们通常用符号  $<$  表示这种顺序，也就是说，写  $a < b$  意味着数  $a$  小于数  $b$ 。从几何上看，这意味着  $a$  位于数轴上  $b$  的左边。下面总结了我們到目前为止的讨论。

## 实数

实数集合记作  $\mathbb{R}$ ，它包含所有可以放在数轴上的数。重要的实数类型包括：

- **自然数**：  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。
- **整数**：  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。
- **有理数**： 可以写成分数  $\frac{a}{b}$  的数，其中  $a, b \in \mathbb{Z}$  且  $b \neq 0$ 。
- **无理数**： 不能写成分数的实数，例如  $\sqrt{2}$ ， $\pi$  和  $e$ 。

## 1.1 不等式

数轴为我们理解不等式提供了一种有用的方法。例如，不等式

$$2 < x$$

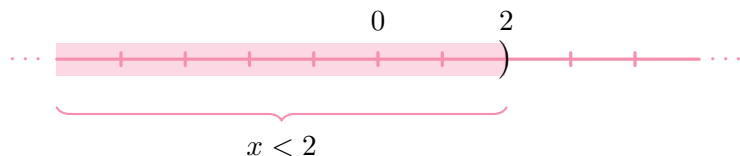
表示  $x$  是位于 2 右边的一个实数。等价地，我们也可以把它写成  $x > 2$ 。



类似地，不等式

$$x < 2$$

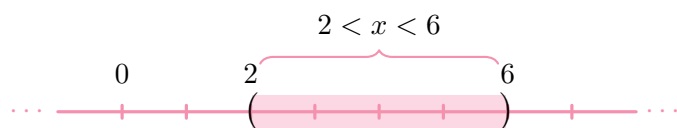
表示  $x$  是位于 2 左边的一个实数。



我们也可以描述位于两个端点之间的数。例如，

$$2 < x < 6$$

表示  $x$  大于 2 但小于 6。



### 不等式与区间

下面的解释很有用：

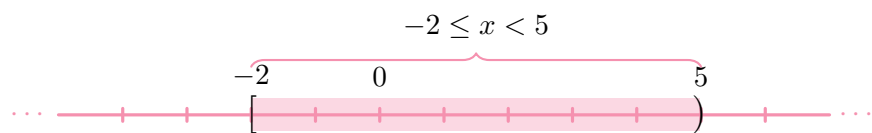
- $x < a$  表示  $a$  左边的值。
- $x > a$  表示  $a$  右边的值。
- $a < x < b$  表示  $a$  和  $b$  之间的值。
- 方括号表示包含端点。
- 圆括号表示不包含端点。

例如，所有位于  $-2$  和  $5$  之间，并且包含  $-2$  但不包含  $5$  的实数，可以写成

$$[-2, 5).$$

同一个区间也可以用不等式描述为

$$-2 \leq x < 5.$$



## 1.2 绝对值

在进入“五大”运算之前，我们先简要讨论绝对值运算。非常简单地讲，绝对值是一种去掉数字前面负号的运算。我们用两条竖线表示这个运算，例如

$$|-3| = 3, \quad \text{并且} \quad |-8| = 8.$$

如果没有负号需要去掉，那么绝对值运算什么也不做，例如

$$|2| = 2, \quad \text{并且} \quad |15| = 15.$$

事实上，绝对值运算在数轴上有几何意义：它为我们提供了一种表示距离的方法。

### 作为距离的绝对值

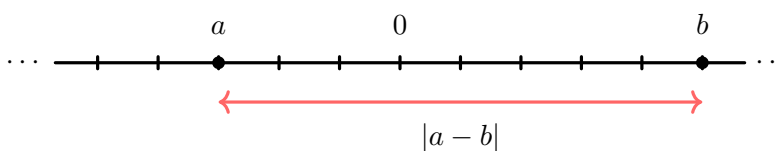
对于任意数  $a \in \mathbb{R}$ ，绝对值  $|a|$  表示数轴上从  $a$  到 0 的距离。由于距离永远不会是负数，所以我们总有

$$|a| \geq 0.$$

我们也可以用这个想法来计算不同实数之间的距离。两个数  $a$  和  $b$  之间的距离由

$$|a - b|$$

给出。从图形上看，运算  $|a - b|$  大致是在做下面这样的事情：



### 练习 1

计算下列各题。

(1)  $|-3|$

(4)  $-|-1|$

(2)  $|7|$

(5)  $|0|$

(3)  $-|4|$

(6)  $-|3 - 5|$

## 2 算术运算

现在我们开始描述实数上的一些算术运算。实际上，你可以对实数线做许多事情。现在，我们将介绍五种基本运算。它们是：

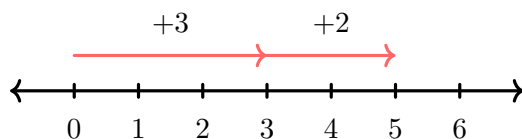
- (1) **加法：** 合并数量或变化。
- (2) **减法：** 求差，或者加上相反数。
- (3) **乘法：** 重复加法或缩放。
- (4) **除法：** 分成若干组，或者乘以倒数。
- (5) **乘方：** 重复乘法。

### 2.1 加法

加法把两个数合并成第三个数。当然，我们可以从数量组合的角度理解加法，例如  $3 + 2 = 5$  可以理解为：

$$\bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

然而，在数轴上，我们也可以把 3 和 2 理解为连续的长度。这意味着加法会把这些线段接在一起，形成一条长度为 5 的更长线段：



使用这两种解释中的任何一种，我们都可以发现一些对所有实数都成立的加法基本性质。下面是其中四个重要性质。

### 加法的性质

对于所有实数  $a, b, c \in \mathbb{R}$ :

- 交换律:

$$a + b = b + a.$$

例如,  $3 + 5 = 5 + 3$ 。

- 结合律:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

例如,  $(2 + 6) + 5 = 2 + (6 + 5)$ 。

- 加法单位元:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- 加法逆元:

$$a + (-a) = 0.$$

回忆一下，对于较大的非负整数，我们可以使用进位算法进行竖式加法。例如：

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 8 \\ \quad 6 \quad 2 \\ + \quad 5 \quad 3 \quad 6 \\ \hline 7 \quad 4 \quad 6 \end{array} \quad \text{所以} \quad 148 + 62 + 536 = 746.$$

这里我们从最右边的一列开始，把那一列的数相加。如果结果超过 10，那么就向下一列加上额外的 1，并重复这个过程，直到没有更多列为止。

## 2.2 减法

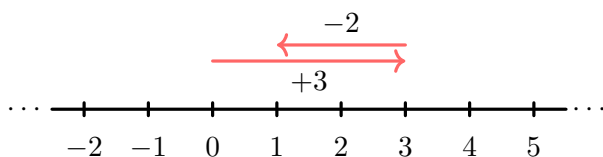
减法实际上就是加上相反数：

$$3 - 2 = 3 + (-2).$$

因此，减法与加法逆元性质密切相关：对于任意实数  $a$ ，从某个量中减去  $a$ ，就等于把数  $-a$  加到这个量上。在这个意义上，减法和加法是相反的运算。从数量的角度看，减法就是去掉东西的行为。例如， $3 - 2 = 1$  是：

$$\bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet = \bullet$$

如果我们选择把数理解为连续的长度，那么减法就是去掉一段线段，或者等价地，向相反方向加上一段线段：



对于涉及两个非负整数的减法问题，我们可以使用借位算法。例如：

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 17 \\ -\ 1\ 4\ 7 \\ \hline 1\ 1\ 8 \end{array} \quad \text{所以} \quad 147 - 29 = 118.$$

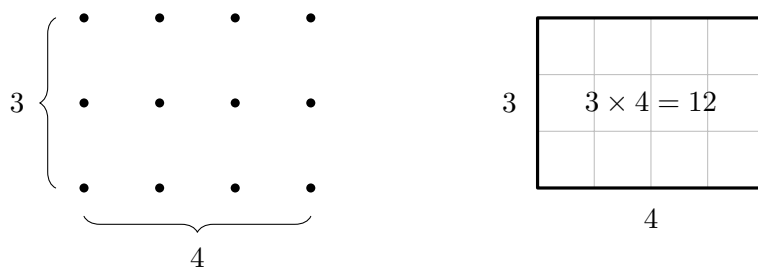
这里的想法是，个位上的 7 太小，不能减去 9，所以我们从十位借 1 个十。这把 47 变成了 3 个十和 17 个一。

## 2.3 乘法

对于正整数  $a$  和  $b$ ，乘法只是反复进行加法：

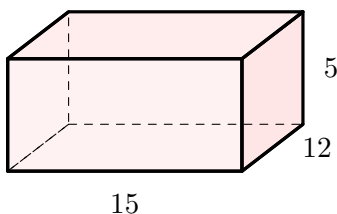
$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ 次}}.$$

我们通常把乘法写成  $a \times b$  或  $a \cdot b$ 。乘法也有几何意义：如果长度用线段表示，那么两个长度相乘会给出一个二维的面积。



三个长度相乘给出体积。例如，一个长为 15、宽为 12、高为 5 的长方体，其体积为

$$15 \times 12 \times 5 = 900.$$



和加法一样，乘法也有一些重要性质。

### 乘法的性质

对于所有实数  $a, b, c \in \mathbb{R}$ :

- 交换律:

$$ab = ba.$$

例如,  $4 \cdot (-7) = (-7) \cdot 4$ 。

- 结合律:

$$(ab)c = a(bc).$$

例如,  $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$ 。

- 乘法单位元:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- 乘法逆元:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \quad a \neq 0.$$

等价地,

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0.$$

对于较大的整数，我们可以使用另一种竖式算法进行乘法。例如：

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 14 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 322 \end{array} \quad \text{所以} \quad 23 \times 14 = 322.$$

我们会在习题课上进一步练习这一点。

## 2.4 除法

在减法其实只是加法的另一种形式的意义上，除法其实也只是乘法的另一种形式。这次我们使用上面的乘法逆元性质：除以一个非零数，就等于乘以它的倒数：

$$8 \div 2 = 8 \times 2^{-1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

### 除法术语

一个数除以一个非零数的结果称为**商**。除法

$$30 \div 6$$

也可以写成

$$30/6 \quad \text{或} \quad \frac{30}{6}.$$

在表达式  $30 \div 6$  中，数 30 称为**被除数**，6 称为**除数**。在分数  $\frac{30}{6}$  中，数 30 称为**分子**，6 称为**分母**。

除法的一些重要规则是:

- 零除以一个非零整数等于 0。
- 非零整数除以零是未定义的。
- 两个同号非零整数的商为正。
- 两个异号非零整数的商为负。

例如:

$$\frac{-42}{-6} = 7, \quad 36 \div (-9) = -4, \quad 0 \div (-13) = 0, \quad -97 \div 0 \text{ 未定义}.$$

对于较大的数, 我们可以使用长除法。例如:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 13 \overline{) 351} \\ \underline{26} \phantom{1} \\ 91 \\ \underline{91} \\ 0 \end{array} \quad \text{所以} \quad 351 \div 13 = 27.$$

## 2.5 因数和素数

### 因数和素数

设  $a$  和  $b$  是正整数。如果  $a$  能整除  $b$ , 那么我们说  $a$  是  $b$  的**因数**或**约数**。

例如, 1, 2, 3, 和 6 都是 6 的因数。

正整数可以分类如下:

- 数 1 既不是素数, 也不是合数。
- **素数**是大于 1 的整数, 并且它的正因数只有 1 和它本身。
- **合数**是大于 1 的整数, 并且有两个以上的正因数。

每个合数都可以写成素数的乘积。这称为它的**素数分解**或**素因数分解**。例如:

$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

类似地,

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

大于 1 的整数的素数分解在不考虑顺序的情况下总是唯一的, 因此在某种意义上, 它刻画了这个数。这就是为什么我们称这些数为“素数”: 它们可以通过相乘来构造所有大于 1 的整数。

### 练习 2

写出每个数的素因数分解。

(1) 68

(2) 133

(3) 43

## 2.6 分配律

分配律说明了乘法如何与加法相互作用：

$$a(b + c) = ab + ac.$$

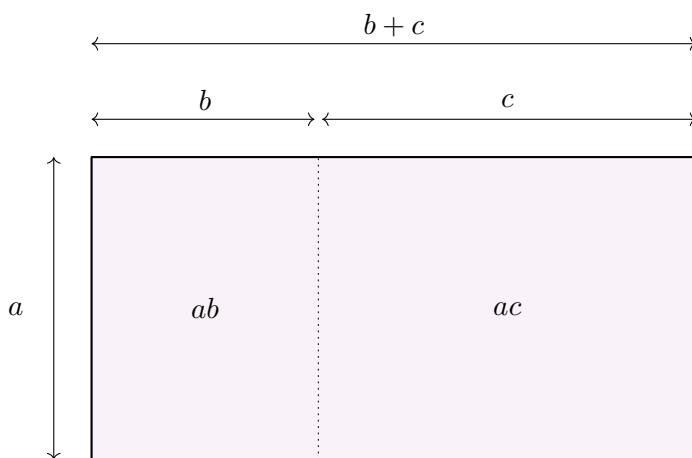
同样，

$$(a + b)c = ac + bc.$$

例如：

$$3(8 + 5) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5.$$

分配律有一个几何解释。一个大长方形的面积可以分成两个较小长方形的面积。



总面积可以用两种等价的方法计算：

$$\text{总面积} = a(b + c)$$

或者

$$\text{总面积} = ab + ac.$$

因此：

$$a(b + c) = ab + ac.$$

## 2.7 乘方

乘法是重复加法。对于正整数  $b$ ，乘方是重复乘法：

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ 次}}.$$

这里  $a$  称为**底数**， $b$  称为**指数**。

例如：

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

## 指数法则

对于非零实数  $a$  和  $b$ ，以及整数  $m$  和  $n$ ，我们有：

$$\begin{aligned}a^m a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n.\end{aligned}$$

例如：

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

我们将在后面的讲义中详细讨论这些规则。现在，只需要记住它们存在就足够了。

## 2.8 运算顺序

当一个表达式包含多个运算时，我们需要一个标准顺序来计算它。

### 运算顺序

通常的运算顺序是：

- (1) 先算括号，
- (2) 然后算指数，
- (3) 然后算乘法和除法，
- (4) 最后算加法和减法。

英语中常用缩写 PEMDAS。

举例来说，假设我们有某个实数  $a$ ，并写出类似下面的表达式：

$$3(a - 7)^2 + 2.$$

根据我们的运算顺序，这意味着：

先减去 7，再把结果平方，再乘以 3，最后加上 2。

处理负数和括号时需要小心。例如，注意：

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9,$$

但是

$$-3^2 = -(3^2) = -9,$$

因为在后一个表达式中，指数比负号先运算。

### 练习 3

计算下列各题。

(1)  $-3^2$

(2)  $(-3)^2$

(3)  $5 + 2^2$

(4)  $(5 + 2)^2$

(5)  $3 \cdot 2^2$

(6)  $(3 \cdot 2)^2$

## 3 分数

分数

$$\frac{a}{b}$$

表示  $a \div b$ ，其中  $b \neq 0$ 。分数可以表示：

- 整体的一部分，
- 比，
- 率，例如“每”。

例如：

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

### 3.1 化简分数

要化简一个分数，需要用同一个非零数同时除分子和分母。目标是把分数写成最简形式，也就是说，分子和分母除了 1 之外没有共同因数。

例如：

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}.$$

一种方法是使用素因数分解：

$$\frac{25}{100} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

另一种方法是使用最大公因数。两个正整数的最大公因数是同时整除这两个数的最大整数。例如，14 和 21 的最大公因数是 7，所以

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

### 3.2 分数的加减

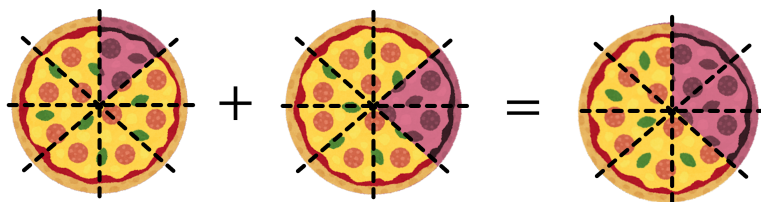
要加减分数，我们需要一个非零的公分母：

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

如果分母不同，就把分数改写为具有公分母的形式。例如：

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8},$$

或者，从图形上看：



如你所见，我们把第二个披萨进一步细分，以便把四分之一表示成八分之几。更一般地，当  $c, d \neq 0$  时：

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

### 3.3 分数的乘法

要乘分数，就把分子相乘，把分母相乘，其中分母必须非零：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

例如：

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

### 3.4 分数的除法

除以一个非零数就是乘以它的倒数：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b, c, d \neq 0.$$

例如：

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

#### 练习 4

计算下列各题。

(1)  $\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$

(2)  $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$

(3)  $\frac{6}{3} \div \frac{1}{2}$

(4)  $\frac{18}{24}$

(5)  $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

(6)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9}$

## 4 小数

### 4.1 位值

小数点右边的数字表示十分位、百分位、千分位，依此类推。例如，

$$0.4 = \frac{4}{10}, \quad 0.04 = \frac{4}{100}.$$

类似地，

$$2.305 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

| 数     | 个位 | 十分位 | 百分位 | 千分位 |
|-------|----|-----|-----|-----|
| 2.305 | 2  | 3   | 0   | 5   |

### 4.2 分数与小数的转换

如果分母是 10, 100, 1000, ..., 那么转换成小数是直接的。例如，

$$\frac{7}{100} = 0.07.$$

否则，可以通过除法把分数转换成小数。例如，

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

重要的一点是，分数和小数往往是同一个数的两种不同写法。例如，

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{3}{4} = 0.75.$$

### 4.3 小数的四舍五入

#### 小数的四舍五入

要对小数进行四舍五入：

- 如果下一位数字小于 5，则舍去；
- 如果下一位数字是 5 或更大，则进一。

“保留  $n$  位小数”表示答案在小数点后应有  $n$  个数字。

例如，考虑数

$$4.85731.$$

那么：

- 保留 2 位小数：

$$4.85731 \approx 4.86;$$

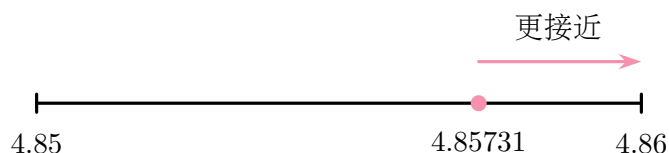
- 保留 3 位小数:

$$4.85731 \approx 4.857;$$

- 保留 4 位小数:

$$4.85731 \approx 4.8573.$$

理解四舍五入的另一种方法是：我们在选择哪个附近的数更接近。例如，当把 4.85731 保留 2 位小数时，我们是在比较它与 4.85 和 4.86 的距离。



## 4.4 小数运算

小数可以使用前面相同的竖式算法进行加、减、乘、除。额外需要注意的主要细节是认真追踪小数点的位置。

例如,

$$0.58 + 1.06 = 1.64.$$

乘以 10 会把小数点向右移动一位，而除以 10 会把小数点向左移动一位。例如，

$$4.56 \times 100 = 456.$$

计算前先估算是一个好习惯。例如，

$$19.8 \times 3.1$$

应该接近

$$20 \times 3 = 60.$$

这告诉我们，如果最终答案与 60 相差很大，就应该检查我们的计算。

### 练习：小数

计算下列各题。

(a)  $0.58 + 1.06$

(b) 将  $\frac{7}{100}$  转换成小数。

(c) 将  $\frac{3}{4}$  转换成小数。

(d) 将 4.85731 保留 2 位小数。

(e) 将 4.85731 保留 3 位小数。

(f) 将 4.85731 保留 4 位小数。

### 解答

(a)  $0.58 + 1.06 = 1.64$ 。

(b)  $\frac{7}{100} = 0.07$ 。

(c)  $\frac{3}{4} = 0.75$ 。

(d)  $4.85731 \approx 4.86$ 。

(e)  $4.85731 \approx 4.857$ 。

(f)  $4.85731 \approx 4.8573$ 。

## 5 百分比

### 5.1 什么是百分比？

“percent”这个词的字面意思是“每一百”。“cent”表示 100，就像“century”这个词一样。所以，百分比就是每一百份中的若干份。

例如，

$$25\% = 0.25 = \frac{25}{100}.$$

类似地，

$$100\% = 1.00 = \frac{100}{100}.$$

#### 百分比

百分比是一种把数写成以 100 为基准的数量的方法。例如，

$$37\% = \frac{37}{100} = 0.37.$$

### 5.2 百分比、小数和分数之间的转换

要把百分比转换成小数形式，把小数点向左移动两位。例如，

$$100\% = 1.00, \quad 25\% = 0.25, \quad 3.5\% = 0.035.$$

要把小数转换成百分比，把小数点向右移动两位。例如，

$$1.00 = 100\%, \quad 1.20 = 120\%, \quad 0.005 = 0.5\%.$$

#### 练习：转换成百分数

将下列各项转换成百分数。

(a) 1.20

(b)  $\frac{3}{5}$

#### 解答

(a)

$$1.20 = \frac{120}{100} = 120\%.$$

(b)

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

### 练习：从百分数转换

- (a) 将 3.5% 转换成小数。
- (b) 将 55% 转换成分数。

### 解答

(a)

$$3.5\% = \frac{3.5}{100} = \frac{35}{1000} = 0.035.$$

(b)

$$55\% = \frac{55}{100} = \frac{5 \cdot 11}{5 \cdot 20} = \frac{11}{20}.$$

## 5.3 百分比方程

百分比的主要用途是比较两个数。例如，2 是 4 的 50%，而 5 是 20 的 25%。

下面的模型很有用：

$$a = b \text{ 的 } p \text{ 百分比.}$$

这里：

- $b$  是基准数；
- $p$  是用小数形式表示的百分比；
- $a$  是与  $b$  进行比较的数。

写成方程形式，就是

$$a = p \cdot b.$$

### 练习：百分比方程

70 的 30% 是多少？

### 解答

我们使用方程

$$a = p \cdot b.$$

这里  $p = 0.30$  且  $b = 70$ ，所以

$$a = (0.30)(70) = 21.$$

因此，21 是 70 的 30%。

## 5.4 一个巧妙的百分比技巧

当我们问“ $b$  的  $p\%$  是多少？”时，我们是在计算

$$\frac{p}{100} \cdot b.$$

但乘法满足交换律，所以

$$\frac{p}{100} \cdot b = \frac{pb}{100} = \frac{bp}{100} = \frac{b}{100} \cdot p.$$

因此，

$$p\% \text{ of } b = b\% \text{ of } p.$$

### 百分比对称技巧

对于许多心算，记住下面这一点很有用：

$$p\% \text{ of } b = b\% \text{ of } p.$$

这并没有改变数学。它只是把计算换成了更容易在脑中完成的形式。

例如：

- 100 的 7% 与 7 的 100% 相同，等于 7。
- 50 的 21% 与 21 的 50% 相同，等于 10.5。
- 90 的 63% 与 63 的 90% 相同，等于  $63 - 6.3 = 56.7$ 。

### 练习：算术复习

计算下列各题。

(1)  $15 + 3$

(2)  $12 - 4$

(3)  $-7 + 3$

(4)  $|-3 - 4|$

(5)  $7 \times 3$

(6)  $14 \div 2$

(7)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

(8)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

(9)  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$

(10)  $0.07 = \frac{?}{100}$

(11)  $0.28 = \frac{?}{50}$

(12) 60 的 15%

## 解答

(1)

$$15 + 3 = 18.$$

(2)

$$12 - 4 = 8.$$

(3)

$$-7 + 3 = -4.$$

(4)

$$|-3 - 4| = |-7| = 7.$$

(5)

$$7 \times 3 = 21.$$

(6)

$$14 \div 2 = 7.$$

(7)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

(8)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(9)

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

(10)

$$0.07 = \frac{7}{100}.$$

(11) 因为

$$0.28 = \frac{28}{100} = \frac{14}{50},$$

所以

$$0.28 = \frac{14}{50}.$$

(12)

$$60 \text{ 的 } 15\% = 0.15 \cdot 60 = 9.$$