

Contents

1	数直線	2
1.1	不等式	3
1.2	絶対値	5
2	算術演算	6
2.1	加法	6
2.2	減法	7
2.3	乗法	7
2.4	除法	9
2.5	約数と素数	10
2.6	分配法則	10
2.7	累乗	11
2.8	演算の順序	12
3	分数	12
3.1	分数の簡約	13
3.2	分数の加法と減法	13
3.3	分数の乗法	14
3.4	分数の除法	14
4	小数	14
4.1	位取り	14
4.2	分数と小数の変換	15
4.3	小数の丸め	15
4.4	小数の計算	16
5	パーセンテージ	16
5.1	パーセンテージとは何か	16
5.2	パーセンテージ, 小数, 分数の変換	17
5.3	パーセンテージの方程式	18
5.4	便利なパーセンテージのトリック	18

前回の講義では、形式論理と真理値表を扱いました。この講義では、算術に戻ること、このコースの代数ブロックを始めます。算術は非常に基本的と感じられるかもしれませんが、これらの技術は後で扱う多くの内容の基礎になります。数えること、方程式、モデリング、金融、確率、統計はすべて、同じ基本的な数の言語に依存しています。今日の目標は、算術を難しく見せることなく、なじみのある考え方を明確に整理することです。数直線、不等式、算術演算、分数、小数、パーセンテージを復習します。

1 数直線

まず、ほとんど哲学的な問いから始めます。数とは何でしょうか。昔の数学者たちはこの問いにいくつかの答えを与えてきましたが、ここではそれらを詳しく扱いません。その代わりに、次のような立場を取ります。数とは、私たちが必要とするものなら何でもよい、というものです。

小さなところから、つまり量という考え方から始めましょう。人類の歴史のある時点で、私たちは同じ種類の物について、多い、少ない、ということがあると気づきました。例えば、ココナッツが三つあることはココナッツが二つあることより多く、バナナが二本あることはバナナが四本あることより少ないです。ある時点で、私たちは認識において大きな飛躍をしました。二つのココナッツと二本のバナナには何か共通するものがあると気づき、物理的な物から離れて数学の世界へ抽象化し、数という概念を導入したのです。1, 2, 3 などの数は、量を抽象的に表したものです。その後、私たちは何かが全くないということもありうると気づき、それを表すために数 0 も導入しました。数学者は、これらの「数える数」 $0, 1, 2, 3, \dots$ を自然数と呼び、その全体を表すために少し変わった文字 $\mathbb{N}$ を使います。

明らかな意味で、何かが 2 個あることは、それが 1 個あることより多いです。したがって、これらすべての自然数を並べる自然な方法があります。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & & \end{array}$$

さらに、これらの量を表す数には加法という演算があることに気づきました。もし私がバナナを 3 本持っていて、さらに 2 本集めたなら、合計で 5 本のバナナを持つことになります。しばらくすると、量を加えるだけでなく、量を取り除くという反対の操作も欲しいと考えるようになりました。これはもちろん減法です。減法を理解する一つの方法は、負の数を使うことです。もしバナナを 3 本持っていて、そこから一本取り除くなら、それは私たちの集まりに -1 を加えるようなものです。もちろんこれを続けることができるので、自然数のもう一つのコピーが、今度は反対方向に向かって存在することを発見します。

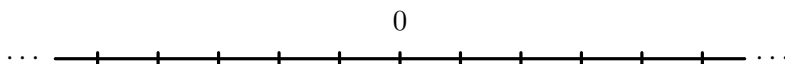
$$\begin{array}{ccccccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & \end{array}$$

この集まりを整数と呼び、その全体を表すために文字 $\mathbb{Z}$ を使います。

しばらくすると、現実世界の個々の物は分けることもできると気づきます。例えば、誕生日ケーキがあるとき、それを切り分けて別々の人に配る必要があるかもしれません。このことを考えると、何かの半分のような、量の比も表す方法が必要になります。これが有理数の一般的な定義を動機づけます。すなわち、有理数とは二つの整数の比 $\frac{a}{b}$ として書ける数のことで、ただし $b \neq 0$ です。数学者はすべての有理数の集まりを文字 $\mathbb{Q}$ で表します。整数はたくさんあるので、それらを組み合わせて比として書く方法も非常にたくさんあります。そこで、これらすべてを数の図の上に書き込むと、だいたい次のように見え始めます。



実際、これらの有理数は整数の周りに密に詰まっています。整数の近くをどれほど拡大しても、必ず近くに有理数を見つけることができます。驚くべきことに、有理数を何千年も扱った後、古代の数学者たちはこの図について非常に興味深いことを発見しました。それでもまだ隙間があるのです。実際、 $\sqrt{2}$ のような特別な数は存在するように見えるにもかかわらず、 $\frac{a}{b}$ という比として書くことができません。このような数を無理数と呼びます。上の図を取り、すべての無理数も含めることで「隙間を埋める」と、結果は連続した直線になります。



この連続した直線は、数の集まりとして理解すべきです。この直線上の任意の点是一个の数に対応しており、それは自然数かもしれませんし、整数かもしれませんし、有理数または無理数かもしれません。これらすべての集まりは実数として知られており、文字 $\mathbb{R}$ で表します。

すべての数を直線上に配置すると、数を順序づけられたものとして考えることができます。この順序は通常、記号 $<$ で表します。つまり、 $a < b$ と書くことは、数 a が数 b より小さいという意味です。幾何学的には、これは a が数直線上で b の左側にあることを意味します。ここまでの議論を次にまとめます。

実数

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書きます。これは数直線上に置くことのできるすべての数を含みます。重要な実数の種類には次のものがあります。

- **自然数:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- **整数:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **有理数:** 分数 $\frac{a}{b}$ として書ける数。ただし $a, b \in \mathbb{Z}$ であり、 $b \neq 0$ です。
- **無理数:** 分数として書けない実数。例えば $\sqrt{2}$, π , e などです。

1.1 不等式

数直線は、不等式を理解するための便利な方法を与えてくれます。例えば、不等式

$$2 < x$$

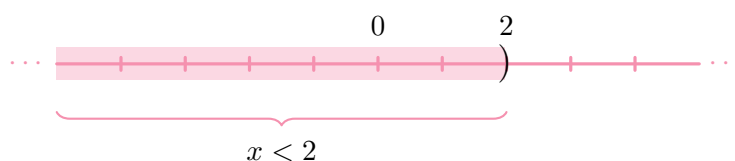
は、 x が 2 の右側にある実数であることを意味します。同じ意味で、これは $x > 2$ と書くこともできます。



同様に、不等式

$$x < 2$$

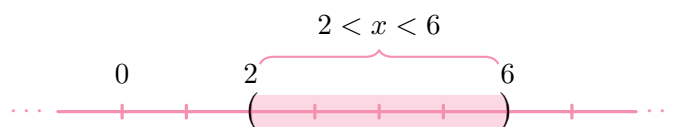
は、 x が 2 の左側にある実数であることを意味します。



二つの端点の間にある数を表すこともできます。例えば、

$$2 < x < 6$$

は、 x が 2 より大きく、6 より小さいことを意味します。



不等式と区間

次の解釈は便利です。

- $x < a$ は、 a の左側の値を意味します。
- $x > a$ は、 a の右側の値を意味します。
- $a < x < b$ は、 a と b の間の値を意味します。
- 角括弧は、端点を含むことを意味します。
- 丸括弧は、端点を含まないことを意味します。

例えば、 -2 と 5 の間にあるすべての実数で、 -2 を含み、 5 を含まないものは、

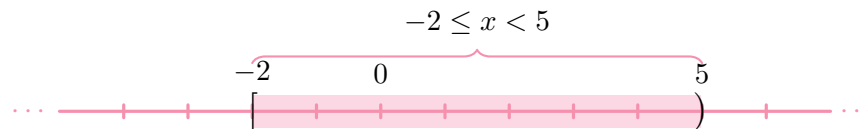
$$[-2, 5)$$

と書けます。

同じ区間は、不等式を使って

$$-2 \leq x < 5$$

と表すこともできます。



1.2 絶対値

「五つの大きな」演算に進む前に、絶対値という演算について簡単に説明します。非常に単純に言えば、絶対値は数の前にあるマイナス記号を取り除く演算です。この演算は二本の縦線で表します。例えば、

$$|-3| = 3, \quad \text{かつ} \quad |-8| = 8.$$

取り除くマイナス記号がない場合、絶対値の演算は何もしません。例えば、

$$|2| = 2, \quad \text{かつ} \quad |15| = 15.$$

実は、絶対値は数直線上で幾何学的な意味を持っています。それは距離を表す方法を与えてくれます。

距離としての絶対値

任意の数 $a \in \mathbb{R}$ に対して、絶対値 $|a|$ は、数直線上で a から 0 までの距離を表します。距離は決して負にならないので、常に

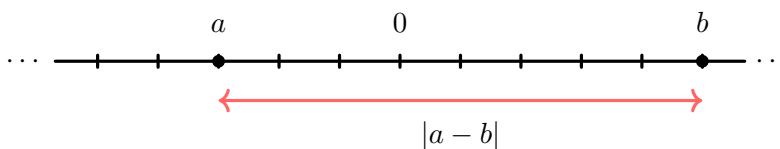
$$|a| \geq 0$$

が成り立ちます。

この考え方を使って、異なる実数の間の距離も計算できます。二つの数 a と b の間の距離は

$$|a - b|$$

で与えられます。図で見ると、演算 $|a - b|$ は次のようなことをしています。



演習 1

次を計算しなさい。

(1) $|-3|$

(2) $|7|$

(3) $-|4|$

(4) $-|-1|$

(5) $|0|$

(6) $-|3 - 5|$

2 算術演算

ここから、実数に対するいくつかの算術演算を説明していきます。実際には、実数直線に対してできることはたくさんあります。ここでは、五つの基本的な演算を導入します。それらは次のものです。

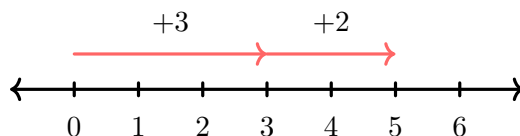
- (1) 加法: 量や変化を組み合わせること。
- (2) 減法: 差, または反対のものを加えること。
- (3) 乗法: 繰り返しの加法, または拡大縮小。
- (4) 除法: グループに分けること, または逆数を掛けること。
- (5) 累乗: 繰り返しの乗法。

2.1 加法

加法は二つの数を組み合わせて三つ目の数を作ります。もちろん, 加法は量の組み合わせとして理解することができます。例えば, $3 + 2 = 5$ は次のように理解できます。

$$\bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

しかし, 数直線上では, 3 と 2 を連続した長さとして解釈することもできます。すると, 加法はこれらの線分をつなげて, 長さ 5 のより長い線分を作ることになります。



どちらの解釈を使っても, すべての実数に対して成り立つ加法の基本的な性質を発見できます。以下は, そのうち重要な四つの性質です。

加法の性質

すべての実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立ちます。

- 交換法則:

$$a + b = b + a.$$

例えば, $3 + 5 = 5 + 3$ です。

- 結合法則:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

例えば, $(2 + 6) + 5 = 2 + (6 + 5)$ です。

- 加法単位元:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- 加法逆元:

$$a + (-a) = 0.$$

大きな非負整数については、繰り上がりのアルゴリズムを使って縦に足し算できることを思い出しましょう。例えば、

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 8 \\ \quad 6 \quad 2 \\ + \quad 5 \quad 3 \quad 6 \\ \hline 7 \quad 4 \quad 6 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 148 + 62 + 536 = 746.$$

ここでは、一番右の列から始めて、その列の数を足します。答えが 10 以上なら、次の列に追加の 1 を加え、同じ手順を列がなくなるまで繰り返します。

2.2 減法

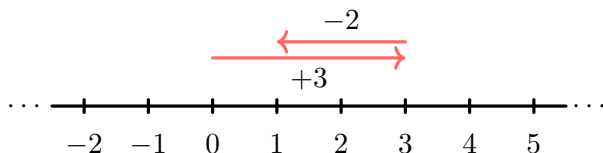
減法は、本質的には反対のものを加えることです。

$$3 - 2 = 3 + (-2).$$

このため、減法は加法逆元の性質と密接に関係しています。任意の実数 a に対して、ある量から a を引くことは、その量に数 $-a$ を加えることと同じです。この意味で、減法と加法は互いに反対の演算です。量の観点では、減法は単にものを取り除く行為です。例えば、 $3 - 2 = 1$ は次のようになります。

$$\bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet = \bullet$$

一方、数を連続した長さとして解釈するなら、減法は線分の一部を取り除くこと、あるいは同じこととして、反対方向の線分を加えることです。



二つの非負整数の減法問題では、借り下りのアルゴリズムを使うことができます。例えば、

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 17 \\ 1 \quad 4 \quad 7 \\ - \quad 2 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 8 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 147 - 29 = 118.$$

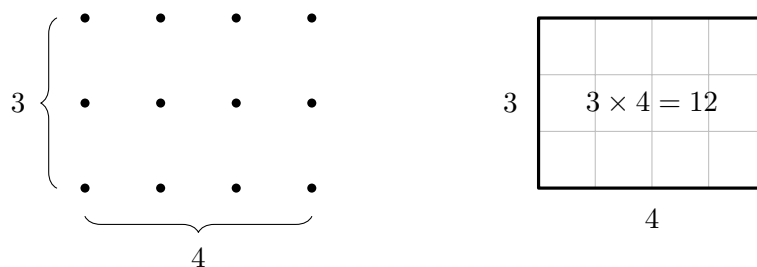
ここでの考え方は、一の位の 7 は 9 を引くには小さすぎるので、十の位から 1 十を「借りる」というものです。これにより、47 は 3 十と 17 一になります。

2.3 乗法

正の整数 a と b に対して、乗法は単に加法を繰り返し適用することです。

$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ 回}}.$$

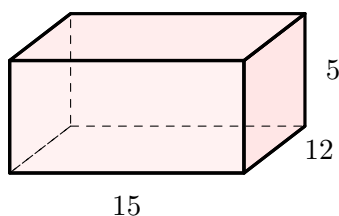
乗法は $a \times b$ または $a \cdot b$ と書くことが多いです。乗法にも幾何学的な意味があります。長さが線分で表されるなら、二つの長さの積は二次元の面積を与えます。



三つの長さの積は体積を与えます。例えば、長さ 15、幅 12、高さ 5 の直方体の体積は

$$15 \times 12 \times 5 = 900$$

です。



加法と同じように、乗法にも重要な性質があります。

乗法の性質

すべての実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立ちます。

- 交換法則:

$$ab = ba.$$

例えば、 $4 \cdot (-7) = (-7) \cdot 4$ です。

- 結合法則:

$$(ab)c = a(bc).$$

例えば、 $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$ です。

- 乗法単位元:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- 乗法逆元:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \quad a \neq 0.$$

同じことを、

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$$

と書くこともできます。

大きな整数については、別の縦型アルゴリズムを使って掛け算できます。例えば、

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 14 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 322 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 23 \times 14 = 322.$$

これは演習クラスでさらに練習します。

2.4 除法

減法が本質的には加法の別の形であるのと同じ意味で、除法は本質的には乗法の別の形です。今度は上の乗法逆元の性質を使います。ゼロでない数で割ることは、その逆数を掛けることと同じです。

$$8 \div 2 = 8 \times 2^{-1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

除法の用語

ある数をゼロでない数で割った結果を**商**と呼びます。割り算

$$30 \div 6$$

は、

$$30/6 \quad \text{または} \quad \frac{30}{6}$$

とも書けます。式 $30 \div 6$ において、数 30 は**被除数**、6 は**除数**です。分数 $\frac{30}{6}$ において、数 30 は**分子**、6 は**分母**です。

除法についての重要な規則には次のものがあります。

- 0 をゼロでない整数で割ると 0 になります。
- ゼロでない整数を 0 で割ることは定義されません。
- 同じ符号を持つ二つのゼロでない整数の商は正です。
- 異なる符号を持つ二つのゼロでない整数の商は負です。

例えば、

$$\frac{-42}{-6} = 7, \quad 36 \div (-9) = -4, \quad 0 \div (-13) = 0, \quad -97 \div 0 \text{ は定義されません.}$$

大きな数については、筆算の割り算を使うことができます。例えば、

$$\begin{array}{r} 27 \\ 13 \overline{) 351} \\ \underline{26} \\ 91 \\ \underline{91} \\ 0 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 351 \div 13 = 27.$$

2.5 約数と素数

約数と素数

a と b を正の整数とします。 a が b を割り切るとき、 a は b の**因数**または**約数**であると言います。

例えば、1, 2, 3, および 6 は 6 の約数です。

正の整数は次のように分類できます。

- 数 1 は素数でも合成数でもありません。
- **素数**とは、1 より大きい整数で、正の約数が 1 と自分自身だけであるものです。
- **合成数**とは、1 より大きい整数で、正の約数を三つ以上持つものです。

すべての合成数は素数の積として書くことができます。これをその数の**素分解**または**素因数分解**と呼びます。例えば、

$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

同様に、

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

1 より大きい整数の素分解は、順序を除いて常に一意です。したがって、ある意味でその数を特徴づけます。これが素数を「素」と呼ぶ理由です。素数は、それらの積を取ることで、1 より大きいすべての整数を作るために使えるのです。

演習 2

それぞれの数を素因数分解しなさい。

(1) 68

(2) 133

(3) 43

2.6 分配法則

分配法則は、乗法が加法とどのように相互作用するかを説明します。

$$a(b + c) = ab + ac.$$

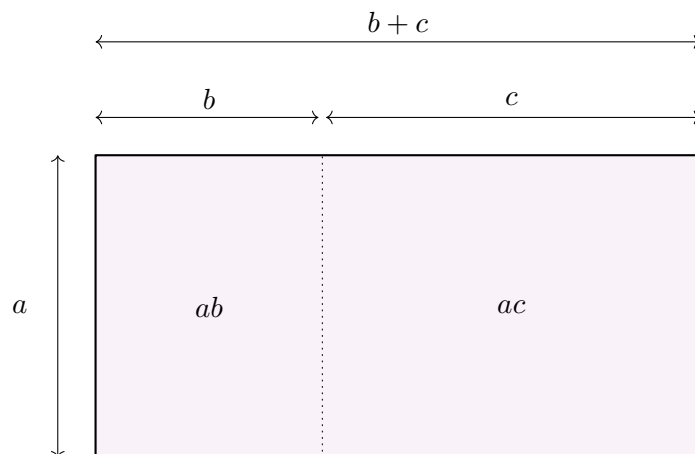
同様に、

$$(a + b)c = ac + bc.$$

例えば、

$$3(8 + 5) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5.$$

分配法則には幾何学的な解釈があります。一つの大きな長方形の面積を、二つの小さな長方形の面積に分けることができます。



全体の面積は、二つの同値な方法で計算できます。

$$\text{全体の面積} = a(b+c)$$

または

$$\text{全体の面積} = ab + ac.$$

したがって、

$$a(b+c) = ab + ac.$$

2.7 累乗

乗法は繰り返しの加法です。正の整数 b に対して、累乗は繰り返しの乗法です。

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ 回}}.$$

ここで、 a は底、 b は指数と呼ばれます。

例えば、

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

指数法則

ゼロでない実数 a と b 、および整数 m と n に対して、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n. \end{aligned}$$

例えば、

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

これらの規則は後の講義で詳しく扱います。今のところは、それらが存在することを覚えておけば十分です。

2.8 演算の順序

一つの式にいくつかの演算が含まれているとき、それを評価するための標準的な順序が必要です。

演算の順序

通常、演算の順序は次の通りです。

- (1) まず括弧,
- (2) 次に指数,
- (3) 次に乗法と除法,
- (4) 最後に加法と減法。

英語では PEMDAS という略語がよく使われます。

例として、ある実数 a があり、次のような式を書くとします。

$$3(a - 7)^2 + 2.$$

演算の順序に従うと、これは次の意味になります。

まず 7 を引き、その結果を二乗し、それに 3 を掛け、最後に 2 を加える。

負の数と括弧を扱うときは注意する必要があります。例えば、次を見てください。

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9,$$

しかし、

$$-3^2 = -(3^2) = -9,$$

です。後者では、マイナス記号よりも先に指数が作用するからです。

演習 3

次を計算しなさい。

(1) -3^2

(2) $(-3)^2$

(3) $5 + 2^2$

(4) $(5 + 2)^2$

(5) $3 \cdot 2^2$

(6) $(3 \cdot 2)^2$

3 分数

分数

$$\frac{a}{b}$$

は $a \div b$ を意味します。ただし $b \neq 0$ です。分数は次のものを表すことができます。

- 全体の一部,
- 比,

- 「～あたり」のような割合。

例えば,

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

3.1 分数の簡約

分数を簡約するには、分子と分母を同じゼロでない数で割ります。目標は、分子と分母が1以外の共通因数を持たないような、最も簡単な形で分数を書くことです。

例えば,

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}.$$

一つの方法は、素因数分解を使うことです。

$$\frac{25}{100} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

もう一つの方法は、最大公約数を使うことです。二つの正の整数の最大公約数とは、その両方を割り切る最大の数です。例えば、14 と 21 の最大公約数は7なので、

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

3.2 分数の加法と減法

分数を足したり引いたりするには、ゼロでない共通分母が必要です。

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

分母が異なる場合、分数を共通分母を使って書き直します。例えば,

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8},$$

また、図で見ると次のようになります。



見て分かるように、四分の一を八分のいくつかとして表すために、二つ目のピザをさらに分割しました。より一般に、 $c, d \neq 0$ のとき、

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

3.3 分数の乗法

分数を掛けるには、分子どうしを掛け、分母どうしを掛けます。ただし分母はゼロでないものとします。

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

例えば、

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

3.4 分数の除法

ゼロでない数で割ることは、その逆数を掛けることです。

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b, c, d \neq 0.$$

例えば、

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

演習 4

次を計算しなさい。

(1) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$

(2) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$

(3) $\frac{6}{3} \div \frac{1}{2}$

(4) $\frac{18}{24}$

(5) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

(6) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9}$

4 小数

4.1 位取り

小数点の右側にある数字は、十分の一、百分の一、千分の一、というような位を表します。例えば、

$$0.4 = \frac{4}{10}, \quad 0.04 = \frac{4}{100}.$$

同様に、

$$2.305 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

数	一の位	十分の一	百分の一	千分の一
2.305	2	3	0	5

4.2 分数と小数の変換

分母が 10, 100, 1000, ... である場合, 小数への変換はすぐにできます。例えば,

$$\frac{7}{100} = 0.07.$$

そうでない場合, 割り算によって分数を小数に変換できます。例えば,

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

重要な点は, 分数と小数はしばしば同じ数を表す二つの異なる書き方であるということです。例えば,

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{3}{4} = 0.75.$$

4.3 小数の丸め

小数の丸め

小数を丸めるには, 次のようにします。

- 次の桁が 5 より小さい場合, 切り捨てます。
- 次の桁が 5 以上の場合, 切り上げます。

「小数第 n 位まで丸める」という表現は, 答えが小数点の後に n 個の数字を持つべきであるという意味です。

例えば, 数

$$4.85731$$

を考えます。このとき,

- 小数第 2 位まで丸めると,

$$4.85731 \approx 4.86;$$

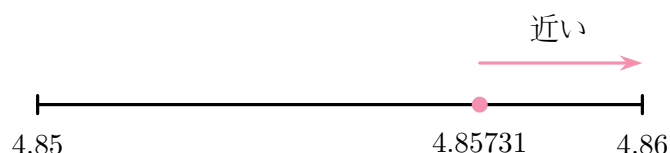
- 小数第 3 位まで丸めると,

$$4.85731 \approx 4.857;$$

- 小数第 4 位まで丸めると,

$$4.85731 \approx 4.8573.$$

丸めを理解するもう一つの方法は, 近くにあるどの数の方が近いかを選んで, と考えることです。例えば, 4.85731 を小数第 2 位まで丸めるとき, 4.85 と 4.86 を比較しています。



4.4 小数の計算

小数は、前と同じ縦型アルゴリズムを使って、足したり、引いたり、掛けたり、割ったりできます。追加で重要なのは、小数点の位置を注意深く追うことです。

例えば、

$$0.58 + 1.06 = 1.64.$$

10 を掛けると小数点は一つ右に移動し、10 で割ると小数点は一つ左に移動します。例えば、

$$4.56 \times 100 = 456.$$

計算の前に概算することはよい習慣です。例えば、

$$19.8 \times 3.1$$

は

$$20 \times 3 = 60$$

に近いはずですが。これは、最終的な答えが 60 から大きく外れているなら、計算を確認するべきだと教えてくれます。

演習：小数

次を計算しなさい。

(a) $0.58 + 1.06$

(b) $\frac{7}{100}$ を小数に変換しなさい。

(c) $\frac{3}{4}$ を小数に変換しなさい。

(d) 4.85731 を小数第 2 位まで丸めなさい。

(e) 4.85731 を小数第 3 位まで丸めなさい。

(f) 4.85731 を小数第 4 位まで丸めなさい。

解答

(a) $0.58 + 1.06 = 1.64.$

(b) $\frac{7}{100} = 0.07.$

(c) $\frac{3}{4} = 0.75.$

(d) $4.85731 \approx 4.86.$

(e) $4.85731 \approx 4.857.$

(f) $4.85731 \approx 4.8573.$

5 パーセンテージ

5.1 パーセンテージとは何か

「percent」という言葉は、文字通り「百あたり」を意味します。「cent」という語は、「century」という語と同じように 100 を意味します。したがって、パーセントとは、百に対する部分の数です。

例えば、

$$25\% = 0.25 = \frac{25}{100}.$$

同様に,

$$100\% = 1.00 = \frac{100}{100}.$$

パーセンテージ

パーセンテージは, 数を 100 に対する量として書く方法です。例えば,

$$37\% = \frac{37}{100} = 0.37.$$

5.2 パーセンテージ, 小数, 分数の変換

パーセンテージを小数の形に変換するには, 小数点を二つ左へ動かします。例えば,

$$100\% = 1.00, \quad 25\% = 0.25, \quad 3.5\% = 0.035.$$

小数をパーセンテージに変換するには, 小数点を二つ右へ動かします。例えば,

$$1.00 = 100\%, \quad 1.20 = 120\%, \quad 0.005 = 0.5\%.$$

演習: パーセントへの変換

次をパーセントに変換しなさい。

(a) 1.20

(b) $\frac{3}{5}$

解答

(a)

$$1.20 = \frac{120}{100} = 120\%.$$

(b)

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

演習: パーセントからの変換

(a) 3.5% を小数に変換しなさい。

(b) 55% を分数に変換しなさい。

解答

(a)

$$3.5\% = \frac{3.5}{100} = \frac{35}{1000} = 0.035.$$

(b)

$$55\% = \frac{55}{100} = \frac{5 \cdot 11}{5 \cdot 20} = \frac{11}{20}.$$

5.3 パーセンテージの方程式

パーセンテージの主な用途は、二つの数を比較することです。例えば、2 は 4 の 50% であり、5 は 20 の 25% です。

次のモデルが役に立ちます。

$a = b$ の p パーセント。

ここで、

- b は基準となる数です。
- p は小数の形で書かれたパーセントです。
- a は b と比較されている数です。

方程式の形では、これは

$$a = p \cdot b$$

となります。

演習：パーセンテージの方程式

70 の 30% はいくつですか。

解答

方程式

$$a = p \cdot b$$

を使います。ここでは $p = 0.30$ かつ $b = 70$ なので、

$$a = (0.30)(70) = 21.$$

したがって、21 は 70 の 30% です。

5.4 便利なパーセンテージのトリック

「 b の $p\%$ は何か」と問うとき、私たちは

$$\frac{p}{100} \cdot b$$

を計算しています。しかし乗法は交換可能なので、

$$\frac{p}{100} \cdot b = \frac{pb}{100} = \frac{bp}{100} = \frac{b}{100} \cdot p.$$

したがって、

$$p\% \text{ of } b = b\% \text{ of } p.$$

パーセンテージの対称性トリック

暗算では、次を覚えておくと便利です。

$$p\% \text{ of } b = b\% \text{ of } p.$$

これは数学を変えているわけではありません。頭の中で計算しやすい方に、計算を置き換えているだけです。

例えば、

- 100 の 7% は、7 の 100% と同じであり、これは 7 です。
- 50 の 21% は、21 の 50% と同じであり、これは 10.5 です。
- 90 の 63% は、63 の 90% と同じであり、これは $63 - 6.3 = 56.7$ です。

演習：算術の復習

次を計算しなさい。

(1) $15 + 3$

(2) $12 - 4$

(3) $-7 + 3$

(4) $|-3 - 4|$

(5) 7×3

(6) $14 \div 2$

(7) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

(8) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

(9) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$

(10) $0.07 = \frac{?}{100}$

(11) $0.28 = \frac{?}{50}$

(12) 60 の 15%

解答

(1)

$$15 + 3 = 18.$$

(2)

$$12 - 4 = 8.$$

(3)

$$-7 + 3 = -4.$$

(4)

$$|-3 - 4| = |-7| = 7.$$

(5)

$$7 \times 3 = 21.$$

(6)

$$14 \div 2 = 7.$$

(7)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

(8)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(9)

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

(10)

$$0.07 = \frac{7}{100}.$$

(11)

$$0.28 = \frac{28}{100} = \frac{14}{50}$$

なので,

$$0.28 = \frac{14}{50}.$$

(12)

$$60 \text{ の } 15\% = 0.15 \cdot 60 = 9.$$