MAT120：数量的推論　第7講ハンドアウト

線形モデル

今日は次の話題である数学的モデリングを始めます。モデリングの考え方は、数学を使って現実世界のさまざまなものを記述できる、というものです。これらの記述は常に近似にすぎませんが、たいていの場合、役に立ち、洞察を与えるには「十分によい」ものです。今日は、そのような数学的モデルの中で最も単純なもの、つまり線形モデルを見ていきます。名前が示す通り、これらのモデルは直線を使って、変化が一定であるようなシステムをモデル化します。まず直線の数学を学び、その後でいくつかの小さな問題を解いていきます。

1　一次方程式

1.1　一次方程式

一次方程式は、代数方程式の中で最も単純な種類の方程式です。一つの変数x に関する一次方程式とは、標準形

$$mx + b = 0$$

で書ける方程式のことです。ここで、文字m とb は固定された数であり、x は変数です。つまり、x はさまざまな値を取ることができます。また、m は0 ではないと仮定します。そうでなければ、方程式は$b = 0$ となり、特に面白いものではなくなってしまうからです。

標準形で書かれた一次方程式の例は次の通りです。

(1) $2x = 0$　　ここでは$m = 2$、$b = 0$ です。

(2) $x - 7 = 0$　　ここでは$m = 1$、$b = -7$ です。

(3) $4x + 6 = 0$　　ここでは$m = 4$、$b = 6$ です。

(4) $\frac{x}{2} - 1 = 0$　　ここでは$m = \frac{1}{2}$、$b = -1$ です。

1.2　標準形の一次方程式を解く

x を含む方程式を解くとは、その方程式を真にするx のすべての値を見つけることだと思い出してください。$mx + b = 0$ という形の一次方程式では、目標は方程式を書き換えて

$$x = \text{ある数}$$

という形にすることで、x を孤立させることです。これはどのように行うのでしょうか。元の方程式から始め、元の方程式と同じ解を持つ同値な方程式を順に書いていきます。方程式を変形しながら等式のつり合いを保つためには、方程式の両辺に同じことをしなければなりません。例えば、一次方程式$x - 2 = 0$ を解くには、両辺に2 を足して$x = 2$ を得ることができます。

1.3　例題

実際に解いている様子を見るのが一番分かりやすいことがよくあります。そこで、ここではいくつかの一次方程式を解いていきます。まず、方程式$3x - 15 = 0$ を考えます。これは、まず+15 を足し、その後すべてを3 で割ることで解けます。導出は一行ずつ次のように書けます。

$$\begin{aligned} 3x - 15 &= 0 \\ 3x - 15 + 15 &= 0 + 15 \qquad \text{（両辺に15 を足す）} \\ 3x &= 15 \qquad \text{（簡単にする）} \\ x &= 5 \qquad \text{（両辺を3 で割る）} \end{aligned}$$

解は$x = 5$ のようです。これを確認するには、値$x = 5$ を元の方程式に代入します。

$$3(5) - 15 = 15 - 15 = 0,$$

したがって、この解は確かに正しいです。

練習問題1

方程式$4x+12=4$ を解きなさい。

解答

$$\begin{aligned}
4x+12&=4\\
4x+12-12&=4-12 \qquad \text{（両辺から12 を引く）}\\
4x&=-8\\
x&=-2 \qquad \text{（両辺を4 で割る）}
\end{aligned}$$

確認すると、$4(-2)+12=-8+12=4$ なので、正しいです。

練習問題2

方程式$\dfrac{z}{5}+1=6$ を解きなさい。その後、解を確認しなさい。

解答

$$\begin{aligned}
\frac{z}{5}+1&=6\\
\frac{z}{5}+1-1&=6-1\\
\frac{z}{5}&=5\\
z&=25
\end{aligned}$$

確認すると、$\frac{25}{5}+1=5+1=6$ です。

練習問題3

方程式$5(x+2)=2(x-1)$ を解きなさい。

解答

$$\begin{aligned}
5(x+2)&=2(x-1)\\
5x+10&=2x-2 \qquad \text{（分配法則）}\\
5x-2x+10&=2x-2x-2 \qquad \text{（両辺から}2x\text{ を引く）}\\
3x+10&=-2\\
3x+10-10&=-2-10 \qquad \text{（両辺から10 を引く）}\\
3x&=-12\\
x&=-4
\end{aligned}$$

確認すると、$x=-4$ を左辺の式に代入すると$5(-4+2)=5(-2)=-10$ となり、$x=-4$ を右辺の式に代入すると$2(-4-1)=2(-5)=-10$ となります。両辺は等しいので、解$x=-4$ は正しいです。

2　一次方程式のグラフ

2.1　解としての順序対

順序対とは、順序が重要であるような実数の組(x, y) のことです。つまり、一般には$(x, y) \neq (y, x)$ です。一般に、

$(a, b) = (c, d)$ であるための必要十分条件は $a = c$ かつ $b = d$ であることです。

今、二つの変数を持つ方程式があるとします。

$$y + 2x = 3.$$

このような方程式の解には、x の値だけでなく、y の値も必要です。これら二つの値を順序対(x, y) として表すことができます。したがって、解は一つの数ではなく、数の組になります。例えば、上の方程式については、

- 組$(1, 1)$ は解です。なぜなら$1 + 2 \cdot 1 = 3$ だからです。
- 組$(2, 1)$ は解ではありません。なぜなら$1 + 2 \cdot 2 = 5 \neq 3$ だからです。
- 組$(0, 3)$ は解です。なぜなら$3 + 2 \cdot 0 = 3$ だからです。

練習問題4

方程式$y + x^2 = 4$ を考えます。次の順序対が解であるかどうかを判定しなさい。

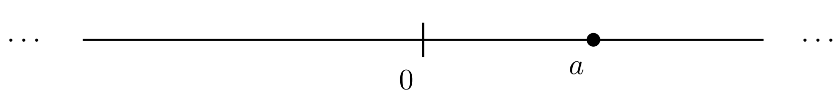
(a) $(1, 2)$
(b) $(0, -2)$
(c) $(3, -5)$
(d) $(0, 4)$

解答

(a) $(1, 2)$: $2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \neq 4$　　したがって、$(1, 2)$ は解ではありません。
(b) $(0, -2)$: $-2 + 0^2 = -2 + 0 = -2 \neq 4$　　したがって、$(0, -2)$ は解ではありません。
(c) $(3, -5)$: $-5 + 3^2 = -5 + 9 = 4$　　したがって、$(3, -5)$ は解です。
(d) $(0, 4)$: $4 + 0^2 = 4 + 0 = 4$　　したがって、$(0, 4)$ は解です。

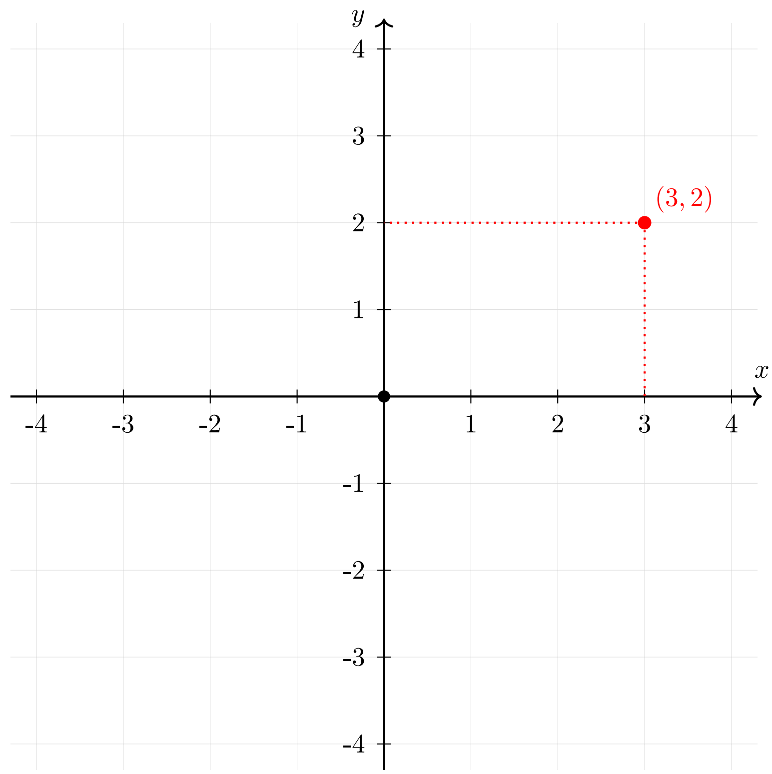
2.2　直交座標系

実数直線とは、すべての実数を$<$ の順序に従って一直線上に並べたものだったことを思い出してください。[1] さらに、任意の実数a は、この直線上の点として表すことができます。



[1] $a < b$ と書くことは、数a が実数直線上で数b より左にあることを意味していました。

同様に、実平面もあります。これは、x とy が実数であるようなすべての可能な順序対(x, y) を表す二次元の格子です。実数直線を$\mathbb{R}$ と表すことが多いので、実数平面を$\mathbb{R}^2$ と呼びます。$\mathbb{R}^2$ の別名は座標平面です。下の図は、ラベル付きの一点を含む$\mathbb{R}^2$ を表しています。



実数平面$\mathbb{R}^2$ には、二つの重要な直線があります。これらはx 軸とy 軸と呼ばれ、平面の中を移動するための目印として働きます。x 軸は数直線のコピーだと想像できます。つまり、無限に長い水平な直線です。x 軸上には0 があり、これは原点とも呼ばれます。ここから、実数直線のもう一つのコピーを取り、それを90° 回転させて垂直にし、原点でx 軸に取り付けます。この垂直な直線がy 軸です。二つの直線は合わせて十字形を作り、中央の座標$(0, 0)$ で交わります。

文字x は変数を表します。つまり、値を変えることができる数です。x が値を変えるとき、水平なx 軸上を動き回ると想像できます。同様に、y も変数なので、値を変えることができる数です。y が値を変えるとき、垂直なy 軸上を上下に動くと想像できます。

この二つのスライダーを使うことで、二次元の任意の点を表すことができます。まず水平方向に動き、その後で垂直方向に動きます。$\mathbb{R}^2$ の各点は二つの数、つまりx 座標とy 座標によって記述できます。これはまさに(x, y) のような順序対です。

例えば、順序対$(3, 2)$ は、原点から右に3 動き、その後で上に2 動いた点を表します。x 成分が負なら左へ動き、y 成分が負なら格子上を下へ動きます.

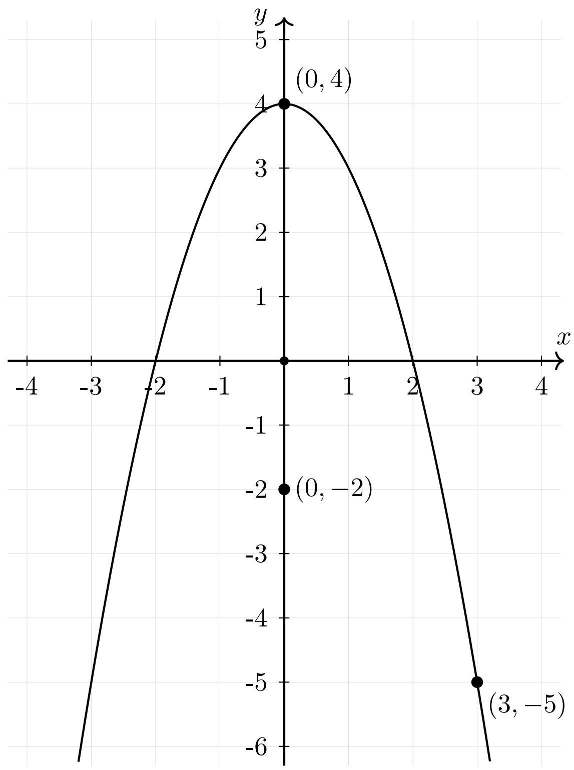
2.3　順序対とグラフ

先ほど、順序対はx とy の両方の変数を含む方程式の解を表すことができると見ました。興味深いことに、方程式のすべての解の集まりを絵で表すことができます。この絵は方程式の グラフ と呼ばれ、方程式の解であるすべての順序対の集合として定義されます。

グラフが役に立つ方法は二つあります。

1. グラフを使って、y とx の関係を視覚的に表すことができます。
2. グラフを使って、代数計算をしなくても解を読み取ることができます。

例として、方程式$y + x^2 = 4$ を考えます。まず、この方程式は$y = 4 - x^2$ と書き直せることに注意してください。座標平面とグラフのスケッチを、いくつかのラベル付きの点とともに下に示します。



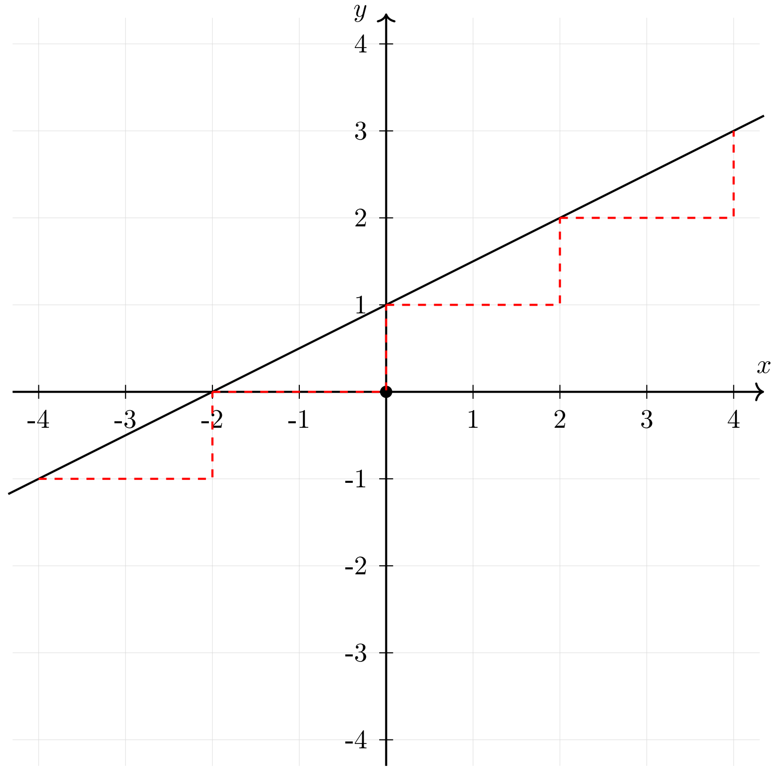
ラベル付きの点$(0, 4)$ と$(3, -5)$ はグラフ上にありますが、ラベル付きの点$(0, -2)$ はグラフ上にないことに注意してください。これらを方程式$y = 4 - x^2$ に代入すると、

- $4 = 4 - 0^2$,
- $-5 = 4 - (3)^2$,
- $-2 \neq 4 - 0^2$.

したがって、グラフ上にある最初の二つの点は方程式$y = 4 - x^2$ の解ですが、三つ目の点$(0, -2)$ は解ではありません。だからこそ、それはグラフ上にないのです。

2.4 傾き

最終的に私たちが関心を持っているのは線形モデルなので、この講義の残りでは直線だけに注目します。これらのグラフは特に役に立ちます。なぜなら、x に関するy の一定の成長をモデル化するからです。つまり、直線は一定の割合で変化します。



上の図で、直線が一定の割合で変化していることに注意してください。右へ2 マス進むごとに、直線は常に上へ1 マス進みます。直線の傾きはこの考えを捉えるものです。つまり、傾きとは、直線がどれくらい急か、言い換えれば、水平方向に動いたときに垂直方向にどれくらい変化するかを教えてくれる数です。したがって、より急な直線は大きな傾きを持ち、より緩やかな直線は小さな傾きを持ちます。

直線の傾きは、垂直方向の変化と水平方向の変化を比較することで記述できます。この比較は単なる比です。

$$\text{傾き} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}} = \frac{\text{垂直方向の変化}}{\text{水平方向の変化}}.$$

直線上の二つの点(x_1, y_1) と(x_2, y_2) を選ぶことで、より正確にすることができます。このとき、傾きをm と書くと、次の公式で計算できます。

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{ただし} x_1 \neq x_2.$$

なぜ$x_1 \neq x_2$ が必要なのでしょうか。もし同じなら、$x_2 - x_1 = 0$ となり、0 で割ることになってしまうからです。これはできません。一方で、$y_1 = y_2$ であることはまったく問題ありません。これは傾きが0 であることに対応します。また、直線は一定の割合で変化しているので、直線上のどの二点を選んでも構わないことにも注意してください。

傾きの公式を使うときは、引き算の順序をきちんと管理することが重要です。直線上の二つの点が与えられたとき、どちらを(x_1, y_1) と呼び、どちらを(x_2, y_2) と呼んでも構いません。しかし、いったんそう決めたら、分子と分母は同じ順序の引き算で作らなければなりません。正し

い公式は次の二つです。

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{および} \qquad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

一方、次の二つは**誤った**公式です。

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \qquad \text{および} \qquad m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}.$$

練習問題5

それぞれの二点を通る直線の傾きを求めなさい。

(a) 点$(-2, 0)$ と$(3, 1)$。

(b) 点$(0, 0)$ と$(1, -1)$。

解答

(a) $(x_1, y_1) = (-2, 0)$、$(x_2, y_2) = (3, 1)$ とします。すると、

$$m = \frac{1 - 0}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}.$$

(b) $(x_1, y_1) = (0, 0)$、$(x_2, y_2) = (1, -1)$ を使うと、

$$m = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1.$$

2.5 傾きの視覚化

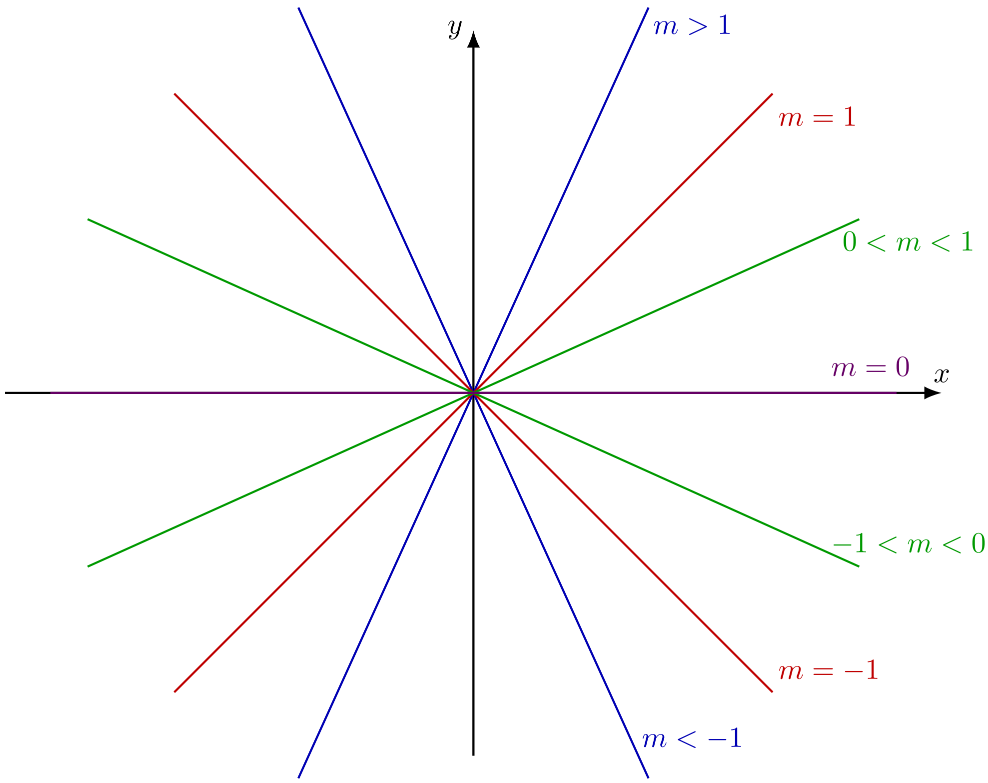
傾き$m = 1$ の直線があると想像してください。傾きの公式によれば、これは垂直方向の変化と水平方向の変化の比がちょうど1 であることを意味します。例えば、水平方向に1 単位動くと、直線も垂直方向に1 単位上がります。同様に、水平方向に2 単位動くと、直線は2 単位上がります。

傾きが1 より大きい状況も想像できます。この場合、直線は$45°$ よりも急になります。つまり、水平方向に動くよりも垂直方向に大きく上がります。

直線が垂直方向よりも水平方向に大きく動く状況も想像できます。この場合、傾きは$0 < m < 1$ を満たします。

垂直方向の変化がまったくないなら、$y_2 - y_1 = 0$ なので$m = 0$ です。したがって、傾きが0 の直線は完全に平らで、x 軸に平行です。

最後に、直線は下向きになることもあります。これは、水平方向に正の変化をしたとき、垂直方向には負の変化があることを意味します。言い換えると、右へ動くと、直線は下へ動きます。この場合、傾きm は負の数です。以上は次のようにまとめられます。

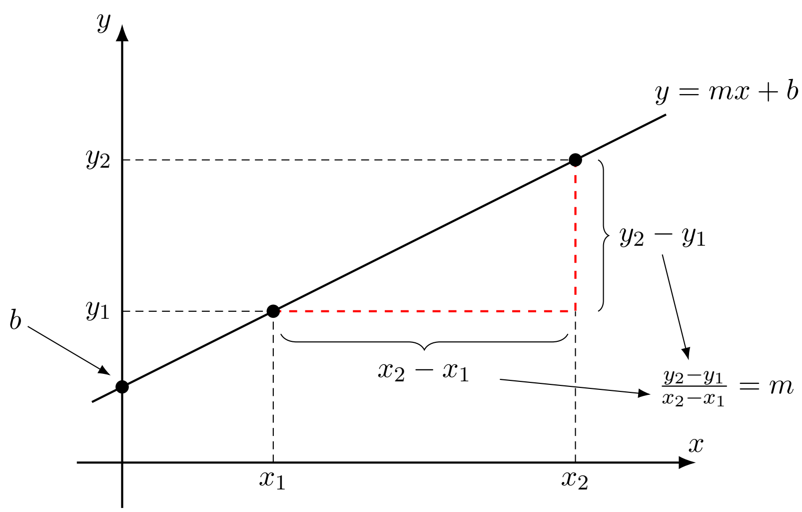


2.6　一次方程式をもう一度考える

直線は方程式$y = mx + b$ を使って表すことができます。ここで、

- $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ は直線の傾きです。
- b はy 切片、つまり直線がy 軸と交わる場所です。

だからこそ、$y = mx + b$ という形の方程式を一次方程式と呼んだのです。その解の グラフは常に直線になります。



この公式は直線を完全に記述します。b はy 軸上のどこから始まるかを教えてくれ、傾きm は直線がどのように動くかを教えてくれます。これは線形モデルにとって理想的な設定です。二つの固定された値m とb を持つ方程式があり、それらがモデルでどのような直線を使うべきかを教えてくれるからです。

3　線形モデルの例題

ここで、いくつかの例題を通して線形モデルについての議論を終えます。例は四つあります。タクシー、心拍計、貯金計画、そして最後に、摂氏を華氏に、また華氏を摂氏に変換するために一次方程式を解きます。

3.1　タクシー

家に帰るためにタクシーに乗ろうとしているとします。タクシー運転手には次のルールがあります。初期費用として200 円を支払わなければなりません。その後、走行距離1 km ごとに200 円を支払わなければなりません。家が8 km 離れているとします。家に帰るためにはいくら支払う必要があるでしょうか。

最初の目標は、関係する情報を取り出し、全体の費用をモデル化する一次方程式を書くことです。上に挙げたルールによれば、総費用は次の公式で与えられます。

$$\text{総費用} = \text{料金} \times \text{距離} + \text{初期費用}$$

総費用をT、タクシーの料金をR、距離をD、初期費用をI と表すと、上の方程式は次の形になります。

$$T = RD + I.$$

問題文によれば、$I = 200$、$R = 200$、$D = 8$ が与えられているので、T を直接計算できます。

$$T = (200 \cdot 8) + 200 = 1600 + 200 = 1800 \text{ 円}.$$

今度は、20 km 走り、タクシー運転手の初期費用が200 円であるとします。合計で1200 円を支払ったとすると、タクシーの料金はいくらだったでしょうか。

$T = 1200$、$D = 20$、$I = 200$ が与えられているので、

$$1200 = 20R + 200$$

を解きます。したがって、

$$1000 = 20R \quad \Rightarrow \quad R = 50.$$

タクシーの料金は1 km あたり50 円だったはずです。

最後に、12 km 走り、タクシーの料金が1 km あたり300 円であるとします。合計で2000 円を支払ったとすると、初期費用はいくらだったでしょうか。

この場合、$T = R \cdot D + I$ を使ってI について解きます。

$$2000 = 300 \cdot 12 + I = 3600 + I \quad \Rightarrow \quad I = 2000 - 3600 = -1600.$$

したがって、初期費用は負です。このことから、タクシー運転手が私たちに1600 円をくれたか、あるいはもっとありそうなこととして、この状況では単にタクシーに乗る余裕がなかったのだと結論できます。

3.2 心拍計

ランニングマシンで走っていて、心拍数が二回測定されたとします。

$$(v_1, HR_1) = (8, 125), \qquad (v_2, HR_2) = (14, 167).$$

安静時心拍数は69 bpm であり、心拍数は速度と線形関係にあると仮定します。問いは次の通りです。

(1) 線形モデル$HR = mv + b$ を書きなさい。
(2) そのモデルを使って、$v = 12$ km/h のときのHR を推定しなさい。
(3) ランナーはHR を約132 bpm に保ちたいとします。ランニングマシンの速度を推定しなさい。
(4) このモデルを使って$v = 25$ km/h のときのHR を予測することが信頼できないかもしれない理由を説明しなさい。

解答を順に示します。

(1) 第2節の標準公式を使って傾きm を計算できます。この場合、

$$m = \frac{167 - 125}{14 - 8} = \frac{42}{6} = 7.$$

また、安静時心拍数は69 bpm であると与えられています。つまり$v = 0$ のときです。これにより、直線が垂直軸と交わる点がすぐに分かります。この場合、y 軸は心拍数を表しています。別の方法として、データ点の一つを選び、b について解くこともできます。例えば、$(v, HR) = (8, 125)$ を使うと、

$$b = HR - mv = 125 - 7 \cdot 8 = 125 - 56 = 69,$$

となり、これは一致しています。したがって、線形モデルは

$$HR = 7v + 69.$$

です。

(2) ここでの課題は、$v = 12$ と仮定して一次方程式を解くだけです。これを線形モデルに代入し、対応するHR の値を計算します。

$$HR = 7 \cdot 12 + 69 = 84 + 69 = 153 \text{ bpm}.$$

(3) この場合、代わりにHR の値が与えられています。そこで、これをモデルに代入し、v について解きます。

$$132 - 69 = 7v \Rightarrow 63 = 7v \Rightarrow v = \frac{63}{7} = 9 \text{ km/h}.$$

(4) $v = 25$ に対応するHR の値を計算しようとすると、$HR = 7(25) + 69 = 244$ bpm が得られます。これは明らかに不可能です。したがって、私たちはモデルの限界を見つけたことになります。このことから、心拍数が速度に対して線形であるという最初の仮定は、ある範囲の速度の中でだけ有効であると結論できます。[2]

3.3 新しい犬を買う

新しい犬を買いたいとします。その犬の値段は350000 円です。現在すでに150000 円貯めており、仕事の収入に基づいて毎週さらに20000 円ずつ貯金できます。この情報によれば、その犬を買うための貯金にはどれくらいの時間がかかるでしょうか。

この問題を解くために、貯金額を次のようにモデル化できます。

$$\text{貯金額} = \text{最初の貯金額} + (\text{毎週の貯金額}) \times (\text{時間}).$$

目標額は350000 円、最初の貯金額は150000 円、毎週の貯金額は20000 円/週なので、

$$350000 = 150000 + 20000t$$

を解きます。両辺から150000 を引くと、

$$200000 = 20000t \quad \Rightarrow \quad t = 10.$$

したがって、その犬を買うための貯金には10 週間かかります。

3.4 温度の変換

友達が、授業の後に公園で遊ぼうと誘ってきます。よさそうなので、あなたは同意します。すると友達は、「コートを持ってきてね。外は52 度になるから」と言います。あなたは、52 度の暑さでいったいなぜコートが必要なのかと思い、変だと感じます。その後、その友達がアメリカ人で、おそらく別の温度体系、つまり華氏について話しているのだと気づきます。

摂氏を華氏に変換するには、一次方程式

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

を使います。

二つの温度体系の違いを見るために、まず$F = 52$ とおいてC について解いてみましょう。

$$52 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow 20 = \frac{9}{5}C \Rightarrow C = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9} \approx 11.1°C.$$

次に、逆に$C = 52$ とおいて、対応するF の値を計算することもできます。

$$F = \frac{9}{5} \cdot 52 + 32 = \frac{468}{5} + 32 = \frac{468}{5} + \frac{160}{5} = \frac{628}{5} = 125.6°F.$$

[2] これをさらに明確にするために、速度を100 km/h にしたと想像してください。第一に、人間はそれほど速く走れないので、これは不可能です。第二に、モデルに従って対応する心拍数を求めると、$HR = 769$ bpm となり、これもまた不可能です。しかし、それこそがこのモデルの予測する値なのです。これらの値は人間の生物学に関する本当の事実として理解すべきではなく、むしろ私たちのモデルの明らかな限界として理解すべきです。