

MAT140: 第1講講義資料

算術

私たちは算術の話から学習を始めます。これはとても基本的なことに思えるかもしれませんが、この授業の後半では、数の多くの基本的な性質が他の構造にも広がっていくことを見えます。今のところ、この講義は、これから必ず必要になる基本的な事実と技法の百科事典のようなものだと考えてください。これらの内容の多くはすでに知っていると思いますが、細かい部分は忘れているかもしれません。

今日は、次の内容を復習します。

1. 数直線とその性質,
2. 五つの基本的な算術演算：加法、減法、乗法、除法、累乗,
3. 因数、素数、素因数分解,
4. 最後に、分数と小数の算術。

これらの技法の多くは、授業の後半で一般化されて使われます。したがって、今の段階で基本形をしっかり身につけることが重要です。

1 数直線

まず、ほとんど哲学的とも言える問いから始めましょう。数とは何でしょうか。昔の数学者たちはこの問いにいくつかの答えを与えてきましたが、ここではそれらを詳しく扱いません。その代わりに、次のような立場を取ります。数とは、私たちが必要とするものです。

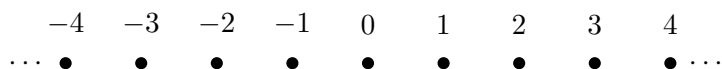
まずは小さなところから、量という考え方から始めます。人類の歴史のある時点で、私たちは同じ種類の物について、多い少ないがあることに気づきました。例えば、ココナッツが三つあることは二つあることより多く、バナナが二本あることは四本あることより少ないです。ある時点で、人間の認知は大きく前進しました。二つのココナッツと二本のバナナには共通する何かがあると気づき、具体的な物から抽象して数学の世界へ進み、数の概念を導入したのです。1, 2, 3 などの数は、量の抽象的な表現です。後に、私たちは何かがあったくない場合もあることに気づき、それを表すために数0 も導入しました。数学者はこれらの「数えるための数」 $0, 1, 2, 3, \dots$ を自然数と呼び、その全体を表すために少し変わった文字 $\mathbb{N}$ を使います。

明らかに、ある物が2 個あることは1 個あることより多いので、これらの自然数には自然な順序があります。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & & & \end{array}$$

さらに、これらの量を表す数には加法という演算があることにも気づきます。例えば、私がバナナを3 本持っていて、さらに2 本集めたなら、合計で5 本のバナナを持っていることになります。しばらくして、量を加えるだけでなく、量を取り除くという反対の操作も欲しいと考えるようになりました。もちろん、これが減法です。減法を理解する方法の一つは、負の数をを用い

ることです。バナナを3本持っていて、そのうち一本を取り除くなら、それは私たちの集まりに -1 を加えるようなものです。もちろん、これを続けることができます。その結果、自然数のもう一つのコピーが反対方向に伸びていることを発見します。

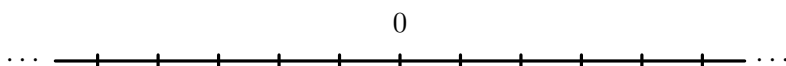


この集まりを整数と呼び、その全体を表すために $\mathbb{Z}$ という文字を使います。

さらにしばらくすると、現実世界の一つ一つの物も分割できることに気づきます。例えば、誕生日ケーキがあるなら、それを切り分けて別々の人に配る必要があるかもしれません。このことを考えると、半分のような、量の比も表す方法が必要になります。これが有理数の一般的な定義を動機づけます。有理数とは、二つの整数の比 $\frac{a}{b}$ として書ける数のことで、ただし $b \neq 0$ です。数学者は有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と書きます。整数はたくさんあるので、それらを組み合わせて比を作る方法も非常にたくさんあります。したがって、これらをすべて数の図の上書き込むと、次のような様子になります。



実際、これらの有理数は整数の周りに非常に密に詰まっています。どれほど整数の近くを拡大しても、近くに有理数を見つけることができます。驚くべきことに、有理数で数千年遊び続けた後、古代の数学者たちはこの図について非常に興味深い事実を発見しました。それでもまだ隙間があるのです。実際、 $\sqrt{2}$ のような特別な数は存在するようには見えませんが、比 $\frac{a}{b}$ として書くことができません。このような数を無理数と呼びます。上の図の「隙間を埋める」ために、すべての無理数も含めるなら、その結果は連続した直線になります。



この連続した直線は、数の集まりとして理解すべきです。この直線上の任意の点是一个の数に対応しており、それは自然数かもしれませんが、整数、有理数、あるいは無理数かもしれません。これらすべてを集めたものを実数と呼び、 $\mathbb{R}$ という文字で表します。

すべての数を直線上に並べることで、数を順序づけられたものとして考えることができます。通常、この順序を記号 $<$ で表します。つまり、 $a < b$ と書くと、数 a は数 b より小さいという意味です。幾何的には、 a が数直線上で b の左側にあることを意味します。ここまでの議論を次にまとめます。

実数

実数の集合は $\mathbb{R}$ と書き、数直線上に置くことができるすべての数を含みます。重要な実数の種類には次のものがあります。

- 自然数： $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。
- 整数： $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。
- 有理数：分数 $\frac{a}{b}$ として書ける数。ただし $a, b \in \mathbb{Z}$ かつ $b \neq 0$ 。
- 無理数：分数として書けない実数。例えば $\sqrt{2}$ 、 π 、 e など。

1.1 絶対値

「五大」演算に入る前に、絶対値という演算について少し説明します。とても簡単に言えば、絶対値とは、数の前についているマイナス符号を取り除く演算です。この演算は二本の縦線で表します。例えば、

$$|-3| = 3, \quad \text{また} \quad |-8| = 8.$$

取り除くマイナス符号がない場合、絶対値は何もしません。例えば、

$$|2| = 2, \quad \text{また} \quad |15| = 15.$$

実際には、絶対値には数直線上での幾何的な意味があります。それは距離を表す方法を与えてくれます。

距離としての絶対値

任意の数 $a \in \mathbb{R}$ に対して、絶対値 $|a|$ は、数直線上で a から0までの距離を表します。距離は決して負にならないので、常に

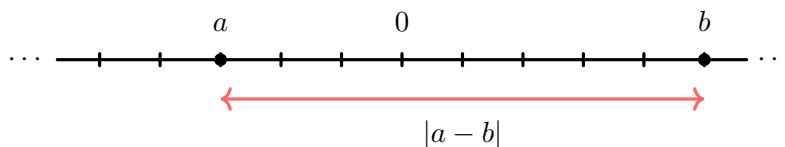
$$|a| \geq 0.$$

が成り立ちます。

この考え方を使って、異なる実数の間の距離も計算できます。二つの数 a と b の間の距離は

$$|a - b|$$

で与えられます。図で見ると、演算 $|a - b|$ はおおよそ次のようなことをしています。



練習1

次を計算しなさい。

- | | |
|-----------|-------------|
| 1. $ -3 $ | 4. $- -1 $ |
| 2. $ 7 $ | 5. $ 0 $ |
| 3. $- 4 $ | 6. $- 3-5 $ |

2 算術演算

ここから、実数に対するいくつかの算術演算を説明します。実際には、実数直線に対してできることはたくさんあります。今のところは、五つの基本演算を導入します。それらは次の通りです。

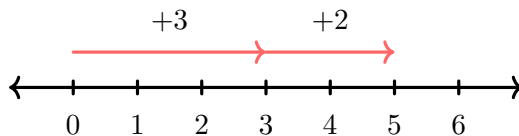
1. 加法：量や変化を合わせること。
2. 減法：差を取ること、または反対の数を加えること。
3. 乗法：繰り返し加法、または拡大縮小。
4. 除法：いくつかの組に分けること、または逆数を掛けること。
5. 累乗：繰り返し乗法。

2.1 加法

加法は二つの数を合わせて三つ目の数を作ります。もちろん、加法は量を合わせることとして理解できます。例えば、 $3+2=5$ は次のように理解できます。

$$\bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

しかし、数直線上では、3 と 2 を連続的な長さとして解釈することもできます。その場合、加法はこれらの線分をつなげて、長さ5 のより長い線分を作ることになります。



どちらの解釈を使っても、すべての実数に対して成り立つ加法の基本性質を発見できます。以下はそのうちの四つの重要な性質です。

加法の性質

すべての実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して：

- 交換法則：

$$a + b = b + a.$$

例えば、 $3 + 5 = 5 + 3$ 。

- 結合法則：

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

例えば、 $(2 + 6) + 5 = 2 + (6 + 5)$ 。

- 加法単位元：

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- 加法逆元：

$$a + (-a) = 0.$$

大きな非負整数については、繰り上がりの筆算アルゴリズムを使って加法を行えることを思い出しましょう。例えば：

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 8 \\ \quad 6 \quad 2 \\ + \quad 5 \quad 3 \quad 6 \\ \hline 7 \quad 4 \quad 6 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 148 + 62 + 536 = 746.$$

ここでは、最も右の列から始めて、その列の数を足します。答えが10を超えた場合、次の列に追加の1を加え、この手順を列がなくなるまで繰り返します。

2.2 減法

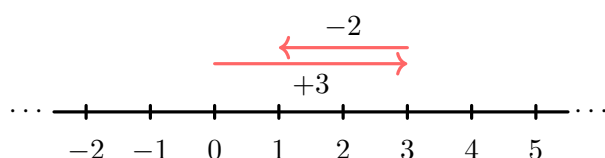
減法は実は反対の数を加えることです。

$$3 - 2 = 3 + (-2).$$

このため、減法は加法逆元の性質と密接に関係しています。任意の実数 a に対して、ある量から a を引くことは、その量に $-a$ を加えることと同じです。この意味で、減法と加法は反対の演算です。量の観点から見ると、減法は単に物を取り除く行為です。例えば、 $3 - 2 = 1$ は次のようなものです。

$$\bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet = \bullet$$

代わりに数を連続した長さとして解釈するなら、減法は線分の一部を取り除くこと、あるいは同じこととして反対方向の線分を加えることになります。



二つの非負整数の減法では、借り下りのアルゴリズムを使うことができます。例えば：

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 17 \\ 1 \ 4 \ 7 \\ - \quad 2 \ 9 \\ \hline 1 \ 1 \ 8 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 147 - 29 = 118.$$

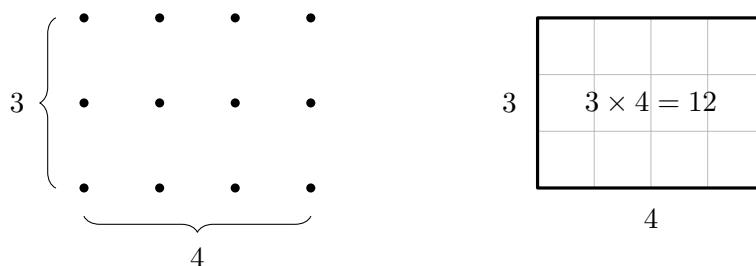
ここでの考え方は、个位の7は9を引くには小さすぎるので、十の位から1個の十を「借りる」というものです。これにより、47は3個の十と17個の一に変わります。

2.3 乗法

正の整数 a と b に対して、乗法は単に加法を繰り返すことです。

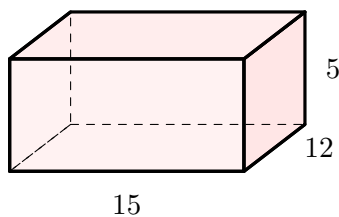
$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ 回}}.$$

乗法は $a \times b$ または $a \cdot b$ と書くことが多いです。乗法にも幾何的な意味があります。長さが線分で表されるなら、二つの長さの積は二次元の面積を与えます。



三つの長さの積は体積を与えます。例えば、長さ15、幅12、高さ5の直方体の体積は

$$15 \times 12 \times 5 = 900.$$



加法と同じように、乗法にもいくつかの重要な性質があります。

乗法の性質

すべての実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して：

- 交換法則：

$$ab = ba.$$

例えば、 $4 \cdot (-7) = (-7) \cdot 4$ 。

- 結合法則：

$$(ab)c = a(bc).$$

例えば、 $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$ 。

- 乗法単位元：

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- 乗法逆元：

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \quad a \neq 0.$$

同じことを次のようにも書けます。

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0.$$

大きな整数については、別の筆算アルゴリズムを使って乗法を行うことができます。例えば：

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 14 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 322 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 23 \times 14 = 322.$$

これは演習の授業でさらに練習します。

2.4 除法

減法が実は加法の別の形であるのと同じ意味で、除法も実は乗法の別の形です。今回は、上の乗法逆元の性質を使います。ゼロでない数で割ることは、その逆数を掛けることと同じです。

$$8 \div 2 = 8 \times 2^{-1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

除法の用語

一つの数をゼロでない数で割った結果を**商**と呼びます。除法

$$30 \div 6$$

は次のようにも書けます。

$$30/6 \quad \text{または} \quad \frac{30}{6}.$$

式 $30 \div 6$ において、数30 は**被除数**、6 は**除数**です。分数 $\frac{30}{6}$ において、数30 は**分子**、6 は**分母**です。

除法に関する重要な規則は次の通りです。

- ゼロをゼロでない整数で割ると0になります。
- ゼロでない整数をゼロで割ることは定義されません。
- 同じ符号を持つ二つのゼロでない整数の商は正です。
- 異なる符号を持つ二つのゼロでない整数の商は負です。

例えば：

$$\frac{-42}{-6} = 7, \quad 36 \div (-9) = -4, \quad 0 \div (-13) = 0, \quad -97 \div 0 \text{ は定義されません。}$$

大きな数については、長除法を使うことができます。例えば：

$$\begin{array}{r} 27 \\ 13 \overline{)351} \\ \underline{26} \\ 91 \\ \underline{91} \\ 0 \end{array} \quad \text{したがって} \quad 351 \div 13 = 27.$$

2.5 因数と素数

因数と素数

a と b を正の整数とします。 a が b を割り切るとき、 a は b の**因数**または**約数**であると言えます。

例えば、1, 2, 3, と6 は6の因数です。

正の整数は次のように分類できます。

- 数1 は素数でも合成数でもありません。
- **素数**とは、1 より大きい整数で、その正の因数が1 と自分自身だけであるものです。
- **合成数**とは、1 より大きい整数で、二つより多くの正の因数を持つものです。

すべての合成数は素数の積として書くことができます。これをその数の**素因数分解**と呼びます。例えば：

$$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

同様に、

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

1 より大きい整数の素因数分解は、順序を除けば常に一意です。したがって、ある意味で素因数分解はその数を特徴づけます。これが、素数を「素」と呼ぶ理由です。素数の積を取ることによって、1 より大きいすべての整数を作ることができるからです。

練習2

それぞれの数を素因数分解しなさい。

1. 68

2. 133

3. 43

2.6 分配法則

分配法則は、乗法が加法とどのように関わるかを説明します。

$$a(b + c) = ab + ac.$$

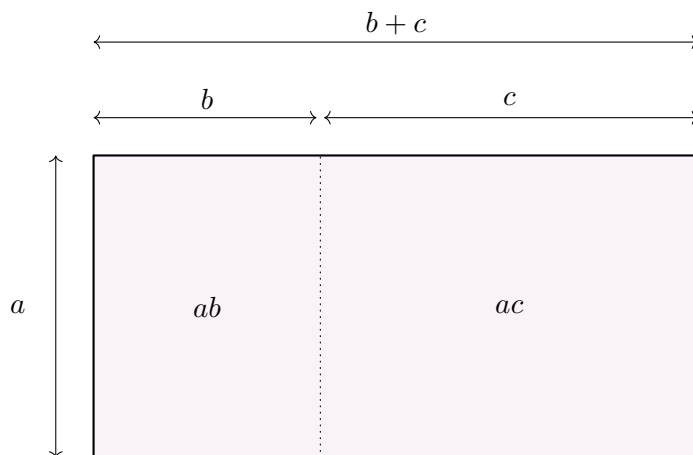
同様に、

$$(a + b)c = ac + bc.$$

例えば：

$$3(8 + 5) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5.$$

分配法則には幾何的な解釈があります。一つの大きな長方形の面積を、二つの小さな長方形の面積に分けることができます。



全体の面積は二つの同値な方法で計算できます。

$$\text{全体の面積} = a(b + c)$$

または

$$\text{全体の面積} = ab + ac.$$

したがって：

$$a(b + c) = ab + ac.$$

2.7 累乗

乗法は繰り返し加法です。正の整数 b に対して、累乗は繰り返し乗法です。

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ 回}}.$$

ここで a を底、 b を指数と呼びます。

例えば：

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

指数法則

ゼロでない実数 a と b 、および整数 m と n に対して、次が成り立ちます。

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

例えば：

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

これらの法則は後の講義で詳しく議論します。今のところは、それらが存在することを覚えておけば十分です。

2.8 演算の順序

一つの式に複数の演算が含まれているとき、それを計算するための標準的な順序が必要です。

演算の順序

通常演算の順序は次の通りです。

1. まず括弧,
2. 次に指数,
3. 次に乗法と除法,
4. 最後に加法と減法。

英語ではPEMDAS という略語がよく使われます。

例として、ある実数 a があり、次のような式を書くとします。

$$3(a-7)^2 + 2.$$

演算の順序に従うと、これは次を意味します。

まず7 を引き、次にその結果を二乗し、次に3 を掛け、最後に2 を加える。

負の数や括弧を扱うときには注意が必要です。例えば、次のことに注意してください。

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9,$$

しかし、

$$-3^2 = -(3^2) = -9,$$

です。後者では、マイナス符号よりも指数が先に作用するからです。

練習3

次を計算しなさい。

1. -3^2

2. $(-3)^2$

3. $5 + 2^2$

4. $(5 + 2)^2$

5. $3 \cdot 2^2$

6. $(3 \cdot 2)^2$

3 分数

分数

$$\frac{a}{b}$$

は $a \div b$ を意味し、ここで $b \neq 0$ です。分数は次のものを表すことができます。

- 全体の一部分,
- 比,
- 「あたり」のような割合。

例えば：

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

3.1 分数の約分

分数を約分するには、分子と分母を同じゼロでない数で割ります。目標は、分数を最も簡単な形で書くことです。つまり、分子と分母が1以外の共通因数を持たない形にすることです。

例えば：

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}.$$

一つの方法は素因数分解を使うことです。

$$\frac{25}{100} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

別の方法は最大公因数を使うことです。二つの正の整数の最大公因数とは、その両方を割り切る最大の数のことです。例えば、14 と 21 の最大公因数は7 なので、

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

3.2 分数の加法と減法

分数を足したり引いたりするには、ゼロでない共通分母が必要です。

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

分母が異なる場合、分数を共通分母を持つ形に書き換えます。例えば：

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}.$$

より一般に、 $c, d \neq 0$ のとき：

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

3.3 分数の乗法

分数を掛けるには、分子どうしを掛け、分母どうしを掛けます。ただし、分母はゼロでないものとしします。

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

例えば：

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

3.4 分数の除法

ゼロでない数で割ることは、その逆数を掛けることです。

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b, c, d \neq 0.$$

例えば：

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

練習4

次を計算しなさい。

1. $\frac{5}{2} + \frac{3}{4}$

2. $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$

3. $\frac{6}{3} \div \frac{1}{2}$

4. $\frac{18}{24}$

5. $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

6. $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9}$

4 小数

小数点の右側の数字は、十分の一、百分の一、千分の一、というように表します。例えば：

$$0.4 = \frac{4}{10}, \quad 0.04 = \frac{4}{100}.$$

また、

$$2.305 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

4.1 分数と小数の変換

分母が10, 100, 1000, ... の場合、小数への変換はすぐにできます。

$$\frac{7}{100} = 0.07.$$

それ以外の場合、除法によって分数を小数に変換します。例えば：

$$\frac{3}{4} = 0.75.$$

4.2 小数の丸め

小数の丸め

小数を丸めるには：

- 次の桁の数字が5 より小さければ、切り捨てます。
- 次の桁の数字が5 以上なら、切り上げます。

「小数第 n 位まで丸める」とは、答えが小数点以下に n 桁を持つという意味です。

例えば、4.85731 を考えます。

- 小数第2 位まで丸めると：

$$4.85731 \approx 4.86.$$

- 小数第3 位まで丸めると：

$$4.85731 \approx 4.857.$$

- 小数第4 位まで丸めると：

$$4.85731 \approx 4.8573.$$

小数も、これまでと同じ筆算アルゴリズムを使って、加法、減法、乗法、除法を行うことができます。主な追加の注意点は、小数点の位置を慎重に追うことです。

例えば：

$$0.58 + 1.06 = 1.64.$$

練習5

次を計算しなさい。

1. $0.58 + 1.06$
2. $\frac{7}{100}$ を小数に変換しなさい。
3. $\frac{3}{4}$ を小数に変換しなさい。
4. 4.85731 を小数第2 位まで丸めなさい。
5. 4.85731 を小数第3 位まで丸めなさい。
6. 4.85731 を小数第4 位まで丸めなさい。

練習問題の解答

練習1

1. $|-3| = 3$ 。
2. $|7| = 7$ 。
3. $-|4| = -4$ 。
4. $-|-1| = -1$ 。
5. $|0| = 0$ 。
6. $-|3-5| = -|-2| = -2$ 。

練習2

1. $68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17$ 。
2. $133 = 7 \cdot 19$ 。
3. 43 は素数なので、その素因数分解は単に43 です。

練習3

1. $-3^2 = -(3^2) = -9$ 。
2. $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ 。
3. $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$ 。
4. $(5 + 2)^2 = 7^2 = 49$ 。
5. $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ 。
6. $(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$ 。

練習4

1.
$$\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$
2.
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}.$$
3.
$$\frac{6}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{3} \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4.$$
4.
$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$
5.
$$\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$
6.
$$\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{9} = \frac{45}{45} = 1.$$

練習5

1. $0.58 + 1.06 = 1.64$ 。

2. $\frac{7}{100} = 0.07$ 。

3. $\frac{3}{4} = 0.75$ 。

4. $4.85731 \approx 4.86$ 。

5. $4.85731 \approx 4.857$ 。

6. $4.85731 \approx 4.8573$ 。