MAT120：数量的推論　第9講ハンドアウト

二次モデル

前回までの講義では、変数どうしの関係をモデル化し始めました。まず線形モデル（直線）を学び、その後、基本的な非線形モデル（特に二次式）を学びました。この講義では、指数モデルへ進みます。指数的増加と指数的減少は、現実世界の多くの状況に現れるため有名です。特に、ものごとが等しい時間間隔ごとに一定の倍率で増えたり減ったりする場合に現れます。

1　指数の代数

1.1　掛け算と累乗

掛け算とは、単に繰り返しの足し算として定義されることを思い出しましょう。例えば、数a に整数n を掛けるとは、a をn 回それ自身に足すという意味です。

$$n \cdot a = a + a + \cdots + a \qquad (n\ \text{回}).$$

第5講で見たように、この考えを他の倍率にも拡張することができます。数n は整数である必要はなく、それでも通常の掛け算の規則（交換法則や結合法則など）に従う意味のある積$n \cdot a$ を定義することができます。

同様に、自然数n による累乗とは、a をそれ自身と繰り返し掛け合わせることを意味します。

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \qquad (n\ \text{回}).$$

つまり、掛け算は「繰り返しの足し算」であり、累乗は「繰り返しの掛け算」です。a^n のような累乗を考えるとき、a を底、n を指数と呼ぶことがよくあります。

1.2　指数法則（$a \neq 0$ の場合）

底a が同じとき、非常に重要な規則がいくつかあります。

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　（これは$a \neq 0$ を必要とします）,

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

これらの規則により、指数を操作し、より簡単な形に変形することができます。例えば、

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ はなぜ自然なのか？

これらの規則は最初はランダムに見えるかもしれませんが、累乗の定義からかなり簡単に従います。
左辺を書き出すと、

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{回}}, \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{回}}.$$

したがって、積$a^m \cdot a^n$ にはa がm 個あり、その後さらにa がn 個あります。合計で$m+n$ 個になります。

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{回}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{回}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\ \text{回}} = a^{m+n}.$$

他の規則も同様であり、交換法則や結合法則のような掛け算の基本的性質を使って正当化できます。

1.3　ゼロ乗と負の指数（$a \neq 0$ の場合）

指数の考えを他の数にも拡張できます。第5講で数の考えを議論したとき、乗法逆元の性質を見ました。任意のゼロでない実数a には、a と掛けると1 になる特別な逆の数があります。この逆数を$\frac{1}{a}$ と書きます。つまり、

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad (a \neq 0).$$

この逆数は、指数を使って次のようにも書きます。

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad (a \neq 0).$$

これが、a がゼロでないことを要求する理由です。もし0^{-1} と書こうとすると、分母がゼロの分数を書くことになり、それはうまく定義されません。

a^{-1} をもとにして、指数法則を使い、他の負の指数を記述できます。例えば、$-2 = (-1) \cdot 2$ なので、規則$(a^m)^n = a^{mn}$ を使って次のように書き直せます。

$$a^{-2} = a^{(-1)\cdot 2} = (a^{-1})^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

一般に、ゼロでない実数a に対して、次の三つの規則を使います。

(1) $a^0 = 1$,

(2) $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

(3) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

なぜ$a^0 = 1$ なのか？

任意の正の整数m を選びます。このとき$0 = m - m$ です。指数法則$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を使うと、

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

規則$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ が実際に働く例を見るために、底が2 の場合を考えます。

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

練習問題1

次を計算しなさい。

(a) 3^0

(b) 2^{7-5}

(c) 4^{-2}

解答

(a) $3^0 = 1$.
(b) $2^{7-5} = 2^2 = 4$.
(c) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

1.4 有理数の指数

整数ではない指数も使うことができます。最初の一歩は、$\frac{1}{2}$ のような有理数の指数を解釈することです。

$a \geq 0$ とします。もし$a^{1/2}$ が指数法則と整合的であってほしいなら、次のようになることを期待します。

$$\left(a^2\right)^{1/2} = a^{2\cdot(1/2)} = a^1 = a, \qquad \text{かつ} \qquad \left(a^{1/2}\right)^2 = a^{(1/2)\cdot 2} = a^1 = a.$$

したがって、指数$\frac{1}{2}$ を適用することは、二乗の効果を逆にすることになります（少なくとも$a \geq 0$ の場合）。しかし、私たちはすでに二乗の逆操作を知っています。それが平方根です。したがって、

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \qquad (a \geq 0).$$

より一般に、$a \geq 0$ かつ$n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

と定義します。例えば、$2^3 = 8$ なので、$8^{1/3} = 2$ です。つまり、$\sqrt[3]{8} = 2$ です。

1.5 無理数の指数

ここまでで、指数を自然数から負の整数へ、そして有理数へと拡張しました。ここで、さらに一歩進めます。（正の）数を無理数の指数に上げることも可能です。

例えば、a^π です。ここでπ は、任意の円について

$$\pi = \frac{\text{円周}}{\text{直径}}$$

という比に等しい特別な無理数です。

一見すると、a^π を私たちがすでに理解している考えに基づいて定義することは不可能に思えます。しかし、無理数は有理数で近似できることを思い出せば、状況は見た目ほど悪くありません。

π は小数展開

$$\pi = 3.14159\ldots$$

を持つことを思い出しましょう。したがって、$a > 1$ ならば、a^π は「a^3 より少し大きいが、a^4 より小さい」と期待できます。

π を有理数で近似する

桁を増やしていくことで、π の有理数近似をどんどん良くすることができます。
ステップ1: $\pi \approx 3$
ステップ2: $\pi \approx 3.1 = 3 + 0.1 = 3 + \frac{1}{10}$
ステップ3: $\pi \approx 3.14 = 3 + 0.1 + 0.04 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$
ステップ4: $\pi \approx 3.141 = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}$
ステップ5: $\pi \approx 3.1415 = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$
という具合です。

それぞれの近似は、有理数の和として書かれていることに注意してください。これは、指数法則

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

を繰り返し使って、a^π の近似を作れるということを意味します。

例えば、

ステップ1: $a^3 = a^3$
ステップ2: $a^{3.1} = a^{3+\frac{1}{10}} = a^3 \cdot a^{1/10}$
ステップ3: $a^{3.14} = a^{3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}}$
ステップ4: $a^{3.141} = a^{3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}} \cdot a^{\frac{1}{1000}}$

新しい各ステップでは、$a^{(\text{桁})/10^k}$ という形の数を掛けています。これは非常に小さい指数を持つa の累乗です。非常に小さい指数は0 に近いので、値$a^{(\text{桁})/10^k}$ は$a^0 = 1$ に近くなります。したがって、新しい各ステップは答えを少しだけ変えます。これが、これらの近似が最終的に一つの値に落ち着く（収束する）理由です。この値をa^π と定義します。

1.5.1　例：無理数の指数（2^π）

具体例を見るために、2^π を計算してみましょう。まず、$2^3 = 8$ かつ$2^4 = 16$ であることを知っています。π は3 と4 の間にあるので、2^π は8 と16 の間のどこかにあるはずです。

同じ段階的な近似の考えを使うと（電卓を使って）、次のようにできます。

ステップ1: $2^3 = 8$
ステップ2: $2^{3.1} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \approx 8 \cdot 1.071773 \approx 8.57419$
ステップ3: $2^{3.14} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \approx 8 \cdot 1.071773 \cdot 1.028114 \approx 8.81524$
ステップ4: $2^{3.141} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \cdot 2^{0.001} \approx 8.81524 \cdot 1.000693 \approx 8.82135$
ステップ5: $2^{3.1415} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \cdot 2^{0.001} \cdot 2^{0.0005} \approx 8.82135 \cdot 1.000347 \approx 8.82441$

この手続きは続いていき、答えは真の値にどんどん近づきます。実際、

$$2^\pi \approx 8.82498.$$

これは私たちの予想と一致しています。π は3 と4 の間にあります（しかし3 に近い）ので、2^π は8 と16 の間にあるはずです（しかし8 に近い）。

1.6　変数を含む指数

ここまでの議論によれば、底a が正である限り、（正の）数a を任意の実数b の指数に上げることには意味があるように見えます。無理数も含めて、いつでもa^b と書けるということです。

また、変数を指数にすることもできます。a^x は「a を変数x 乗する」という意味です。変数は多くの値を取ることができるので、x の値を実数直線上で動かすと、それに応じてa^x の異なる値が得られると想像できます。例えば、

- $x = 2$ ならば$a^x = a^2$,
- $x = 0$ ならば$a^x = a^0 = 1$,
- $x = -\pi$ ならば$a^x = a^{-\pi}$.

つまり、式a^x は、a のすべての指数についての情報を一度に含んでいます。

さらに一歩進めて、一つの変数から作られた代数式を指数にすることもできます。例えば、$3^{x/2}$ や4^{x^2} のようなものは有効な指数式です。

1.7　指数方程式を解く

一つの変数を含む方程式を解くとは、等式を真にする変数のすべての値を見つけることだと覚えておきましょう。指数を含む方程式についても同じです。例えば、次の方程式を考えます。

$$3^x = 9.$$

この方程式は、「3 の何乗かが9 に等しい」と言っています。$9 = 3^2$ であることに気づくので、解は$x = 2$ でなければなりません。これに対して、$x = 3$ は解ではありません。なぜなら$3^3 = 27 \neq 9$ だからです。

練習問題2

次の方程式を解きなさい。

(a) $2^x = 4$
(b) $2^x = 16$
(c) $2^x = 1$
(d) $2^x = \sqrt{2}$

解答

(a) $4 = 2^2$ なので、$x = 2$.
(b) $16 = 2^4$ なので、$x = 4$.
(c) $1 = 2^0$ なので、$x = 0$.
(d) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ なので、$x = \dfrac{1}{2}$.

1.7.1　対数を使って指数方程式を解く

この授業では、指数を含む非常に基本的な方程式（練習問題2 のようなもの）だけを解きます。しかし、指数方程式の解がそれほど明らかでない場合もあることには触れておく価値がありま

す。例えば、次の方程式を考えます。

$$4^x = 17.$$

$4^2 = 16$ かつ$4^3 = 64$ であることを知っているので、x は2 と3 の間のどこか、おそらく2 に非常に近い値だと予想できます。しかし、見ただけでは、ここまでが限界に思えます。

変数x が指数の中にある方程式の場合、累乗の逆操作があり、それを対数と呼びます。4^x を元に戻す対数は$\log_4$ と書かれ、次を満たします。

$$\log_4(4^x) = x.$$

したがって、$4^x = 17$ を解くには、単に両辺に$\log_4$ を適用すればよいのです。

$$\log_4(4^x) = \log_4(17) \quad \Rightarrow \quad x = \log_4(17).$$

電卓を使うと、$\log_4(17) \approx 2.04373$ です。より一般に、任意の底$n > 0$ かつ$n \neq 1$ に対して、n^x の逆である対数$\log_n$ があります。

対数は通常、複雑で無限に続く小数であり、電卓なしでは計算できないことに注意しておく価値があります。したがって、この授業では、解くために対数が必要な方程式は扱いません。

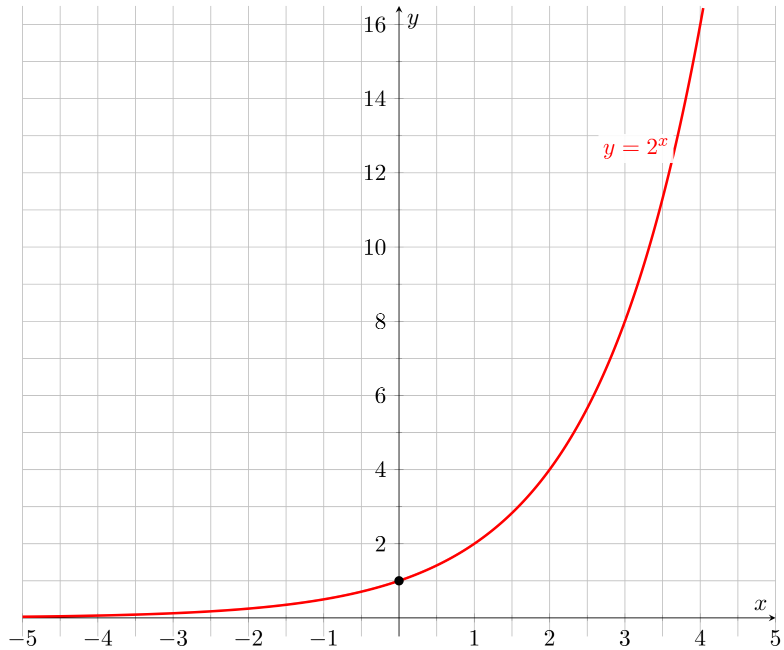
2 指数関数の幾何

2.1 $y = 2^x$ のグラフ

$y = 2^x$ のグラフを理解するには、いくつかの入力と出力の値を並べると役に立ちます。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

このデータに基づくと、$y = 2^x$ のグラフはy 軸を点$(0, 1)$ で通るはずだと分かります。また、x が1 増えるたびに、出力値2^x は二倍になることも分かります。同様に、x が1 減るたびに、出力は2 で割られます。実際、x が大きくなるにつれて、2^x は非常に速く成長することが分かります。x がどんどん負になるにつれて、2^x は0 にどんどん近づきますが、実際に0 に到達することはありません。$y = 2^x$ の実際のグラフを下に描きます。



2.2 $b > 1$ として$y = b^x$ を使うと何が変わるか？

前の例では、$b = 2$ という値を使い、2^x のグラフを描きました。下には、b の異なる値に対する指数関数のグラフのスケッチがあります。ここには重要な事実が二つあります。

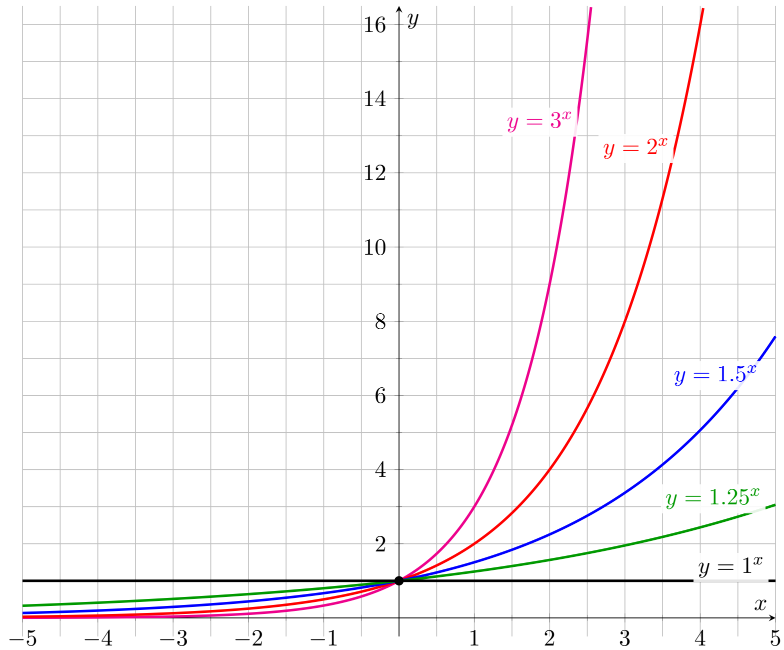
(1) すべての$b > 0$ に対して$b^0 = 1$ なので、すべての指数関数のグラフは$(0, 1)$ を通ります。

(2) 底b は成長率と呼ばれます。なぜなら、x が1 増えたときに何倍するかを教えてくれるからです。

底b が大きいほど（$b > 1$ の場合）、x が増えるにつれてグラフはより速く成長します。例えば、

- $b = 3$ ならば、x を1 増やすと出力は3 倍になります。
- $b = 1.5$ ならば、x を1 増やすと出力は1.5 倍になります。

一般に、$b > 1$ のとき、方程式$y = b^x$ は指数的増加関数と呼ばれ、値b は成長因子と呼ばれます。



2.3　指数的減少

$0 < b < 1$ ならば、$y = b^x$ は指数的減少関数です。

この場合も$(0, 1)$ を通ります。なぜなら$b^0 = 1$ だからです。しかし今度は、x が1 増えると、1 より小さい数を掛けることになるので、出力は小さくなります。

例：$b = \dfrac{1}{2}$ ならば、右へ一ステップ進むごとに出力に$\dfrac{1}{2}$ を掛けるので、値は毎回半分になります。

x がどんどん大きくなるにつれて、b^x は0 にどんどん近づきます。x が非常に負になるにつれて、b^x は非常に大きくなります。

2.3.1　成長を減少に変える

指数法則を使うと、

$$b^{-x} = \frac{1}{b^x}.$$

これは、$y = b^{-x}$ のグラフが、$y = b^x$ のグラフをy 軸に関して反射したものと同じであることを教えてくれます。しかし、次のように書き直すこともできます。

$$b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x.$$

したがって、グラフを反射することは、底をb から$\dfrac{1}{b}$ に変えることになります。これにより、減少を一種の「逆向きの」成長として解釈できます。例えば、x の各ステップごとに量が半分に縮むことをモデル化するには、分数の成長因子を使って、

$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

と書けます。

2.4 指数的増加の一般モデル

この授業で使う最も一般的な指数モデルは、

$$y = a \cdot b^{kx}.$$

です。ここで、

- a は初期値（開始時の値）です。
- b は成長率（または減少率）です。
- k は成長定数です（必要なら時間変数をスケールします）。
- x は通常、時間です。

もう一度繰り返すと、実数値の指数モデルでは、通常、成長率b はゼロより大きいと仮定します。可能性は三つあります。

- $0 < b < 1$ ならば、**指数的減少**です。
- $b = 1$ ならば、**まったく成長しません**（関数は$y = 1$ で一定だからです）。
- $b > 1$ ならば、**指数的増加**です。

3 例題

3.1 米とチェス

チェス盤の最初のマスに米粒を1 粒置くとします。二番目のマスには米粒を2 粒置きます。三番目のマスには米粒を4 粒置きます。四番目のマスには米粒を8 粒置きます。この手順を続けます。

練習問題3

チェス盤には8×8 個のマスがあります。最後のマスには米粒が何粒ありますか。

解答

最初のマスには2^0 粒、二番目には2^1 粒、三番目には2^2 粒、というように続きます。したがって、64番目のマスには

$$2^{63}$$

粒の米があります。
数値としては、

$$2^{63} = 9{,}223{,}372{,}036{,}854{,}775{,}808 \approx 9.22 \times 10^{18}.$$

これは想像しにくいほど、笑ってしまうくらい巨大な数です。参考までに言うと、地球上で一年間に生産される米粒の総数は、見積もりにもよりますが、チェス盤の46番目か47番目のマスあたりに相当します。

3.2　細菌の増殖

ある科学者が細菌の個体数を観察しています。

時刻$t = 0$ 時間では、細菌は$N = 50$ 個います。2 時間後には、細菌は$N = 500$ 個います。4 時間後には、細菌は$N = 5000$ 個います。

したがって、個体数は2 時間ごとに10 倍になっています。これを表すモデルは、

$$N(t) = 50 \cdot 10^{t/2},$$

です。ここでt は時間単位で測られます。

練習問題4

次に答えなさい。

(a) $N(4) = 5000$ であることを確認しなさい。

(b) $N(6)$ を計算しなさい。

(c) 個体数が500,000 個の細菌に達するには何時間かかりますか。

(d) 12 時間で、個体数は何倍に増えますか。

解答

(a)

$$N(4) = 50 \cdot 10^{4/2} = 50 \cdot 10^2 = 50 \cdot 100 = 5000.$$

(b)

$$N(6) = 50 \cdot 10^{6/2} = 50 \cdot 10^3 = 50 \cdot 1000 = 50{,}000.$$

(c) $500{,}000 = 50 \cdot 10^{t/2}$ を解きます。50 で割ると、$10{,}000 = 10^{t/2}$ です。$10{,}000 = 10^4$ なので、$t/2 = 4$、したがって$t = 8$ 時間です。

(d)

$$N(12) = 50 \cdot 10^{12/2} = 50 \cdot 10^6 = 50{,}000{,}000.$$

開始時の値50 と比べると、これは

$$\frac{50{,}000{,}000}{50} = 1{,}000{,}000$$

倍大きいです。

3.3　ポーション売り

あなたが偉大な勇者であり、戦いの助けを求めてポーション売りのところへ行くと想像してください。ポーション売りは、あなたを強くするポーションをくれます。しかし、規則があります。そのポーションを飲むとあなたは10 倍強くなりますが、その後は通常の強さに戻るまで、1時間ごとに半分ずつ弱くなります（そして、その後は通常の強さのままでいると仮定します）。

有効なポーションの効果を表す単純な減衰モデルは、

$$S(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

です。ここでt は時間単位で測られます。$S(t)$ は、ポーションが有効な間の通常時と比べたあなたの強さです。（したがって、$S = 1$ は「通常の強さ」に対応します。モデルが1 まで下がった時点で、ポーションの効果が切れたと解釈します。）

練習問題5

次に答えなさい。

(a) 2 時間後、あなたの強さはどうなりますか。
(b) いつ、普段の1.25 倍強いと感じますか。
(c) 30 分後には、どれくらい強いと感じますか。

解答

(a)

$$S(2) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2.5.$$

したがって、2.5 倍強いと感じます。

(b) $1.25 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ を解きます。10 で割ると、

$$0.125 = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

ここで$0.125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ なので、$t = 3$ 時間です。

(c) 30 分は0.5 時間です。したがって、

$$S(0.5) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{10}{1.4142} \approx 7.07.$$

したがって、30 分後には約7.07 倍強いと感じます。