MAT120：数量的推論　第8講ハンドアウト
非線形モデル

前回の講義では、変数どうしの関係を直線を使って記述する線形モデルを導入しました。この講義では、非線形モデルへ進みます。これは、変数どうしの関係がもはや直線ではなくなるようなモデルです。私たちにとって最も重要な例は二次モデルです。これは幾何、物理、そして多くの現実世界の状況で自然に現れます。また、逆二乗則についても簡単に議論し、いくつかの応用例を見ていきます。

1　二次方程式

1.1　二次方程式とは何か？

一つの変数に関する二次方程式とは、

$$ax^2 + bx + c = 0$$

という形で書ける任意の方程式のことです。ここで、a、b、c は実数であり、$a \neq 0$ です。

もし$a = 0$ とすると、その方程式はもはや二次方程式ではありません。代わりに、

$$bx + c = 0$$

となり、これは一次方程式です。この意味で、二次方程式は、一次方程式の次に単純な種類の方程式だと考えることができます。

練習問題1

次の各方程式が二次方程式であるかどうかを判定しなさい。

(a) $2x^2 + 4x - 2 = 0$
(b) $3x - x^2 + 1 = 0$
(c) $z^2 + 3z - 2 = 0$
(d) $x^2 - 1 = 0$
(e) $x - 2 = 0$

解答

これらはすべて二次方程式ですが、**(e)** だけは例外です。方程式$x - 2 = 0$ は一次方程式です（x^2 の項がありません）。

1.2　解の確認

思い出してください。あるx の値が方程式の解であるかどうかを確認するには、その値を方程式に代入し、左辺が0 になるかどうかを見ます。

練習問題2

次のx の値が、二次方程式

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

の解であるかどうかを判定しなさい。

(a) $x = 2$
(b) $x = 0$
(c) $x = -1$
(d) $x = -2$

解答

(a) $x = 2$:　$2^2 + 3(2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12 \neq 0$ なので、$x = 2$ は解ではありません。
(b) $x = 0$:　$0^2 + 3(0) + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \neq 0$ なので、$x = 0$ は解ではありません。
(c) $x = -1$:　$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ なので、$x = -1$ は解です。
(d) $x = -2$:　$(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ なので、$x = -2$ は解です。

2　二次方程式の解を求める

2.1　解を求める方法

前回の講義で一次方程式について議論したとき、一次方程式の解を求めることは比較的単純だと分かりました。方程式の中の式を簡単にし、変数x が方程式の左辺に孤立し、右辺に数が来るようにすべてを並べ替えればよかったからです。

これとは対照的に、二次方程式を解くことは、しばしばずっと難しくなります。実際、ときには不可能なこともあります（少なくとも、実数解に限定する場合には）。$ax^2 + bx + c = 0$ のような方程式では、x を片側に孤立させるという方針はあまりうまく機能しません。今度はx を含む項が二つあり、そのうち一つはx^2 の項なので、二次方程式を並べ替えてx を片側に置くことは難しくなり得ます。

この授業では、二次方程式について一回の講義だけを使います。したがって、その完全な理論に踏み込むことはできません。代わりに、三つの主要な方法に集中します。

- 因数分解,
- 平方根を使うこと,
- 解の公式.

どの方法を使うかは、しばしば具体的な方程式と問題の文脈によって決まります。

2.2　因数分解

二次方程式は、二つの括弧の積として書き直すことで解を見つけられる場合があります。これは、簡単にすることの一種の逆の操作だと想像できます。因数分解とは、二次式を括弧の中に詰め直す過程です。

例として、式$x^2 + 3x + 2$ を考えます。この二次式を積として書き直すことで因数分解します。

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

これら二つの式が等しいと、どうして分かるのでしょうか。右辺の式を展開することで確認できます。式$(x + 1)(x + 2)$ は、分配法則を使って展開できます。

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= (x + 1)x + (x + 1)2 \\ &= (x^2 + x) + (2x + 2) \\ &= x^2 + 3x + 2.\end{aligned}$$

最後の等式により、$(x + 1)(x + 2)$ が$x^2 + 3x + 2$ の因数分解であることが確認されます。

2.2.1　因数分解を使って二次方程式を解く

二つの実数a とb があり、$a \times b = 0$ であるとします。この積が0 になり得る唯一の方法は、因数の少なくとも一つが0 である場合です。

$$\text{もし}\, a \times b = 0 \,\text{ならば、}\, a = 0 \,\text{または}\, b = 0 \,\text{です（あるいは両方です）。}$$

この観察は零因子性として知られています。

今、二次方程式

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

を考えます。左辺を因数分解して、方程式を

$$(x+1)(x+2) = 0$$

と書き直すことができます。これは、$(x+1)$ と$(x+2)$ の積が0 であると言っています。したがって、零因子性により、

$$x + 1 = 0 \quad \text{または} \quad x + 2 = 0$$

であると結論できます。これらを解くと、$x = -1$ と$x = -2$ が得られます。したがって、$x = -1$ と$x = -2$ はどちらも$x^2 + 3x + 2 = 0$ の解です（練習問題2 で確認した通りです）。

2.2.2　因数分解の方法（$a = 1$ の場合）

二次式の先頭係数が$a = 1$ である、より簡単な状況を考えましょう。この場合、因数分解は

$$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$$

のようになります。右辺を展開すると、

$$(x+m)(x+n) = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m+n)x + mn.$$

したがって、私たちは

$$m + n = b \quad \text{かつ} \quad mn = c$$

を満たす二つの数m とn を探しています。そのような組(m, n) を見つけると、自動的に因数分解が得られます。

例：$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ です。なぜなら$1 + 2 = 3$ かつ$1 \cdot 2 = 2$ だからです。

練習問題3

次の二次式を因数分解しなさい。

(a) $x^2 + 10x + 9$

(b) $x^2 + 5x + 6$

(c) $x^2 + 4x + 4$

解答

(a) 足すと10 になり、掛けると9 になる二つの数が必要です。数9 と1 が使えるので、

$$x^2 + 10x + 9 = (x + 9)(x + 1).$$

(b) 足すと5 になり、掛けると6 になる二つの数が必要です。数3 と2 が使えるので、

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

(c) 足すと4 になり、掛けると4 になる二つの数が必要です。唯一の選択肢は2 と2 なので、

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2.$$

2.3 平方根

数を二乗することには、平方根と呼ばれる逆の操作があります。平方根は$\sqrt{}$ と書きます。

例えば、

$$x^2 = a$$

ならば、

$$x = \sqrt{a} \quad \text{または} \quad x = -\sqrt{a}.$$

正の数も負の数も二乗すると同じ値になるため、解は二つあります。例えば、$x^2 = 25$ の解は$x = 5$ と$x = -5$ です。

練習問題4

解を計算しなさい（実数の範囲で）。

(a) $x^2 = 16$
(b) $x^2 = 81$
(c) $x^2 = -1$
(d) $x^2 - 1 = 0$
(e) $x^2 - 9 = 0$
(f) $x^2 + 2 = 18$

解答

(a) $x^2 = 16$ の解は$x = 4$ と$x = -4$ です。
(b) $x^2 = 81$ の解は$x = 9$ と$x = -9$ です。
(c) $x^2 = -1$ には実数解がありません（任意の実数の二乗は負ではありません）。
(d) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$
(e) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$
(f) $x^2 + 2 = 18 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4.$

2.4　二次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

という形の任意の二次方程式の解を求めるために使える一般公式があります。解は次で与えられます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$b^2 - 4ac \geq 0$ が必要です。そうでないと、負の数の平方根を取ることになり、実数ではそれはできないからです。

2.5　逆二乗則

逆二乗則と呼ばれるよく知られた数学的関係があります。それは

$$y = \frac{a}{x^2}$$

という形をしています。並べ替えると$x^2 = \frac{a}{y}$ となるので、

$$x = \sqrt{\frac{a}{y}} \quad \text{または} \quad x = -\sqrt{\frac{a}{y}}.$$

x が距離を表している場合には、正の値だけを使います。

この種類の関係は、科学の多くの分野に現れます。例としては次のものがあります。

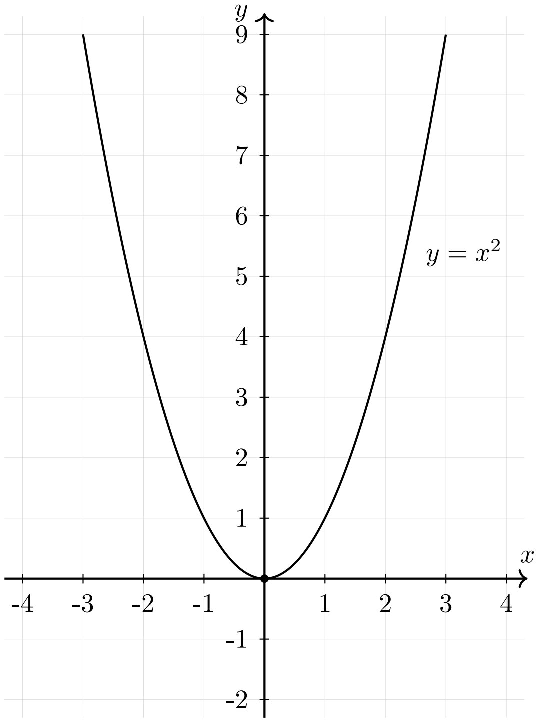
- ニュートンの万有引力の法則,
- クーロンの電気力の法則,
- 距離に対する光の明るさ,
- 熱源からの温度,
- 磁場の強さ.

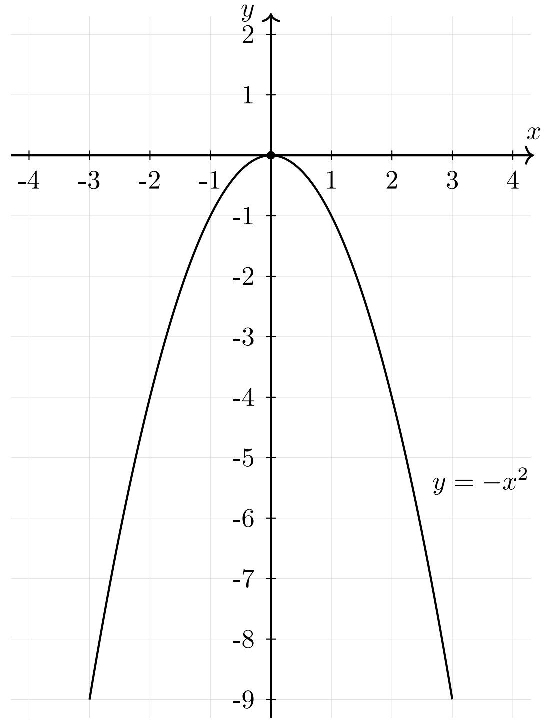
3　二次式と逆二乗則の幾何

3.1　二次関数のグラフ

二次方程式は、放物線と呼ばれる曲線のグラフに対応します。これらの曲線は直線とは異なります。なぜなら、一定の傾きを持たないからです。代わりに、グラフ上のどこにいるかによって、速くなったり遅くなったりする変化率を持ちます。

一般に、二次方程式$y = ax^2 + bx + c$ のグラフはU 字の形をしています。グラフの途中で向きを変え、反対方向へ曲がって戻るのです。方程式によって、放物線の形は変わります。





- $y = x^2$ のグラフは原点で向きを変え、上向きに開きます。$(-x)^2 = x^2$ なので、y 軸に関して対称です。
- $y = -x^2$ のグラフも原点で向きを変えますが、下向きに開きます。
- 一般に、$a > 0$ ならば放物線は上向きに開き、$a < 0$ ならば放物線は下向きに開きます。放物線は常にその頂点に関して対称です。

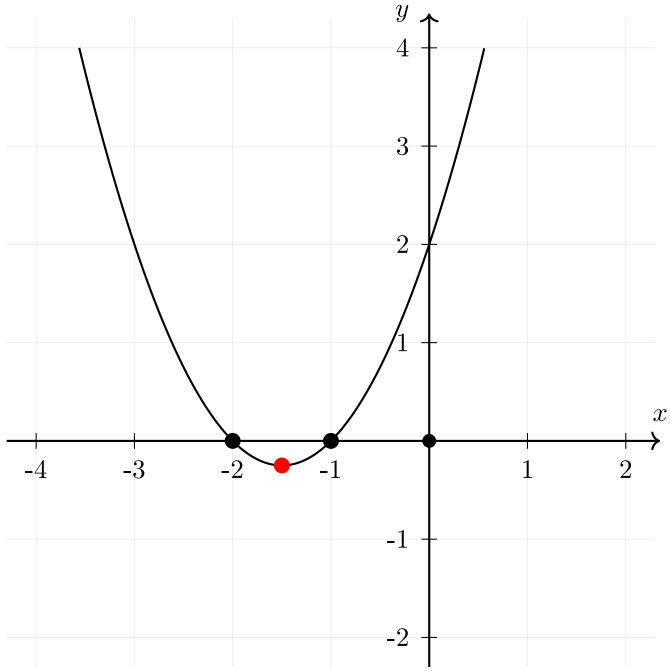
3.2　例：方程式$y = x^2 + 3x + 2$

$y = x^2 + 3x + 2$ のグラフは、この方程式を満たすすべての点(x, y) の集合です。x^2 の項が正の係数を持っているので、このグラフはU 字形になります。

重要なことに、このグラフは二つの場所でx 軸と交わります。x 軸とは、$y = 0$ である水平な直線です。グラフがx 軸に触れる場所ではどこでも、y の値は0 です。したがって、これら二つの場所は方程式

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

の解です。すでに解は$x = -2$ と$x = -1$ であると分かっています。したがって、グラフは$x = -2$ と$x = -1$ でx 軸と交わります。



3.3　折り返し点（頂点）

二次関数のグラフには、折り返し点、または頂点と呼ばれる特別な点があります。これはグラフが向きを変える点であり、グラフの対称軸も表します。放物線の頂点を見つけるには、二次方程式を頂点形式に書き直すことができます。そうすると、頂点を非常に簡単に読み取れます。一般に、二次式$ax^2 + bx + c$ の頂点は、

$$x\text{座標} = -\frac{b}{2a}, \qquad y\text{座標} = c - \frac{b^2}{4a}$$

を持ちます。これを理解する一つの方法（この授業では展開しない代数を使う方法）は、恒等式

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

です。右辺は放物線の頂点形式と呼ばれます。

例：$y = x^2 + 3x + 2$ では、$a = 1$、$b = 3$、$c = 2$ なので、頂点は

$$x = -\frac{3}{2}, \qquad y = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

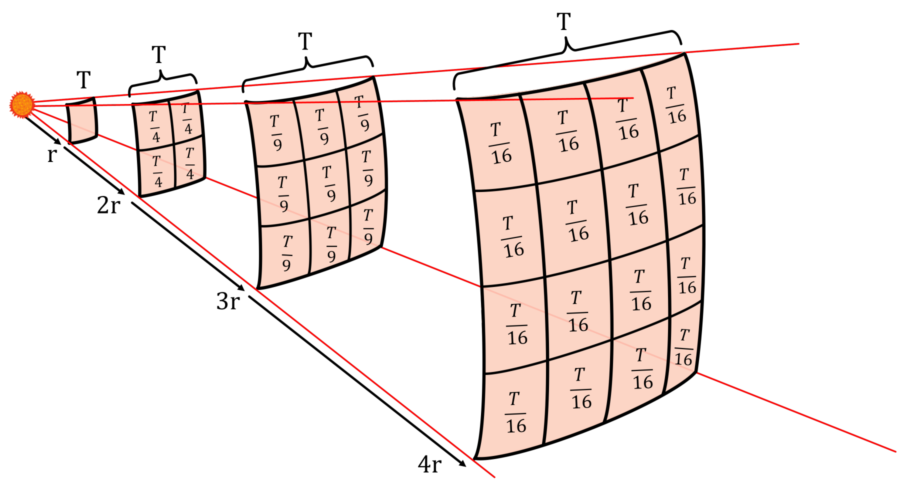
で起こります。したがって、頂点は$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ であり、上の図では赤で描かれています。

3.4　逆二乗則の幾何

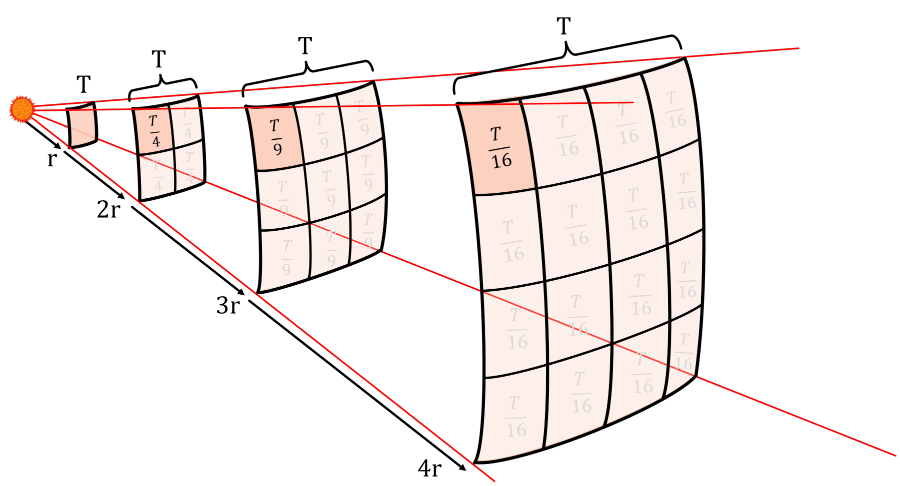
風船のイメージ。 風船を想像し、その上にペンで小さな正方形を描くとします。風船を膨らませると、この正方形も大きくなります。さらに膨らませ続けると、正方形はどんどん大きくなります。ここで、風船が大きくなるにつれて、この小さな正方形の面積はどのように変化するのか、と問うことができます。便利のため、風船は半径r の完全な球だと仮定しましょう。風

船の半径を二倍にすると、小さな正方形の面積は単に二倍になるわけではありません。代わりに、四倍になります。半径を三倍にすると、面積は九倍になります。半径を4 倍にすると、面積は十六倍になります。したがって、面積の変化はr^2 と関係しています。

別の見方。 太陽を考えます。ただし、それは非常に遠くにあるので、小さな点のように見えるとします。太陽はすべての方向にエネルギーを放出しています。太陽を囲む巨大な球を想像し、その球面上に小さな正方形が描かれていると想像してください。その正方形をどれだけのエネルギーが通過するかを測定します。



今、測定用の球を二倍の大きさにすると、正方形の面積は四倍になります。太陽から出ていくエネルギーの総量は変わっていませんが、そのエネルギーは今や四倍大きい表面に分布しています。これは、単位面積あたりのエネルギーが以前の$\frac{1}{4}$ になることを意味します。半径を三倍にすると、エネルギーは九倍大きい表面に広がるので、単位面積あたりのエネルギーは以前の$\frac{1}{9}$になります。これが逆二乗則です。



4　モデルと応用の例

4.1　海賊の大砲の弾

空中に投げられた物体の高さは、二次方程式でモデル化できます。これは投射運動として知られています。*projectile* という言葉は、力を受けて空中を飛ぶもの、というような意味です。

銃弾を真上に撃つことを想像できます。弾丸は大きな速度で銃を離れるので、しばらく上へ登っていきます。重力は常に弾丸を下へ引っ張り、弾丸の上向きの運動に逆らっています。時間が経つと、重力がこの戦いに勝ちます。弾丸の上昇はだんだん小さくなり、やがて一瞬だけ上昇が止まります。その後、弾丸は落下し、落ちながら速くなっていきます。

弾丸を斜め上に撃った場合にも、同じ過程が成り立ちます。その場合、速度には上向きの成分（鉛直速度）と横向きの成分（水平速度）があります。鉛直速度が、弾丸がどれだけ高く上がるかを制御します。

この話に基づいて、よく使われる公式を見つけることができます。

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

ここで、

- h_0 は初期の高さです。
- v_0 は初期鉛直速度です（物体がどれだけ速く上へ向かっているか）。
- g は重力加速度です。

話を簡単にするためにいくつかの仮定を置くと（例えば、$g = 10$、$h_0 = 1$）、この方程式は

$$h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2$$

になります。これは$a = -5$、$b = v_0$、$c = 1$ の二次式です。これは頂点形式

$$h(t) = -5\left(t - \frac{v_0}{10}\right)^2 + \left(1 + \frac{v_0^2}{20}\right)$$

を持ちます。頂点は、物体が到達する最大の高さを教えてくれます。

練習問題6

大砲が砲弾を空中へ撃ち上げるとします。上のモデルを使って、次の場合の最大の高さ（およびそれが起こる時刻）を求めなさい。

(a) $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$

(b) $v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$

解答

最大値は頂点で起こります。すなわち、$t = \frac{v_0}{10}$ です。

(a) $v_0 = 20$ ならば、$t = \frac{20}{10} = 2$ 秒であり、

$$h(2) = 1 + 20(2) - 5(2^2) = 1 + 40 - 20 = 21.$$

したがって、最大の高さは21 メートルで、2 秒後に到達します。

(b) $v_0 = 40$ ならば、$t = \frac{40}{10} = 4$ 秒であり、

$$h(4) = 1 + 40(4) - 5(4^2) = 1 + 160 - 80 = 81.$$

したがって、最大の高さは81 メートルで、4 秒後に到達します。

4.2 焚き火モデル

焚き火から距離d の場所での温度T を、逆二乗則を使ってモデル化します。

$$T(d) = 15 + \frac{k}{d^2},$$

ここで、d は私たちと火との距離であり、k はまだ決定していない定数です。

練習問題7

(a) 1 メートルの場所での温度が55° だとします。k はいくつですか。
(b) 2 メートルの場所での温度はいくつですか。
(c) 0.5 メートルの場所での温度はいくつですか。
(d) 温度を45° にしたいとします。どれくらい離れて座ればよいですか。

解答

(a) $d = 1$ ならば、$T(1) = 15 + k = 55$ なので、$k = 40$ です。

(b) $d = 2$ のとき、

$$T(2) = 15 + \frac{40}{2^2} = 15 + \frac{40}{4} = 25^\circ.$$

(c) $d = 0.5$ のとき、

$$T(0.5) = 15 + \frac{40}{(0.5)^2} = 15 + \frac{40}{0.25} = 175^\circ.$$

(d) $T(d) = 45$ ならば、

$$45 = 15 + \frac{40}{d^2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{40}{d^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{4}{3}.$$

したがって、

$$d = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 \text{ メートル}.$$