MAT120：数量的推論　第5講ハンドアウト

数と数え上げ

今日は、代数に関する三つの講義のうち二つ目を扱います。実は、この講義は少し楽しい内容です。というのも、代数から少し離れて、代わりに「数」と「数えること」という概念を学ぶからです。これは一見すると、わざわざ話すほどのことではないように聞こえるかもしれません。しかし、決してそうではありません。この講義の終わりまでには、最先端の数学者がこれらの概念をどのように考えているのかが分かるようになります。また、おそらく皆さんがこれまで聞いたことのある数学の中でも、最も深く、そして意外な数学の一部も紹介します。

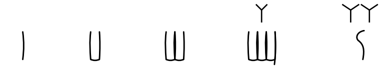
1　ほかの記数法で数える

これまでの講義で、私は「記号」と「意味」の違いについて話しました。この二つを表す専門的な言葉は「統語論」と「意味論」です。どんな言語にも記号があり、その記号には解釈が与えられます。命題論理もこれと同じでした。この「形式言語」には記号、つまり文字、結合子、括弧があり、それらは持っている真理値によって意味を持っていました。ある意味では、数の体系もまた言語の一種だと考えることができます。そこには記号、たとえば1, 2, 3 などがあり、それらは意味を持っています。例えば、記号「3」は三という数を意味します。この節では、私たちの数字がどれほど恣意的なものなのかを見ていきます。

1.1　数字の簡単な歴史

歴史を通じて、数を表す方法はほかにもたくさんありました。現在得られている最古の証拠によれば、数を表す最初期の方法は「タリー方式」だったと考えられています。これは本質的には、量を数えるための線の集まりです。タリー方式の最古級の例の一つは、約二万年から二万五千年前のものです。現代のコンゴで発見されたイシャンゴの骨は、多くの刻み目が彫られた動物の骨です。骨の一端には取り外し可能な水晶が付いており、明らかに意図的な使用があったことを示しています。これらの刻み目は月の周期を表していた、あるいは月経周期を記録するために使われていた、という説があります。歴史の謎を最終的に知ることはできませんが、少し想像を楽しんで、知られている最初の数学者はアフリカの女性たちだったのかもしれない、と言うこともできます。

歴史を早送りすると、世界各地で多くの種類の記数法が独立に現れました。古代中国では、現代の文字体系の原型が現れつつあり、これもまた小さな量を表すためのタリー方式の一種でした。数を書くためのほかの体系は、バビロニア、古代ギリシア、古代ローマ、インドなどでも見つかっており、それぞれ互いに非常に異なった見た目をしています。しかし、これらの体系の多くは、小さな数をタリー方式で表すところから始まっています。だいたい4 を超えると、数をその個数そのものによって表すのは面倒で非効率になるため、より抽象的な記号が導入されました。下の表で、古代世界の文字体系が1, 2, 3 を表すときにどれほど似ているかを観察してください。

文化	最古の証拠	1	2	3	4	5
イシャンゴの骨	~紀元前20000年	I	II	III	IIII	IIIII
バビロニア	~紀元前2000年	𒐕	𒐖	𒐗	𒐘	𒐙
エジプト（ヒエラティック）	~紀元前2500年					
中国（甲骨文字）	~紀元前1200年	一	二	三	亖	ㄨ
中国（算木）	~紀元前200年	I	II	III	IIII	—
アテネ（アッティカ式）	~紀元前500年	I	II	III	IIII	Π
ローマ	~紀元前500年	I	II	III	IV	V
メソアメリカ	~紀元前300年	•	••	•••	••••	▬

1.2　基数

現代世界で最も一般的な書き方は、よく知っている記号$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ を使うものです。この書き方は「インド・アラビア数字」と呼ばれます。これは、中世にヨーロッパへ伝わった古いアラビアとインドの体系が混ざったものだからです。私たちが数を表すために使っている記号は恣意的です。まったく違う記号であっても、数の体系は問題なく機能します。インド・アラビア数字の強さは記号そのものにあるのではなく、その背後にある体系にあります。これを少し詳しく見ていきましょう。

例えば2173 という数を考えます。私たちは頭の中で、これを「二千百七十三」と読みます。これを数学的に分解すると、

$$2173 = 2 \times 1000 + 1 \times 100 + 7 \times 10 + 3.$$

したがって、実は私たちは数を10 の累乗で表しています。これをもう少し明確にするために、$1 = 10^0$、$100 = 10^2$、$1000 = 10^3$ であることを思い出しましょう。すると、2173 は10 の累乗の組み合わせとして次のように書き直せます。

$$2173 = 2 \times 1000 + 1 \times 100 + 7 \times 10 + 3 = 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0.$$

実際、私たちが数を書くときには、右から順に10 の累乗が大きくなっていく列に数字を置いています。このような数学的体系は「十進法」と呼ばれます。なぜなら、10 が各列で何をするかを決める基本的な数だからです。十進法では、一つの列の中で使われる数字には十個の異なる記号、つまり$0, 1, \cdots, 9$ があります。

1.2.1　宇宙人

私たちが十進法で数学を行うことには、よい理由があります。人間には指が10 本あるので、指を使って数えるのは人間にとってかなり自然だからです。しかし、数学的な観点から見ると、十進法にこだわる特別な理由はまったくありません。これを見るために、次の考えを考えてみましょう。

星々の中にある遠い惑星を想像してください。その惑星には宇宙人が住んでいて、その宇宙人は奇妙な姿をしており、体の作りが私たちとは違います。彼らには二本の腕がありますが、それぞれの手には指が4 本しかありません。この宇宙人の種族も、私たちと同じように数えることを学ぶかもしれません。つまり、宇宙人の指を順番に数えていき、最後の指まで到達したら、書き方の次の列へ進むという方法です。しかし、それぞれの手に4 本の指しかないので、この宇宙人たちは8 本目の指で止まり、次の列でまた最初から始めるでしょう。

例として、この宇宙人たちが2173 という数をまったく違う方法でどのように書くかを示しましょう。2173 を10 の累乗の和として表す代わりに、彼らはそれを8 の累乗の和に分解します。

$$\begin{aligned} 2173 &= 2048 + 64 + 56 + 5 \\ &= {\color{red}4} \times 8^3 + {\color{red}1} \times 8^2 + {\color{red}7} \times 8^1 + {\color{red}5} \times 8^0 \end{aligned}$$

8 の累乗が一つ増えるごとに、新しい列が一つ生まれます。そして、その累乗に掛ける数が、私たちが「2173」と呼ぶ同じ数の別の数値表現になります。宇宙人によれば、「二千百七十三」

は彼らの八進法では「4175」と書かれることになります。

この宇宙人たちは、十進法で数えている私たちを「変な人間たち」と呼ぶかもしれません。彼らは「グリブ・グロブ・グリブ・グロブ」のように言うかもしれません。英語に訳すなら「うわ、人間たちの数え方は変だな。7 の後に余分な記号が二つあって、それを使ってさらに数え続けている！」という感じです。では、ここで正しいのは誰でしょうか。私たちでしょうか、それとも彼らでしょうか。答えは、どちらも「普遍的」な体系を使っているわけではない、ということです。私たちはただ、自分たちにとってうまく機能する体系を採用しているだけです。

1.2.2 ほかの基数

前の例から、十進法にこだわる理由がまったくないことが分かるはずです。一般に、別の基数を選ぶこともできます。それをb と呼びましょう。そして、「2173」を基数b の数に変換するには、それをb の累乗の和として書けばよいです。

$$2173 = a_k \times b^k + a_{k-1} \times b^{k-1} + \cdots + a_1 \times b + a_0 \times b^0.$$

b の大きさによって、2173 に到達するために必要なb の累乗の個数は多くなったり少なくなったりします。そして、2173 を基数b で表すと、$a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$（基数$b$）となります。また、基数$b$ で使える数字は$0, 1, \ldots, (b-1)$ だけであることにも注意してください。

例

数211（十進法）を考え、これを五進法で書いてみましょう。211 を五進法で書くには、まずそれを5 の累乗の和として表す必要があります。まず、$5^2 = 25$、$5^3 = 125$、$5^4 = 625$ であることを思い出します。数211 は5^4 より小さいので、211 を五進法で表すために5 の4^{th} 乗まで行く必要はありません。したがって、和は次のような形になると考えられます。

$$\begin{aligned} 211 &= a_3 \times 5^3 + a_2 \times 5^2 + a_1 \times 5^1 + a_0 \times 5^0 \\ &= a_3 \times 125 + a_2 \times 25 + a_1 \times 5 + a_0 \times 1. \end{aligned}$$

ここで、$2 \times 125 = 250$ は211 より大きいので、この和では125 を一つだけ使えばよいことが分かります。つまり$a_3 = 1$ です。次に差$211 - 125 = 86$ を取り、

$$86 = a_2 \times 5^2 + a_1 \times 5^1 + a_0 \times 5^0$$

と書くことを考えます。ここでも利用できる最大の累乗から始めます。それは$5^2 = 25$ です。$4 \times 25 = 100$ ですが、$3 \times 25 = 75$ なので、86 を作るには$5^2 = 25$ を3 個使う必要があります。したがって$a_2 = 3$ です。次に差$86 - 75 = 11$ を取って同じ考えを繰り返します。今度は$11 = a_1 \times 5^1 + a_0 \times 5^0$ と表したいです。幸い、$11 = 2 \times 5 + 1$ なので、$a_1 = 2$、$a_0 = 1$ です。これらをまとめると、

$$\begin{aligned} 211 &= 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\ &= 1 \times 125 + 3 \times 25 + 2 \times 5 + 1 \times 1 \end{aligned}$$

したがって、211 は五進法では「1321」と書きます。

1.3 二進法で数える

二進法で数えるという考えを見ていきます。「binary」という言葉は、最終的にはラテン語の「bini」に由来しており、これは「二つのものが一緒にある」というような意味です。現代英語では、ここから接頭辞「bi」が来ています。bicycle、biannual、binoculars などに使われています。私たちの文脈では、二進法とは基数2 で数える体系のことです。これは$b = 2$ であり、したがって数えるために使う数字は0 と1 の二つだけである、という意味です。言い換えれば、二進法では、ほかのすべての数を表すために0 と1 の組み合わせだけを使います。例えば「11」は「3」の書き方であり、「101」は「5」の書き方です。もちろん、通常十進法で書けるほかのすべての数も、二進法へ「翻訳」することができます。

1.3.1 十進法から二進法への変換

先ほど、

$$2173 = 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

であることを見ました。この場合、数2173 は10 の累乗を足し合わせることで表すことができ、しかもその表し方は一意的です。二進法に変えたいなら、これらの「10^n」の項を「2^n」の項に置き換える必要があります。2 は10 より小さいので、2173 まで到達するためには2 の累乗が3 個より多く必要になると予想できます。実際、電卓を使えば、

$$2173 = 2048 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1$$

であることを確認できます。より明示的に書くと、2173 を表すためには2 の11 乗まで使う必要があります。

$$\begin{aligned} 2173 = {} & 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 0 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 \\ & + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0. \end{aligned}$$

したがって、数2173 を二進法で書き直すには、数字を十二個並べる必要があります。2173 の二進法表記は100001111101（二進法）です。

2 の累乗の前にある係数が、いつも1 または0 だけであることに注意してください。なぜでしょうか。もしもっと大きな数、例えば2 を掛けようとすると、それは2 の累乗を一段上げるだけで、次の2 の累乗に吸収されてしまうからです。

1.3.2 一般的な規則

二進法に変換する一般的な規則は、その数を2 の累乗を大きいものから順に使って書くことです。それぞれの2 の累乗の前に来る数は1 または0 になり、これらの数字を並べたものが、最初に与えられた十進法の数の二進法表記になります。

数を二進法に変換するには、1.2.2節の例で説明した一般的な方法に従います。例えば、17 を二進法で書きたいとします。2 の累乗は$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ です。見て分かるように、17 は16 と32 の間にあるので、17 を二進法で表すために32 まで行く必要はありません。実際、$17 = 16 + 1$ であることが分かるので、17 をすべての二進法の桁を使って書くと、

$$17 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0.$$

したがって、17 の二進法表記は10001 です。

練習問題

次の数を二進法で書きなさい。

1. 4
2. 7
3. 5

解答

$$4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \quad \text{したがって}100\text{（二進法）と書く}$$
$$7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \quad \text{したがって}111\text{（二進法）と書く}$$
$$5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \quad \text{したがって}101\text{（二進法）と書く}$$

1.3.3　二進法の利点

二進法で3 まで数えてみましょう。$0, 1, 2, 3$ は$00, 01, 10, 11$ になります。これらを一列に書き出すと、突然、真理値表にとてもよく似たものが現れます。もう少しはっきりさせるために、$0 = \mathrm{F}$、$1 = \mathrm{T}$ だと考えてみましょう。すると「FF, FT, TF, TT」は、二進法で0 から3 まで数えていることになります。

これは偶然ではありません。二進数は、コンピュータで数える方法として使われています。つまり、$0 =$「オフ」、$1 =$「オン」であり、これは電気信号が取りうる二つの状態（高電圧／低電圧）です。コンピュータはこれらのオン／オフ信号を論理によって解釈します。信号を組み合わせ、その組み合わせから新しい信号を作るための規則は少数しかありません。そのため、現代のコンピュータは、特別な名前を持つ何百万もの小さな機械からできています。それらは論理ゲートと呼ばれます。論理ゲートは数種類しかなく、私たちの真理値表とまったく同じように働きます。だからこそ、真理値表とは何かを説明するために鳥居を使ったのです。コンピュータの内部には、文字通り、真理値表とまったく同じように振る舞う小さな部品が何百万個もあります。したがって、二進法で数えるというこの考えは、コンピュータにとって非常に役に立ちます。

1.4　ほかの基数体系

歴史的には、多くの異なる種類の基数体系がありました。例えばバビロニア人は六十進法で数えていました。これは今では少し奇妙に見えるかもしれませんが、当時の彼らは非常に多くの成果を生み出しました。バビロニア人は、何千年も後の今日でも私たちが使っている、さまざまな数学的・科学的体系を作り出しました。例えば、円が360 度である理由、また一時間が60 分に分けられ、一分が60 秒に分けられる理由は、バビロニア人にあります。

コンピュータは、もう一つ別の記数法も使います。それは十六進法で、英語では「hexadecimal」とも呼ばれます。その理由は、コンピュータは2 の累乗の組み合わせで数えることを好み、その方が効率的に動作できるからです。この場合、少し面白い問題が生じます。私たちは普段、十進法でしか数えないので、数を書くための記号は$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ の十個しかありません。十六進法で数えると、使える記号が足りなくなってしまいます。そこで、十六進法では10 から15 までの数を表すために別の記号を使わなければなりません。最も一般的な体系では、大文字のA,B,C,D,E,F を使います。つまり、A は十、B は十一、という具合です。だからPhotoshop

のようなコンピュータプログラムでは、色が「0FA123」のようなデータの列で表されます。これは実は十六進法の数です。

2　組み合わせを数える

朝食を食べ終えて、その日に何を着るか決めているとします。5 種類のシャツと3 種類のズボンから選べます。この選択肢から、何通りの服装を作ることができるでしょうか。

これを少し数学的な記法で書いてみましょう。五つの異なるシャツをs_1, s_2, s_3, s_4, s_5 と名付け、三つの異なるズボンをt_1, t_2, t_3 と名付けます。一つの服装は、それぞれから一つずつ選ぶことなので、対として書くことができます。例えば(s_3, t_2) は、三番目のシャツと二番目のズボンを選んだという意味です。今、最初のシャツs_1 を選ぶと決めたとします。すると、服装の選択肢は三つあり、それらは三つのズボンに対応します。つまり$(s_1, t_1), (s_1, t_2), (s_1, t_3)$ です。同様に、二番目のシャツを選ぶなら、そこから作れる服装も三つあり、$(s_2, t_1), (s_2, t_2), (s_2, t_3)$ です。この考え方はすべてのシャツについて成り立つので、すべての選択肢を次のような表に並べることができます。

$$\begin{array}{ccccc}
(s_1, t_1) & (s_2, t_1) & (s_3, t_1) & (s_4, t_1) & (s_5, t_1) \\
(s_1, t_2) & (s_2, t_2) & (s_3, t_2) & (s_4, t_2) & (s_5, t_2) \\
(s_1, t_3) & (s_2, t_3) & (s_3, t_3) & (s_4, t_3) & (s_5, t_3)
\end{array}$$

見て分かるように、この表の中の総数はちょうど15 であり、これは可能なシャツの数と可能なズボンの数を掛けたものです。

この「乗法原理」は一般に成り立ちます。二段階で選択を行う場合、可能な結果の数は、第一段階での選択肢の数と第二段階での選択肢の数の積で与えられます。記号で書くと、第一段階のm 個の選択肢それぞれに第二段階のn 個の選択肢があるなら、組み合わせの総数は$m \cdot n$ です。この考えは、二段階より多い選択にも成り立ちます。次の例がそれを示しています。

例

命題論理の式$(p \wedge q) \to (r \wedge (s \vee t))$ を考えます。この場合、T またはF の値を取りうる命題変数が5 個あります。$(p \wedge q) \to (r \wedge (s \vee t))$ の真理値表は、命題変数が取りうるT とF のすべての組み合わせを考え、それぞれの場合に式の真理値を評価します。この場合、それぞれの変数文字について二つの可能な「選択」、つまりT またはF があり、文字は全部で5 個あります。したがって、可能性の総数は$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ です。つまり、式$(p \wedge q) \to (r \wedge (s \vee t))$ に対応する真理値表には32 行が必要になります。

以下では、連続する選択が可能性の数を変化させ、その結果として可能な組み合わせの数が変わる、より複雑な状況を見ていきます。

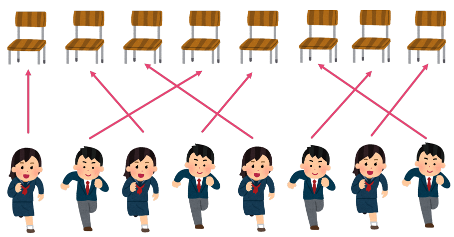
階乗記法

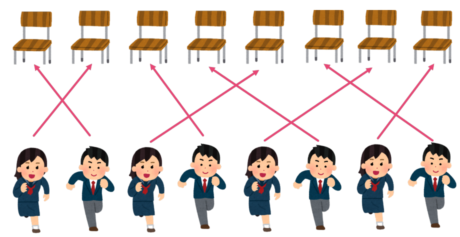
ほかのことに進む前に、まず新しい記法を導入する必要があります。それが階乗です。簡単に言えば、階乗とは、正の整数を、それより小さいすべての正の整数と掛け合わせ、1 まで下がっていく操作です。例えば、「4 の階乗」は$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ であり、「8 の階乗」

は$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ です。1 で止めるのは、もし0 まで行ってしまうと0 を掛けることになり、答えも0 になってしまうからです。階乗記法は感嘆符を使って書きます。つまり、「n の階乗」は数学的には$n!$ と書きます。n が2 より大きいとき、階乗$n!$ は常にn 自身より大きくなり、実際にはたいていずっと大きくなります。

2.1 8 人の学生と8 脚の椅子を使って順列を数える

オコンネル先生が、8 人の学生がいる新しいクラスを担当しているとします。教室には8 脚の椅子があります。オコンネル先生は、学生を教室の椅子に割り当てることで「座席配置」を作ることにしました。例えば、下の画像には二つの可能な座席配置が示されています。





8 脚の椅子に学生を割り当てる方法は何通りあるでしょうか。言い換えると、可能な「座席配置」は何通りあるでしょうか。これを計算してみましょう。

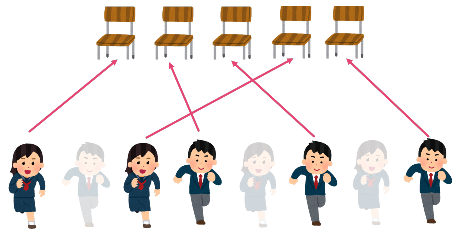
- **一番目の椅子：** 学生が8 人いるので、一番目の椅子に座る学生の選び方は8 通りあります。つまり、一番目の椅子には8 個の可能な選択があります。そこで、オコンネル先生は学生を一人選び、その学生を一番目の椅子に座らせます。
- **二番目の椅子：** 一人の学生がすでに一番目の椅子に座ったので、二番目の椅子に座れる学生は7 人だけになります。再び、オコンネル先生は学生を一人選び、その学生を座らせます。
- **一般的な手順：** この手順を何度も繰り返し、それぞれの椅子に一人ずつ学生を座らせると、選択肢の数が毎回一つずつ減っていくことが分かります。最終的に、7 脚の椅子が割り当てられた後には、可能な選択肢は一つだけ残ります。最後の学生は、最後に残った椅子に座らなければなりません。したがって、可能な選択肢の数は階乗で与えられます：$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

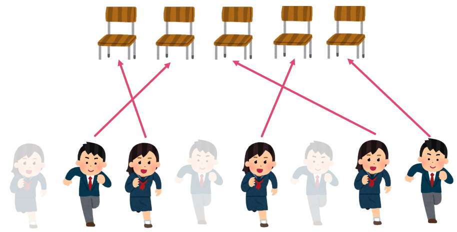
一般に、n 個のものがあり、それらを並べる、または並べ替える方法を考えるなら、可能な組み合わせは$n!$ 通りあります。例えば、普通のトランプのデッキには52 枚のカードがあります。カードをシャッフルすると、カードが別の順番に並んだ新しい配置が作られます。カードをシャッフルする方法は何通りあるでしょうか。答えは52! であり、これは想像しにくいほど圧倒的に大きな数です。数52! はおよそ8.07×10^{67} です。参考までに、地球上の砂粒の数は「たった」7.6×10^{18}、宇宙の星の数は約4×10^{23}、コップ一杯の水に含まれる原子の数は2.5×10^{25} です。

2.2 8 人の学生と5 脚の椅子を使って順列を数える

今度は、オコンネル先生の教室に椅子が5 脚しかないとします。したがって、8 人の学生を座らせようとすると、座れるのは5 人だけで、残りの3 人は立っていなければなりません。次の問いは、8 人の学生のうち5 人を座らせる方法は何通りあるか、というものです。下にはそのような

配置の二つの例が描かれています。





前と同じ考え方を繰り返すことができます。一番目の椅子には8 通り、二番目の椅子には7 通り、という具合です。しかし、今回は割り当てる椅子が5 脚しかないので、8 脚すべてまで進むのではなく、5 脚で手順を止めなければなりません。これは、答えが8! ではないことを意味します。なぜなら、最後の3 人の学生がどのように並ぶかは気にしないからです。代わりに、椅子が5 脚しかないので、答えは最初の5 個の項だけを掛け合わせたものになります。答えは、可能な座席配置が$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ 通りです。

一般に、n を学生の人数、r を椅子の数とします。このn 人の学生をr 脚の椅子に並べる方法の数は、次の公式で計算できます。

$$\frac{n!}{(n-r)!}.$$

$(n-r)!$ で割る理由は、$n!$ の項が私たちの求めたいものより多く数えすぎているからです。立っていなければならない$(n-r)$ 人の学生の並び方には関心がありません。したがって、その組み合わせを全体の数から取り除くために$(n-r)!$ で割ります。確認のために、$n=8$、$r=5$ とします。すると、

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1)}{(3 \times 2 \times 1)} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4,$$

となり、これは先ほど得た答えと同じです。このような「並べ替え」は、数学では実際には「順列」と呼ばれます。n 個の対象をr 個の位置に並べるすべての順列の数は$P_{n,r}$、あるいは$P(n,r)$ と書かれることがあり、公式は

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

です。

2.3 選び方を数える

順列について話しているとき、私たちは学生をどの順番で並べるかを気にしていました。つまり、オコンネル先生は椅子を順番に並べ、「あなたは一番目、あなたは二番目、...」と言いながら学生を割り当てていました。別のやり方も想像できます。より一般には、オコンネル先生は単にr 人の学生を選び、彼らが椅子にどの順番で座るかは気にしないかもしれません。これは、8 人の中から5 人を単に選ぶことに相当します。下には、そのような選び方の二つの例が示されています。


実際、「n 個の対象からr 個を選ぶすべての可能な方法」も数えることができます。これらの選び方は順列ではありません。この状況では順番を気にしないからです。代わりに、選び方とは、グループの中からいくつかのメンバーを選ぶだけのことです。

2.3.1　組み合わせの公式

n 個の集まりの中からr 個の対象を選ぶすべての可能な方法には公式があります。数学では、これらの順序を持たない選び方を「組み合わせ」と呼びます。サイズn の集まりからr 個を選ぶ方法の数を表すために、記号$C_{n,r}$ を使います。$C_{n,r}$ の公式は、$P(n,r)$ の公式と非常によく似ています。それは次のように与えられます。

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

ここでは、基本的に$P(n,r)$ の公式がありますが、さらに$r!$ で割っています。なぜそうするのでしょうか。$P(n,r)$ の場合、私たちは順序付きの組み合わせを求めています。そして、同じr 個の対象の選び方は、$r!$ 通りの異なる順序で並べることができます。しかし、順序なしの組み合わせでは、それら$r!$ 通りの違いには実際には関心がありません。そこで、全体の公式を$r!$ で割ることで、それらの選択を数え上げから取り除くのです。

2.3.2　パスカルの三角形

n とr の値が小さいとき、$C_{n,r}$ の値を三角形に並べることができます。三角形の一番上は$C_{0,0} = 1$ で、次の行は$C_{1,0} = 1$ と$C_{1,1} = 1$ です。しかし、さらに行を加えていくと面白くなります。下の図では、それぞれの$C_{n,r}$ の値が三角形の形で書かれています。

第0行:	1	$C_{0,0}$
第1行:	1　1	$C_{1,0}$　$C_{1,1}$
第2行:	1　2　1	$C_{2,0}$　$C_{2,1}$　$C_{2,2}$
第3行:	1　3　3　1	$C_{3,0}$　$C_{3,1}$　$C_{3,2}$　$C_{3,3}$
第4行:	1　4　6　4　1	$C_{4,0}$　$C_{4,1}$　$C_{4,2}$　$C_{4,3}$　$C_{4,4}$
第5行:	1　5　10　10　5　1	$C_{5,0}$　$C_{5,1}$　$C_{5,2}$　$C_{5,3}$　$C_{5,4}$　$C_{5,5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

三角形の中の各数は、その上にある二つの数の和で与えられることを観察してください。例えば、第4 行にある赤 の「6」は、第3 行でその上にある「3」と「3」の和で与えられています。この足し算の規則を使うことで、三角形の新しい行を好きなだけ作ることができます。

各行は$C_{n,r}$ の中の「n」によって番号付けされ、その行の項はr が0 からn まで動くことによって与えられます。つまり、$C_{n,r}$ の値を計算する必要はなく、三角形からその値を読み取ればよいのです。

3　部分集合を数える

数回前の講義で、神が世界中のすべての物を一列に並べ、それらを箱に入れていく例を見ました。例えば、神はすべてのギターが入った箱、すべてのピクルスが入った箱、というように箱を持っています。私たちはこれを使って、「量化子」についての議論を動機づけました。量化子とは、「これらの箱の中を見て、物事を調べる」ための小さな言語の道具です。実のところ、この類比は意図的に少し非形式的なままにしていました。現実には、私たちの頭の中の箱には明確で正確な「端」がありません。そのため、対象をきちんと分類することは難しいです。例えば、すべての椅子の箱には何が入るのでしょうか。スツールは椅子でしょうか。椅子の絵は椅子でしょうか。木の切り株は椅子でしょうか。壊れた椅子はどうでしょうか。

数学では、すべてが理想化された方法で正確に定義されます。したがって、曖昧な概念を避けることができ、対象を分類するための明確でよく定義された箱を使うことができます。最も単純な解釈では、これらの「箱」は「集合」と呼ばれ、現代数学の基礎になっています。

3.1　集合とは何か

素朴に言えば、集合とは、箱のように、対象の順序を持たない集まりのことです。集合には本質的に構造はなく、その中に含まれる要素だけによって定義されます。集合は波括弧$\{$ と$\}$ を使って書きます。したがって、数$2,4,5$ を含む集合は$\{2,4,5\}$ と書かれます。順序はまったく重要ではないので、同じ集合を$\{4,2,5\}$ や$\{5,2,4\}$ と書いても構いません。ある対象が集合のメンバーであるとき、その対象をその集合の「要素」と呼びます。したがって、先ほどの例では、集合$\{2,4,5\}$ の要素は$2,4,5$ です（それだけです）。

3.2　集合の規則

集合には多くの規則と興味深い性質があり、集合とその規則を研究する分野は「集合論」と呼ばれます。これは非常に面白い話題ですが、この授業ではそれらを数えることだけに関心があるので、集合論についてあまり多くは話せません。しかし、私たちの目的のためには、話しておくべき重要な規則がいくつかあります。

規則1: 集合はその対象だけによって定義され、同じ対象が二度現れることはできません。これは、集合$\{1,1,2\}$ は集合$\{1,2\}$ と同じであることを意味します。したがって、第一の規則は、同じ対象を何度も書かないということです。

規則2: 基本的な対象として、何も含まない集合があります。非形式的には、これは$\{\}$ のように想像できます。これは「空集合」と呼ばれます。なぜなら、中に何もないからです。空集合は記号$\emptyset$ を使って表します。

規則3: 集合は基本的にどんな数学的対象でも含むことができ、集合そのものを含むこともできます。これは複数の括弧を使って書きます。記法$\{1,2,\{3,4\}\}$ は、三つの要素を持つ集合を意味します。その三つとは、1、2、そして集合$\{3,4\}$ です。

規則4: 集合は、それ自身を要素として含むことはできません。

実際には、集合にはかなり多くの規則があります。興味のある読者は、ツェルメロ・フレンケル集合論のような公理的集合論を調べてみてください。しかし、ここでは非常に軽く話しているだけなので、集合については非形式的な扱いにとどめます。

3.3 部分集合を数える

名前から分かるかもしれませんが、「部分集合」とは、最初に持っていた要素の一部だけを含む別の集合のことです。もう少し正確に言えば、集合X が集合Y の部分集合であるとは、X のすべての要素がY にも含まれていることを意味します。例えば、集合$\{2, 4\}$ は$\{2, 4, 5\}$ の部分集合です。

練習問題

$X = \{a, b, c, d\}$ とします。次の集合はX の部分集合ですか。はい、またはいいえで答えなさい。

1. $\{a, b\}$
2. $\{c, e\}$
3. $\{a, b, c, d\}$
4. $\emptyset$

解答：はい、いいえ、はい、はい。

任意の集合X から、そのすべての部分集合を集めた別の集合を作ることができます。例えば、集合$X = \{1, 2, 3\}$ があるとき、部分集合は全部で8 個あります。

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}.$$

これら8 個の部分集合を含む集合をX のべき集合と呼び、$\mathcal{P}(X)$ と書きます。

べき集合の大きさはどのように数えればよいでしょうか。すべての可能な部分集合を見ているので、X のべき集合は常にX 自身より大きくなるように見えます。実際、べき集合の大きさは常に、X の大きさを指数とする2 のべきになります。前の例では、$X = \{1, 2, 3\}$ の大きさは3 です。X のべき集合には8 個の要素があり、つまり$8 = 2^3$ です。これは一般に成り立ちます。大きさ4 の集合のべき集合の大きさは$2^4 = 16$ であり、大きさ1000 の集合のべき集合の大きさは2^{1000} です。

3.3.1 指定された大きさの部分集合を数える方法

ある意味で、特定の大きさを持つ部分集合を選ぶことは、n 個の選択肢の中からr 個の要素を選ぶことと同じです。集合は順序を気にしないので、実は一般的な規則を使うことができます。集合X の大きさがn なら、X の大きさr の部分集合の数は公式$C_{n,r}$ で与えられます。すべての可能なr について$C_{n,r}$ を足し合わせると、2^n が得られます。これは、パスカルの三角形の行に沿って足し合わせると、よりはっきりします。

$$
\begin{array}{lccccccccccccl}
\text{第0行:} & & & & & & 1 & & & & & & = & \color{red}{1} \\
\text{第1行:} & & & & & 1 & + & 1 & & & & & = & \color{red}{2} \\
\text{第2行:} & & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & & = & \color{red}{4} \\
\text{第3行:} & & & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & & & = & \color{red}{8} \\
\text{第4行:} & & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & & = & \color{red}{16} \\
\text{第5行:} & 1 & + & 5 & + & 10 & + & 10 & + & 5 & + & 1 & = & \color{red}{32} \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

見て分かるように、パスカルの三角形の各行の和は増加する2 のべきになり、これはべき集合の大きさを表す一つの方法です。まとめると、大きさn の集合X が与えられたとき、

- X の大きさr の部分集合の数は$C_{n,r}$ で与えられます。これは、パスカルの三角形の第n 行の第r^{th} 項を見ることで直接読み取れます。[1]
- X のすべての部分集合の総数は2^n で与えられます。これは、パスカルの三角形の第n 行に現れるすべての項を足すことで計算できます。

例

集合$X = \{a, b, c, d\}$ を考えます。これは大きさ4 の集合です。r が0 から4 まで動くとき、$C_{4,r}$ を使って大きさr のすべての部分集合を数えることができます。

- $C_{4,0} = 1$ は、大きさ0 のただ一つの部分集合、つまり空集合$\emptyset$ を数えています。
- $C_{4,1} = 4$ は、大きさ1 の部分集合、つまり集合$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{d\}$ を数えています。
- $C_{4,2} = 6$ は、大きさ2 の部分集合、つまり集合$\{a, b\}$、$\{a, c\}$、$\{a, d\}$、$\{b, c\}$、$\{b, d\}$、$\{c, d\}$ を数えています。
- $C_{4,3} = 4$ は、大きさ3 の部分集合、つまり集合$\{a, b, c\}$、$\{a, b, d\}$、$\{a, c, d\}$、$\{b, c, d\}$ を数えています。
- $C_{4,4} = 1$ は、大きさ4 のただ一つの部分集合、つまり集合X 全体そのものを数えています。

すべての$C_{4,r}$ の項の和は$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ であり、これはちょうど2^4 であることを観察してください。

3.4　無限の彼方へ！

ここで、特別なものについて話します。それは無限です。ここまでは、集合の大きさについて非常に単純なレベルで話してきました。例えば、$X = \{a, b, c\}$ は大きさ3 の集合であり、$Y = \{2, 3, 5\}$ もまた大きさ3 の集合です。今度は、すべての自然数の集合、すなわち

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

[1] ここでは、行を0 から数え始めます。つまり、第n 行には$(n + 1)$ 個の数があり、それらは$r = 0, 1, 2, \cdots, n - 1, n$ に対応します。

を考えます。明らかに、この集合はどんな有限集合とも異なります。これは何らかの意味で「無限に大きい」のです。これはそれほど議論の余地がないはずです。集合$\mathbb{N}$ はすべての自然数を含んでいるので、有限の大きさであるはずがなく、$\mathbb{N}$ はすべての有限数よりも大きい大きさを持っていなければなりません。

では、次の問いを考えましょう。$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ のべき集合はどうでしょうか。それはどのくらい大きいのでしょうか。

答えは奇妙ですが、正しいものです。$\mathbb{N}$ のべき集合、つまり$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ もまた無限に大きいです。しかし、それは文字通り$\mathbb{N}$ 自身よりも大きいのです。そして、これは数学的に証明できます。その議論は実はかなり簡単なので、ここで繰り返します。

3.4.1 対角線論法

$\mathbb{N}$ とそのべき集合が実は同じ大きさだと仮定しましょう。これは、両方の集合の中身を取り出して一列に並べれば、それらの中身を一対一に対応させられる、という意味です。では、それをやってみましょう。$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ であることを思い出し、そのべき集合を書き出します。

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots\}.$$

これらのA_n はそれぞれ$\mathbb{N}$ の部分集合です。したがって、それ自身がいくつかの数を含む集合です。そこで、$\mathbb{N}$ の数を一つずつ見ていき、「この特定の数は特定の部分集合A_n に入っているか」と尋ねることができます。答えは常にはい、またはいいえです。つまり、それぞれの部分集合A_n の中身についての情報を含む巨大な表を作ることができます。説明のために、例えば次のようになっているとしましょう。

$$\begin{aligned} A_0 &= \{2, 3, 4\} \\ A_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\} \\ A_2 &= \{1, 2, 3, 9, 27, 1000\} \\ A_3 &= \{3\} \\ A_4 &= \emptyset \\ &\vdots \end{aligned}$$

すると、表は次のような形になります。

	0	1	2	3	4	$\cdots$
A_0	×	×	✓	✓	✓	$\cdots$
A_1	✓	×	✓	×	✓	$\cdots$
A_2	×	✓	✓	✓	×	$\cdots$
A_3	×	×	×	✓	×	$\cdots$
A_4	×	×	×	×	×	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

ここで魔法が起こります。私たちは、この表に含まれていない$\mathbb{N}$ の新しい部分集合B を作ります。B は$\mathbb{N}$ の部分集合なので、どの数を入れるかを一つずつ指定することで定義します。ま

ず、一行目の一列目を見ます。答えが「いいえ」なら、それは0 が部分集合A_0 に入っていないことを意味します。そこで、新しい部分集合B には「0」を入れることにします。したがって、B はA_0 と異なります。なぜなら、A_0 は0 を含まないのに、B は0 を含むからです。次に、一行下がって一列右へ進みます。ここでも、その列には「いいえ」があります。これは、数1 が部分集合A_1 に入っていないことを意味します。そこで、同じように、私たちは意図的に数1 を集合B に入れます。これにより、構成上、B はA_1 と異なります。なぜなら、それらはまったく同じ数を含んでいないからです。さらに一つ下がり、右へ一つ進むと、2 は確かに部分集合A_2 に含まれていることが分かります。そこで、私たちは意図的に数2 をB から除外します。これにより、B はA_2 とも異なることが保証されます。

この過程は、表の対角線に沿って無限に繰り返すことができます。そして、B に要素を入れたり、B から要素を除外したりし続けることで、B が$A_0, A_1, A_2, \ldots$ のすべてと異なるように強制します。その結果、表の中のどの部分集合とも最終的に異なる新しい部分集合B が得られます。

$$\left.\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
A_0 & \times & \times & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \cdots \\
A_1 & \checkmark & \times & \checkmark & \times & \checkmark & \cdots \\
A_2 & \times & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \times & \cdots \\
A_3 & \times & \times & \times & \checkmark & \times & \cdots \\
A_4 & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right\} \longrightarrow
\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
B & \checkmark & \checkmark & \times & \times & \checkmark & \cdots
\end{array}$$

しかし、リスト$A_0, A_1, A_2, \ldots$ は、$\mathbb{N}$ のすべての部分集合を含んでいるはずでした。これはどうして可能なのでしょうか。答えは、可能ではない、ということです。したがって、$\mathbb{N}$ が$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と一対一に対応するという最初の仮定は偽でなければなりません。言い換えると、$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は$\mathbb{N}$ よりも真に大きいのです。私たちは今、無限に大きな対象の中にも、ほかの無限に大きな対象より文字通り大きいものがあることを示しました。