MAT140 — 第10讲讲义
因式分解续篇

上节课我们把**因式分解** 介绍为展开括号的逆过程。例如，

$$(x^2-1)(x-2) \longrightarrow x^3-2x^2-x+2, \qquad x^3-2x^2-x+2 \longrightarrow (x^2-1)(x-2).$$

在本讲中，我们学习一些**特殊的因式分解形式**，然后看看因式分解**有什么用**：它能够帮助我们解许多非线性方程。后一点背后有一个深刻而有趣的代数故事，我们会在课程后面再回到它。现在，我们先从基础开始，给出多项式方程的几何描述。

今天我们将：

1. 学习一些特殊的因式分解形式：平方差、完全平方三项式，以及立方和/立方差。
2. 练习完全因式分解。
3. 学习如何利用零因子性质来解多项式方程。
4. 研究因式分解与多项式方程解之间的几何关系。

1 平方差

最容易识别的一种特殊多项式形式是

$$a^2-b^2,$$

这里的a 和b 可以是一些代数式。上述形式通常称为平方差。其因式分解规则如下。

平方差

如果a 和b 是实数、变量或代数式，那么

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这个一般形式可以通过用FOIL 展开右边的因式分解来验证。这样做时，中间项会互相抵消，最后只剩下平方差：

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

使用这一因式分解规则的关键，是把a 和b 的具体取值明确写出来。这样你就可以把上面的等式当成一个公式来套用。例如，下面是三个平方差及其对应的a 与b：例如：

$$x^2-1 \quad 中a=x\ 且b=1,\ 所以\quad x^2-1=(x+1)(x-1)$$

不过，同样的方法在a 和b 本身是代数式时也成立。例如：

$$4x^2-9 \quad 中a=2x\ 且b=3,\ 所以\quad 4x^2-9=(2x+3)(2x-3).$$

当式子里有多个变量时，这个规则仍然成立。例如：

$$9x^4-16y^2 中a=3x^2\ 且b=4y,\ 所以\quad 9x^4-16y^2=(3x^2+4y)(3x^2-4y).$$

练习1

将每个多项式因式分解。

1. $x^2 - 36$
2. $x^2 - \frac{4}{25}$
3. $81x^2 - 49$
4. $9a^2 - 16b^2$
5. $25y^4 - 1$

2 完全因式分解

2.1 素因数分解

考虑一个整数，例如72。在某种意义上，我们可以通过把它写成若干因子的乘积来对它做“因式分解”。例如，$12 \cdot 6$ 是72 的一种分解，$2 \cdot 36$ 也是。同样地，我们常常还可以继续分解这些因子，比如$36 = 6 \cdot 6$。原则上，我们可以不断重复这一过程，把72 的每个因子拆成越来越小的部分，直到无法继续。这样最终会得到：

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2.$$

如你所见，我们现在已经把72 完全表示成若干不能再继续分解的素数的乘积。这称为72 的素因数分解，因为我们是在把数字72 “分解”成素数的乘积。这个分解是唯一的，并且对于任何正整数都存在。

还要注意，在同一个分解中，同一个素数可能会重复出现多次，例如在72 的素因数分解中，数字2 出现了3 次。这称为该因子的重数，其定义如下。

重数

设n 是一个正整数，其素因数分解为：

$$n = (p_1)^{a_1} \cdot (p_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (p_m)^{a_m},$$

其中p_i 是素数。那么素数p_i 在n 中的**重数**就是指数a_i。

例如，在分解$72 = 2^3 \cdot 3^2$ 中，素数2 的重数是3，而素数3 的重数是2。

2.2 不可约多项式

多项式的因式分解与整数的素因数分解非常相似。在某些情形下，我们可以连续多次做因式分解，把一个多项式不断拆成更小的部分。例如，多项式$x^4 - x^2$ 的因式分解可以分两步完成：

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1).$$

如你所见，这个过程做到这里就必须停止，因为已经没有更多可以做的了。这个现象可以说得更清楚一些：有些多项式可以拆成两个次数更低的非平凡多项式的乘积，而有些则不能。后者很像素数。一个“素多项式”（非正式说法）的因子只有它本身和非零常数。实际上，这类“素多项式”有一个正式名称，它们叫做不可约多项式。

不可约多项式

如果一个多项式不能被分解成两个非常数多项式的乘积，那么它就称为**不可约**。

例如，多项式$x-1$ 是不可约的，因为不存在次数更低的非常数多项式相乘后得到$x-1$。

2.3 完全因式分解

因式分解有时是一个多步过程。每分解出一步之后，你都应该继续检查得到的因子还能不能再分解。这与前面提到的素因数分解在思想上非常相似。不过这里，我们的目标是不断分解一个多项式，直到最后把它表示成若干不可约多项式的乘积。（唯一性说明：在实数范围内，一个完全因式分解在重新排列因子和提出非零常数的意义下是唯一的。也就是说，你和别人可能会把因子的顺序写得不同，或者把常数分配得不同，但不可约的基本构件是相同的。）

完全因式分解

要将一个多项式**完全因式分解**：

1. 先提取**最大公单项式因子**（如果存在）。
2. 然后对剩余的多项式继续因式分解。
3. 重复这一过程，直到利用我们现有的方法不能再继续为止。

例如，考虑多项式x^4-1。首先，注意到它是一个平方差，其中$a=x^2$，$b=1$。因此，我们可以用第1 节中的规则对它分解：

例1

$$x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2+1)(x^2-1).$$

不过我们接着又会发现，较小的多项式x^2-1 仍然是一个平方差，这次是$a=x$，$b=1$。因此，我们还可以继续分解：

$$x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

这里x^2+1 已经不能再继续分解了，所以我们的过程到此结束，并且已经把x^4-1 表示成若干不可约多项式的乘积。

现在再看多项式$20x^3-5x$。这两项有一个最大公单项式因子$5x$，所以我们先把它提出来，然后继续剩下的分解：

$$20x^3-5x=5x(4x^2-1)=5x\big((2x)^2-1^2\big)=5x(2x+1)(2x-1).$$

练习2

将每个多项式完全因式分解。

1. $x^4 - 1$
2. $x^4 - 16$
3. $20x^3 - 5x$
4. $18y^2 - 2$
5. $8x^3 + 27$

3 完全平方三项式

现在我们来看下一个“特殊形式”，即完全平方三项式。它通常来自于一个二项式的平方。

完全平方三项式

如果a 和b 是数、变量或代数式，那么：

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad \text{且} \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

同样，这些公式都很容易通过反向验证来说明，也就是把右边的因式形式展开。对于第一种情形，我们有：

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

而对于第二种情形，我们有：

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2.$$

如你所见，完全平方三项式与平方差很相似。不过与第1 节不同的是，这里的中间项不会以相反符号出现并互相抵消，而是会以相同的符号出现两次，并且加倍。

一个完全平方三项式的例子是：$x^2 + 4x + 4$，其中$a = x$，$b = 2$。因此：

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

再看一个带负号的例子，多项式$y^2 - 6y + 9$。这同样是一个完全平方三项式，只不过这次$a = y$，$b = -3$。因式分解为：

$$y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2.$$

还要注意，多项式中的系数不一定非得是整数。例如：

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

练习3

下面哪些是完全平方三项式？将其中是的进行因式分解。

1. $m^2 - 4m + 4$
2. $4x^2 - 2x + 1$
3. $y^2 + 6y - 9$
4. $x^2 + x + \frac{1}{4}$
5. $9p^2 + 12pq + 4q^2$

4 立方和与立方差

今天要讲的最后一种"特殊形式"是立方和或立方差。

立方和与立方差

如果a 和b 是数、变量或代数式，那么：

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

同样地，这两个公式都可以通过展开右边括号来验证：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+ba^2-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=a^3+b^3,$$

以及：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-ba^2+a^2b-ab^2+ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

下面是一些立方和或立方差的例子：

$$y^3+27=y^3+3^3=(y+3)(y^2-3y+9),$$

$$64-x^3=4^3-x^3=(4-x)(16+4x+x^2),$$
$$2x^3-16=2(x^3-8)=2(x-2)(x^2+2x+4).$$

当然，还存在更高次、更复杂多项式的一般因式分解公式。例如，a^4-b^4 当然也可能有某种分解规律。不过从实际角度看，单纯去死记所有可能出现的多项式形式并不合理。更好的做法是学习因式分解的方法，用这些方法去处理更复杂的多项式。

练习4

将每个多项式因式分解。

1. y^3+27
2. $64-x^3$
3. $2x^3-16$
4. a^3-8
5. $27m^3+1$

5 利用因式分解求解多项式方程

到目前为止，我们一直只是在运算规则的层面上讨论多项式。现在我们要迈向几何，研究多项式图像的样子。我们会看到一个非常直接的收获：我们常常可以通过因式分解来求形如$P(x)=0$ 的方程，而这有着明确的几何意义。

5.1 根与解的几何

我们先讨论多项式方程的解。事实上，它们有一个专门的名字，叫做多项式的根。

多项式的根

设$P(x)$ 是一个多项式。若某个数r 满足

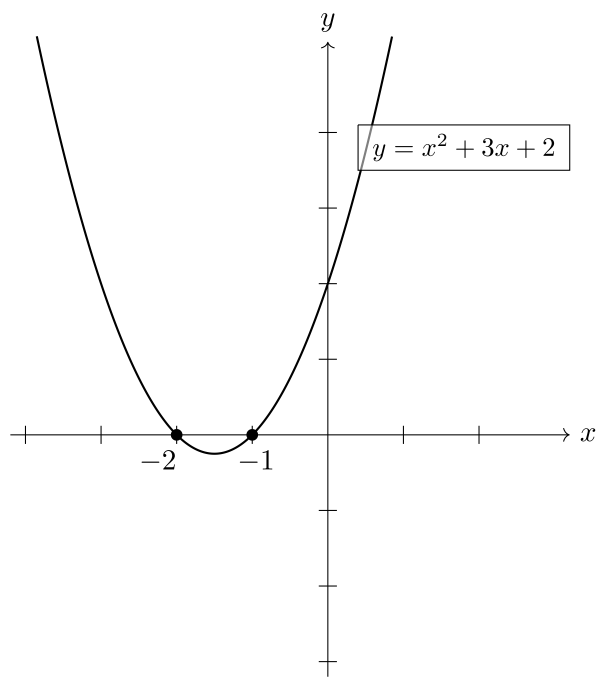
$$P(r) = 0.$$

则称r 是P 的一个**根**。也就是说，如果r 是方程$P(x) = 0$ 的一个解，那么r 就是多项式$P(x)$ 的一个根。

我们来看一个二次式：$x^2 + 3x + 2$。我们可以观察到这个方程有两个根：$x = -1$ 和$x = -2$，因为：

$$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad 且 \qquad (-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

如果现在把函数$y = x^2 + 3x + 2$ 的图像画出来，会得到如下曲线：



如你所见，图像$y = x^2 + 3x + 2$ 与x 轴有两个交点，分别在$x = -2$ 和$x = -1$。这并不神秘，而且实际上非常合理：x 轴的方程就是$y = 0$，因此，方程$x^2 + 3x + 2 = 0$ 的求解，本质上就是在找那些既在曲线$y = x^2 + 3x + 2$ 上，又在直线$y = 0$ 上的点。

通过这个简单例子，我们已经看到了一个一般规律的雏形。

根的几何意义

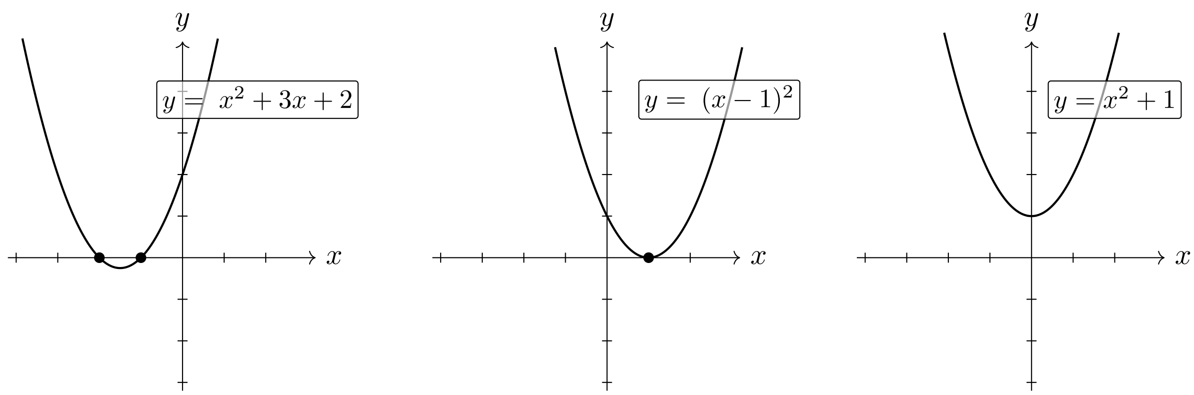
设$P(x)$ 是一个多项式。那么

1. 如果r 是$P(x)$ 的一个根，那么点$(r, 0)$ 就是$P(x)$ 的图像与x 轴的一个交点；反过来也成立；
2. 图像与x 轴相交点的x 坐标，就是$P(x)$ 的根。

还要注意，多项式图像与x 轴相交时可能有两种不同方式：

- 图像碰到x 轴并穿过去；或者
- 图像只是碰到x 轴然后反弹回去。

此外，多项式图像也完全可能根本不碰x 轴。 下面三幅图分别展示了这三种情形。



两个解　　　　**一个解**　　　　**没有解**

这三幅图展示了三种不同情况：

- **两个解：** $y = x^2 + 3x + 2$ 与x 轴相交两次，交点在$x = -2$ 和$x = -1$，因此$x^2 + 3x + 2 = 0$ 的解是$x = -2$ 和$x = -1$。
- **一个实数解：** $y = (x-1)^2$ 在$x = 1$ 处与x 轴相切但不穿过，所以$(x-1)^2 = 0$ 只有一个解$x = 1$。
- **没有实数解：** $y = x^2 + 1$ 从不与x 轴相交，所以$x^2 + 1 = 0$ 没有实数解。

5.2　利用因式分解解多项式方程

再看多项式$x^2 + 3x + 2$。它很容易因式分解：

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

注意到括号里的两个数看起来和前面得到的两个根$x = -1$ 与$x = -2$ 很相似。事实上，如果我们把这两个值代入分解后的形式中，就会看到很漂亮的化简：

- 如果代入$x = -1$，则得到$(-1+1)(-1+2) = (0)(1) = 0$;
- 如果代入$x = -2$，则得到$(-2+1)(-2+2) = (-1)(0) = 0$。

所以我们看到，代入任意一个解，都会使某一个因子变成零，从而保证整个乘积为零。

这一观察提示我们一种一般性的求解策略：如果一个多项式可以被因式分解，那么也许我们就可以根据括号中的信息“直接读出”它的根。下面这个性质正是这种方法的基础。

零因子性质

如果a 和b 是实数、变量或代数式，并且

$$ab = 0,$$

那么必定有$a = 0$ 或$b = 0$（或者两者都为零）。这个性质对三个或更多因子也成立。如果$abc = 0$，那么a, b, c 中至少有一个为零。

这个性质正是用因式分解求解多项式方程的关键：如果我们有一个形如$P(x) = 0$ 的方程，其中P 是多项式，那么我们可以先把$P(x)$ 因式分解，再把每一个因子分别设为零来求解。一般方法如下。

用因式分解解多项式方程

要用因式分解来求解多项式方程：

1. 把方程整理成一边为0。
2. 将另一边的多项式完全因式分解。
3. 把每个因子分别设为0。
4. 解出每个更简单的方程。
5. 通过代入检查解。如果画出图像，解应当对应于x 轴截距。

回到我们的多项式$x^2 + 3x + 2$，我们可以通过因式分解得到方程$x^2 + 3x + 2 = 0$ 的解。因为$(x + 1)(x + 2) = 0$，由零因子性质可知，这必然意味着其中至少有一个因子本身等于零。于是有两种情况：

- 情况1：$x + 1 = 0$，从而$x = -1$。
- 情况2：$x + 2 = 0$，从而$x = -2$。

这正是我们之前得到的两个解。

再看另一个例子，方程$x^2 - x - 6 = 0$。要解这个方程，我们先因式分解，再逐个令因子为零。分解得到$(x + 2)(x - 3) = 0$。于是同样有两种情况：

- 情况1：$x + 2 = 0$，从而$x = -2$。
- 情况2：$x - 3 = 0$，从而$x = 3$。

正如下面的练习所展示的，我们的方法只有在方程右边是零的时候才适用。

5.2.1 练习5

用因式分解法解下列多项式方程。

1. $x^2 - 2x + 16 = 6x$
2. $3x^3 = 15x^2 + 18x$

提示：先把方程整理成右边为零。

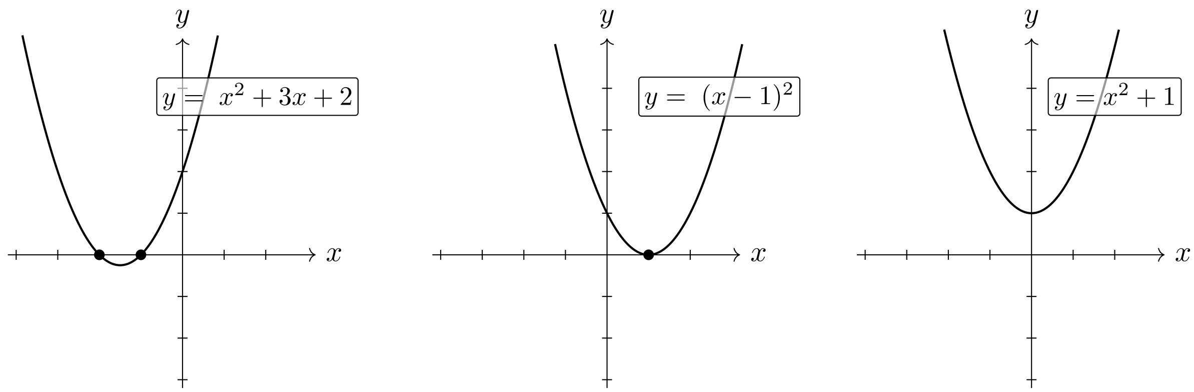
练习6

解每个方程。

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $x^2 + 3x + 17 = 1 - 7x$
3. $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
4. $5x^3 + 33x^2 + 90x = x^3 - 3x^2 + 10x$
5. $x^2 + 1 = 0$

5.3 根与不可约性的关系

让我们回到之前的三个二次方程。



两个解 **一个解** **没有解**

在第一种情形中，我们看到多项式x^2+3x+2 的图像，而我们知道它可以分解为$(x+1)(x+2)$。第二种情形里，我们看到的是一个已经写成因式分解形式的多项式图像：$(x-1)^2$。第三种情形里，则是多项式x^2+1 的图像，而它根本不能继续分解。这就引出了一个问题：多项式的根与它的完全因式分解之间，到底有什么精确关系？

我们可以从代数角度来解释。考虑多项式$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$。这个多项式恰好有一个根$x=1$，因为$(1)^3 - 6(1^2) + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$。现在再考虑多项式$x-1$。我们可以用$(x-1)$ 去除$P(x)$，一般会得到某个更小的多项式：

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R(x),$$

其中Q 是商，$R(x)$ 是余数。正如我们在第8 讲中看到的，余数R 的次数总是小于除式的次数。这里的除式是$(x-1)$，它是一次多项式。这意味着R 的次数必须是0，也就是说它只能是一个常数项。现在，把我们的根代进去，就有：

$$0 = P(1) = (1-1)Q(1) + R = 0 + R$$

这意味着$R=0$，也就是说$(x-1)$ 恰好整除多项式$P(x)$。这是下面一般规律的一个例子。

根与一次因子

如果r 是多项式$P(x)$ 的一个根，那么$(x-r)$ 就是$P(x)$ 的一个因子。

这意味着，求解$P(x) = 0$ 本质上等价于寻找$P(x)$ 的所有一次因子。换句话说，每一个根都会在$P(x)$ 的完全因式分解中贡献一个一次因子。这也解释了为什么$x^2 + 1$ 的图像不与x 轴相交：如果它真的与x 轴相交，那么这些交点坐标就可以用来把$x^2 + 1$ 分解成$(x - r)(x - s)$。但是，多项式$x^2 + 1$ 在实数范围内是不可约的，它不能被拆成次数更低多项式的乘积。因此，这样的因子不存在，于是$x^2 + 1$ 的图像也就不可能与x 轴相交。

根的重数

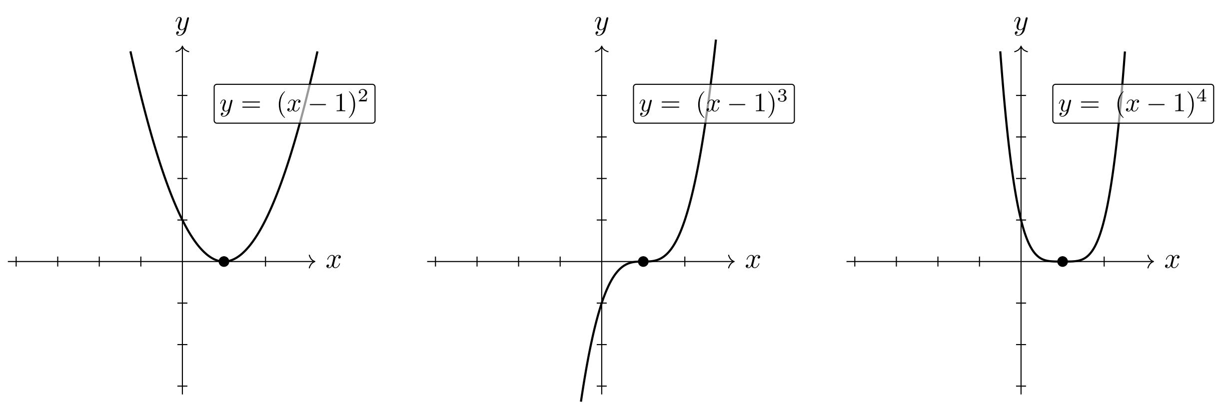
如果

$$P(x) = (x - r)^k Q(x) \quad \text{并且} \quad Q(r) \neq 0,$$

那么我们称r 是一个**重数为k** 的根。换句话说：如果一次因子$(x - r)$ 在$P(x)$ 的完全因式分解中出现了k 次，那么根r 的重数就是k。

事实上，重数会体现在图像靠近x 轴时的形状上：

- 如果k 是**奇数**（例如$k = 1$），图像通常会在$x = r$ 处**穿过** x 轴；
- 如果k 是**偶数**（例如$k = 2$），图像会在$x = r$ 处**碰到** x 轴然后折返。



$r = 1$ **的重数是2**　　$r = 1$ **的重数是3**　　$r = 1$ **的重数是4**

练习答案

练习1

1. $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$。
2. $x^2 - \dfrac{4}{25} = x^2 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \left(x + \dfrac{2}{5}\right)\left(x - \dfrac{2}{5}\right)$。
3. $81x^2 - 49 = (9x)^2 - 7^2 = (9x + 7)(9x - 7)$。
4. $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$。
5. $25y^4 - 1 = (5y^2)^2 - 1^2 = (5y^2 + 1)(5y^2 - 1)$。

练习2

1. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$。

2. $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$。
3. $20x^3 - 5x = 5x(4x^2-1) = 5x(2x+1)(2x-1)$。
4. $18y^2 - 2 = 2(9y^2-1) = 2(3y+1)(3y-1)$。
5. $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x+3)(4x^2-6x+9)$。

练习3

1. $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$（完全平方三项式）。
2. 不是完全平方三项式（中间项应当是$\pm 4x$）。
3. 不是完全平方三项式（最后一项是负数，不是平方）。
4. $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$（完全平方三项式）。
5. $9p^2 + 12pq + 4q^2 = (3p+2q)^2$（完全平方三项式）。

练习4

1. $y^3 + 27 = (y+3)(y^2-3y+9)$。
2. $64 - x^3 = (4-x)(16+4x+x^2)$。
3. $2x^3 - 16 = 2(x^3-8) = 2(x-2)(x^2+2x+4)$。
4. $a^3 - 8 = (a-2)(a^2+2a+4)$。
5. $27m^3 + 1 = (3m)^3 + 1^3 = (3m+1)(9m^2-3m+1)$。

练习5

1. $x^2 - 2x + 16 = 6x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0$，所以$x = 4$。
2. $3x^3 = 15x^2 + 18x \Rightarrow 3x^3 - 15x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x^2-5x-6) = 0 \Rightarrow 3x(x-6)(x+1) = 0$，所以$x = 0, 6, -1$。

练习6

1. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$，所以$x = 2$。
2. $x^2 + 3x + 17 = 1 - 7x \Rightarrow x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+8)(x+2) = 0$，所以$x = -8$ 或$x = -2$。
3. $x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2-7x+10) = x(x-5)(x-2) = 0$，所以$x = 0, 5, 2$。
4. $5x^3 + 33x^2 + 90x = x^3 - 3x^2 + 10x \Rightarrow 4x^3 + 36x^2 + 80x = 0 \Rightarrow 4x(x^2+9x+20) = 0 \Rightarrow 4x(x+5)(x+4) = 0$ 所以$x = 0, -5, -4$。
5. 没有实数解（因为对于所有实数x，都有$x^2 + 1 > 0$）。