

MAT140: 第1讲讲义

算术

我们将从算术开始我们的学习旅程。虽然这可能看起来是一件很基础的事情，但是在课程后面，我们会看到数字的许多基本性质会扩展到其他结构中。暂时来说，你可以把本讲看作一本基本事实和技巧的小百科。接下来的学习中，你一定需要掌握这些内容。它们很可能对你来说已经很熟悉了，不过，一些细节可能已经被遗忘了。

今天，我们将复习：

1. 数轴及其性质，
2. 五种基本算术运算：加法、减法、乘法、除法和乘方，
3. 因数、质数和质因数分解，
4. 最后，分数和小数的算术。

这些技巧中的许多内容会在本课程后面被推广并再次使用，所以现在掌握它们的基本形式是非常重要的。

1 数轴

我们从一个几乎带有哲学味道的问题开始：什么是数？古代数学家们已经给出了若干种答案，我们这里不去回顾它们。相反，我们采取下面这种观点：数就是我们需要它成为的东西。

先从小处开始，也就是数量的概念。在人类历史上的某个时刻，我们注意到，同一类物体可以有多有少。例如，有三个椰子比有两个椰子更多，而有两个香蕉比有四个香蕉更少。在某个时刻，人类的认知发生了一次巨大的飞跃：我们注意到两个椰子和两个香蕉有某种共同之处，于是我们从具体物体中抽象出来，进入数学的领域，并引入了数的概念。像 $1, 2, 3$ 等这样的数，是数量的抽象表示。后来，我们逐渐意识到，我们也可以有零个某种东西，因此又引入了数字 0 来表示这种情况。数学家把这些“计数用的数” $0, 1, 2, 3, \dots$ 称为自然数，并用有些特别的字母 $\mathbb{N}$ 表示所有自然数组成的集合。

显然，拥有 2 个某物比拥有 1 个某物更多，所以自然数有一种自然的排列顺序：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & & \end{array}$$

此外，我们注意到这些数量数有一种加法运算：如果我有 3 根香蕉，又收集了 2 根，那么我总共有 5 根香蕉。过了一段时间，我们意识到，除了增加数量之外，我们还希望有一种相反的操作，也就是移除数量。这当然就是减法。理解减法的一种方式是通过负数：如果我们有 3 根香蕉，并从中拿走一根，那么这就像是在我们的集合中加上 -1 。当然，我们可以继续这样做，因此我们发现自然数还有另一份副本，不过这一次它朝着相反的方向延伸：

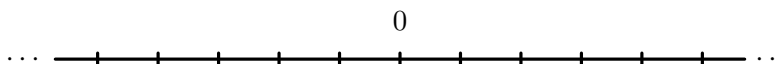
$$\begin{array}{ccccccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots \end{array}$$

我们把这个集合称为整数，并用字母 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数组成的集合。

再过一段时间，我们会注意到，现实世界中的单个物体也可以被分割。例如，如果我们有一个生日蛋糕，我们可能需要把它切开，并把不同的部分分给不同的人。考虑到这一点，我们也需要一种方式来表示数量之间的比，例如某物的一半。这引出了有理数的一般定义，也就是可以写成两个整数之比的数： $\frac{a}{b}$ ，其中 $b \neq 0$ 。数学家用字母 $\mathbb{Q}$ 表示所有有理数组成的集合。由于整数有很多，把它们组合成比的方式也非常多。因此，如果我们把这些数全部画到数的图像上，情况会开始像这样：



事实上，这些有理数密密麻麻地分布在整数周围：无论你在一个整数附近放大多少倍，总能在附近找到有理数。令人惊讶的是，在人们研究有理数几千年之后，古代的一些数学家发现了关于这幅图的一个深刻事实：仍然存在空隙。确实，有一些特殊的数，例如 $\sqrt{2}$ ，似乎确实存在，却不能写成比值 $\frac{a}{b}$ 的形式。这样的数称为无理数。如果我们想把上面的图“填满”，把所有无理数包括进来，那么得到的结果就是一条连续的直线：



这条连续直线应该被理解为一个数的集合：这条线上的任意一个点都对应一个单独的数，它可能是自然数，可能是整数，也可能是有理数或无理数。所有这些数组成的集合称为实数，我们用字母 $\mathbb{R}$ 表示它。

把所有数排列成一条直线，使我们可以把数理解为有顺序的。我们通常用符号 $<$ 表示这种顺序，也就是说，写 $a < b$ 表示数 a 小于数 b 。从几何上看，这意味着 a 位于数轴上 b 的左边。下面总结了我们目前的讨论。

实数

实数集记作 $\mathbb{R}$ ，它包含所有可以放在数轴上的数。重要的实数类型包括：

- **自然数**： $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。
- **整数**： $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。
- **有理数**： 可以写成分数 $\frac{a}{b}$ 的数，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0$ 。
- **无理数**： 不能写成分数的实数，例如 $\sqrt{2}$ 、 π 和 e 。

1.1 绝对值

在进入“五大”运算之前，我们先简要讨论绝对值运算。非常简单地说，绝对值是一种去掉数前面负号的运算。我们用两条竖线表示这个运算，例如

$$|-3| = 3, \quad \text{且} \quad |-8| = 8.$$

如果没有负号需要去掉，那么绝对值运算什么也不改变，例如

$$|2| = 2, \quad \text{且} \quad |15| = 15.$$

事实上，绝对值运算在数轴上有一个几何意义：它提供了一种表达距离的方式。

作为距离的绝对值

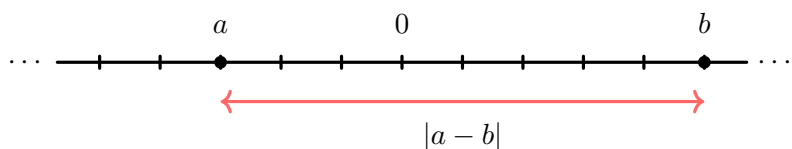
对任意实数 $a \in \mathbb{R}$ ，绝对值 $|a|$ 表示数轴上 a 到 0 的距离。由于距离永远不会是负数，所以总有

$$|a| \geq 0.$$

我们也可以用这个想法来计算不同实数之间的距离。两个数 a 和 b 之间的距离为

$$|a - b|.$$

从图像上看，运算 $|a - b|$ 大致是在做下面这件事：



练习1

计算下列各式。

1. $|-3|$

2. $|7|$

3. $-|4|$

4. $-|-1|$

5. $|0|$

6. $-|3 - 5|$

2 算术运算

现在我们开始描述实数上的一些算术运算。实际上，在实数轴上可以做许多事情。暂时来说，我们会介绍五种基本运算。它们是：

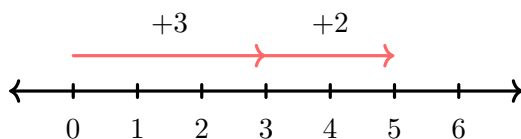
1. **加法：** 合并数量或变化。
2. **减法：** 求差，或者加上相反数。
3. **乘法：** 重复加法或缩放。
4. **除法：** 分成若干组，或者乘以倒数。
5. **乘方：** 重复乘法。

2.1 加法

加法把两个数合并成第三个数。当然，我们可以用数量的合并来理解加法。例如， $3 + 2 = 5$ 可以理解为：

$$\bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

不过，在数轴上，我们也可以把3和2理解为连续的长度。这意味着加法会把这些线段合并起来，得到一条长度为5的更长线段：



使用任意一种解释，我们都可以发现加法的一系列基本性质，这些性质对所有实数都成立。下面是其中四条重要性质。

加法的性质

对所有实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- 交换律:

$$a + b = b + a.$$

例如, $3 + 5 = 5 + 3$ 。

- 结合律:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

例如, $(2 + 6) + 5 = 2 + (6 + 5)$ 。

- 加法单位元:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- 加法逆元:

$$a + (-a) = 0.$$

回忆一下，对于较大的非负整数，我们可以使用竖式进位算法来做加法。例如：

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 8 \\ \quad 6 \quad 2 \\ + \quad 5 \quad 3 \quad 6 \\ \hline 7 \quad 4 \quad 6 \end{array} \quad \text{所以} \quad 148 + 62 + 536 = 746.$$

这里我们从最右边的一列开始，把那些数字相加。如果答案超过10，就向下一列额外加上1，然后重复这个步骤，直到没有更多列为止。

2.2 减法

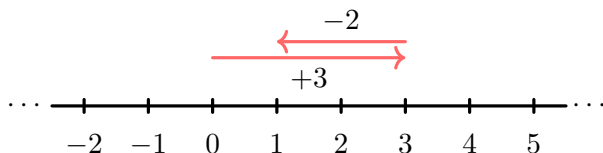
减法其实就是加上相反数：

$$3 - 2 = 3 + (-2).$$

因此，减法与加法逆元性质密切相关：对任意实数 a ，从一个数量中减去 a ，等同于给它加上数 $-a$ 。在这个意义上，减法和加法是相反的运算。从数量的角度看，减法就是移除东西。例如， $3 - 2 = 1$ 就是：

$$\bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet = \bullet$$

如果我们选择把数理解为连续的长度，那么减法就是从线段中移除一部分，或者等价地，沿相反方向加上一条线段：



对于两个非负整数的减法问题，我们可以使用借位算法。例如：

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 17 \\ 1 \ \cancel{4} \ \cancel{7} \\ - \quad 2 \ 9 \\ \hline 1 \ 1 \ 8 \end{array} \quad \text{所以} \quad 147 - 29 = 118.$$

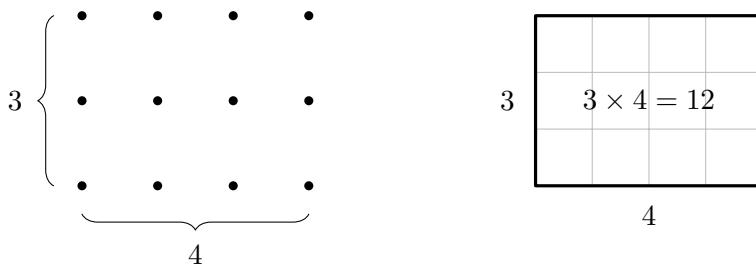
这里的想法是，个位上的7太小，不能减去9，所以我们从十位上“借”一个十。这就把47变成了3个十和17个一。

2.3 乘法

对正整数 a 和 b 来说，乘法只是重复进行加法：

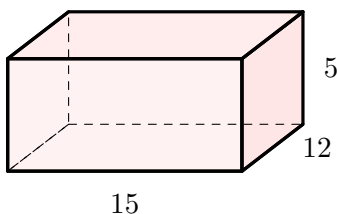
$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ 次}}.$$

我们常把乘法写作 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 。乘法也有几何意义：如果长度由一条线段表示，那么两个长度相乘就给出一个二维的面积。



三个长度相乘给出体积。例如，一个长为15、宽为12、高为5的长方体，其体积为

$$15 \times 12 \times 5 = 900.$$



和加法一样，乘法也有一些重要性质。

乘法的性质

对所有实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- 交换律:

$$ab = ba.$$

例如, $4 \cdot (-7) = (-7) \cdot 4$ 。

- 结合律:

$$(ab)c = a(bc).$$

例如, $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$ 。

- 乘法单位元:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- 乘法逆元:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \quad a \neq 0.$$

等价地,

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0.$$

对于较大的整数，我们可以使用另一种竖式算法来做乘法。例如：

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 14 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 322 \end{array} \quad \text{所以} \quad 23 \times 14 = 322.$$

我们会在习题课中更多地练习这一点。

2.4 除法

正如减法其实是加法的另一种形式一样，除法其实也是乘法的另一种形式。这一次，我们使用上面的乘法逆元性质：除以一个非零数，等同于乘以它的倒数：

$$8 \div 2 = 8 \times 2^{-1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

除法术语

一个数除以一个非零数所得的结果称为**商**。除法

$$30 \div 6$$

也可以写成

$$30/6 \quad \text{或} \quad \frac{30}{6}.$$

在表达式 $30 \div 6$ 中，数 30 称为**被除数**，6 称为**除数**。在分数 $\frac{30}{6}$ 中，数 30 称为**分子**，6 称为**分母**。

除法的一些重要规则是:

- 零除以一个非零整数等于0。
- 一个非零整数除以零是未定义的。
- 两个同号的非零整数相除, 商为正数。
- 两个异号的非零整数相除, 商为负数。

例如:

$$\frac{-42}{-6} = 7, \quad 36 \div (-9) = -4, \quad 0 \div (-13) = 0, \quad -97 \div 0 \text{ 未定义}.$$

对于较大的数, 我们可以使用长除法。例如:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 13 \overline{)351} \\ \underline{26} \\ 91 \\ \underline{91} \\ 0 \end{array} \quad \text{所以} \quad 351 \div 13 = 27.$$

2.5 因数与质数

因数与质数

设 a 和 b 是正整数。如果 a 能整除 b , 我们就说 a 是 b 的一个**因数或除数**。

例如, 1, 2, 3 和 6 都是 6 的因数。

正整数可以分类如下:

- 数1 既不是质数, 也不是合数。
- **质数**是大于1 的整数, 并且它的正因数只有1 和它自身。
- **合数**是大于1 的整数, 并且它有两个以上的正因数。

每个合数都可以写成若干质数的乘积。这称为它的**质因数分解**。例如:

$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

类似地,

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

大于1 的整数的质因数分解在不考虑顺序的情况下总是唯一的。因此, 从某种意义上说, 质因数分解刻画了这个数。这就是为什么我们把质数称为“质”的原因: 通过把质数相乘, 我们可以构造所有大于1 的整数。

练习2

写出每个数的质因数分解。

1. 68

2. 133

3. 43

2.6 分配律

分配律说明乘法如何与加法相互作用:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

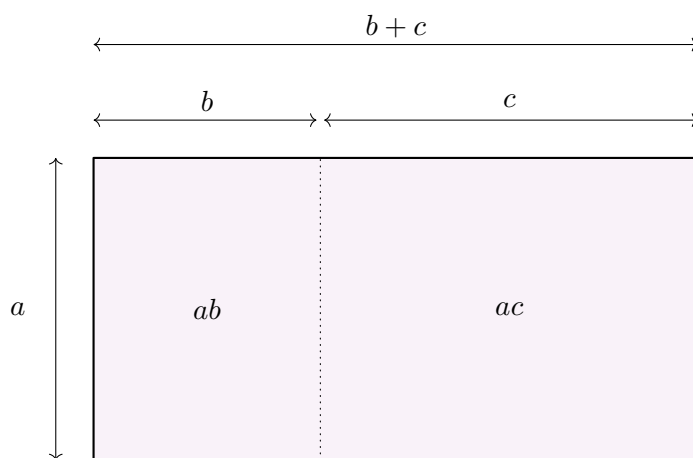
同样地,

$$(a + b)c = ac + bc.$$

例如:

$$3(8 + 5) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5.$$

分配律有一种几何解释。一个大矩形的面积可以拆成两个小矩形的面积之和。



总面积可以用两种等价的方式计算:

$$\text{总面积} = a(b + c)$$

或者

$$\text{总面积} = ab + ac.$$

因此:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

2.7 乘方

乘法是重复加法。对于正整数 b , 乘方是重复乘法:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ 次}}.$$

这里 a 称为底数, b 称为指数。

例如:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

指数法则

对非零实数 a 和 b , 以及整数 m 和 n , 有:

$$\begin{aligned}a^m a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n.\end{aligned}$$

例如:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

我们会在后面的讲义中详细讨论这些法则。现在, 只需要记住它们存在即可。

2.8 运算顺序

当一个表达式包含多个运算时, 我们需要一个标准顺序来计算它。

运算顺序

通常的运算顺序是:

1. 先算**括号**,
2. 然后算**指数**,
3. 然后算**乘法**和**除法**,
4. 最后算**加法**和**减法**。

英文缩写PEMDAS 常用于记忆这个顺序。

举例来说, 假设我们有某个实数 a , 并写出如下表达式:

$$3(a-7)^2 + 2.$$

根据运算顺序, 这意味着:

先减去7, 然后把结果平方, 然后乘以3, 然后加上2.

处理负数和括号时应当小心。例如, 注意:

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9,$$

但是

$$-3^2 = -(3^2) = -9,$$

因为在后一个表达式中, 指数运算比负号先进行。

练习3

计算下列各式。

1. -3^2
2. $(-3)^2$
3. $5 + 2^2$

4. $(5 + 2)^2$
5. $3 \cdot 2^2$
6. $(3 \cdot 2)^2$

3 分数

一个分数

$$\frac{a}{b}$$

表示 $a \div b$ ，其中 $b \neq 0$ 。分数可以表示：

- 整体的一部分，
- 比，
- 率，例如“每”。

例如：

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

3.1 化简分数

要化简一个分数，就把分子和分母同时除以同一个非零数。目标是把分数写成最简形式，也就是说，分子和分母除了1 以外没有公因数。

例如：

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}.$$

一种方法是使用质因数分解：

$$\frac{25}{100} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

另一种方法是使用最大公因数。两个正整数的最大公因数，是同时整除这两个数的最大整数。例如，14 和21 的最大公因数是7，所以

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

3.2 分数的加法与减法

要加减分数，我们需要一个非零的公分母：

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

如果分母不同，就把分数改写成具有公分母的形式。例如：

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

更一般地, 当 $c, d \neq 0$ 时:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

3.3 分数的乘法

要乘分数, 就把分子相乘, 分母相乘, 其中分母都必须非零:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

例如:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

3.4 分数的除法

除以一个非零数, 就是乘以它的倒数:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b, c, d \neq 0.$$

例如:

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

练习4

计算下列各式。

$$\begin{array}{l} 1. \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \\ 2. \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} \\ 3. \frac{6}{3} \div \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4. \frac{18}{24} \\ 5. \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \\ 6. \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9} \end{array}$$

4 小数

小数点右边的数字分别表示十分位、百分位、千分位, 依此类推。例如:

$$0.4 = \frac{4}{10}, \quad 0.04 = \frac{4}{100}.$$

并且,

$$2.305 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

4.1 分数与小数之间的转换

如果分母是10, 100, 1000, ..., 那么转换成小数是直接的:

$$\frac{7}{100} = 0.07.$$

否则, 可以通过除法把分数转换为小数。例如:

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

4.2 小数的四舍五入

小数的四舍五入

要对小数进行四舍五入:

- 如果下一位数字小于5, 则向下舍入。
- 如果下一位数字是5 或更大, 则向上舍入。

“保留 n 位小数”的意思是答案在小数点后应有 n 位数字。

例如, 考虑4.85731。

- 保留2 位小数:

$$4.85731 \approx 4.86.$$

- 保留3 位小数:

$$4.85731 \approx 4.857.$$

- 保留4 位小数:

$$4.85731 \approx 4.8573.$$

小数可以使用和前面相同的竖式算法进行加、减、乘、除。主要额外细节是要仔细追踪小数点的位置。

例如:

$$0.58 + 1.06 = 1.64.$$

练习5

计算下列各题。

1. $0.58 + 1.06$

2. 将 $\frac{7}{100}$ 转换为小数。

3. 将 $\frac{3}{4}$ 转换为小数。

4. 将4.85731 保留2 位小数。

5. 将4.85731 保留3 位小数。

6. 将4.85731 保留4 位小数。

练习题答案

练习1

1. $|-3| = 3$ 。
2. $|7| = 7$ 。
3. $-|4| = -4$ 。
4. $-|-1| = -1$ 。
5. $|0| = 0$ 。
6. $-|3-5| = -|-2| = -2$ 。

练习2

1. $68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17$ 。
2. $133 = 7 \cdot 19$ 。
3. 43 是质数，所以它的质因数分解就是43。

练习3

1. $-3^2 = -(3^2) = -9$ 。
2. $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ 。
3. $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$ 。
4. $(5 + 2)^2 = 7^2 = 49$ 。
5. $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ 。
6. $(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$ 。

练习4

1.
$$\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$
2.
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}.$$
3.
$$\frac{6}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{3} \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4.$$
4.
$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$
5.
$$\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$
6.
$$\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9} = \frac{45}{45} = 1.$$

练习5

1. $0.58 + 1.06 = 1.64$ 。

2. $\frac{7}{100} = 0.07$ 。

3. $\frac{3}{4} = 0.75$ 。

4. $4.85731 \approx 4.86$ 。

5. $4.85731 \approx 4.857$ 。

6. $4.85731 \approx 4.8573$ 。