MAT140 — 第10講ハンドアウト
因数分解の続き

前回の講義では、**因数分解**を、括弧を展開することの逆の操作として導入しました。たとえば、

$$(x^2-1)(x-2) \longrightarrow x^3-2x^2-x+2, \qquad x^3-2x^2-x+2 \longrightarrow (x^2-1)(x-2).$$

この講義では、いくつかの**特別な因数分解の型**を学び、そのあとで因数分解が**何の役に立つのか**を見ます。因数分解を使うと、多くの非線形方程式を解けるようになります。この点には深くて興味深い代数的背景がありますが、それについては後の講義で改めて戻ることにします。今はまず、多項式方程式の幾何学的な見方を与えながら、基本事項に集中します。

今日は次のことを扱います。

1. いくつかの特別な因数分解の型を学ぶ。すなわち、2つの平方の差、完全平方三項式、2つの立方の和と差。
2. 完全因数分解を練習する。
3. 零積の法則を使って多項式方程式を解く方法を学ぶ。
4. 因数分解と多項式方程式の解との幾何学的関係を調べる。

1　2つの平方の差

特別な多項式の形の中でも、もっとも見分けやすいものの1つが

$$a^2-b^2$$

です。ここでa とb は何らかの代数式です。この形はしばしば*2つの平方の差*と呼ばれます。因数分解の公式は次の通りです。

2つの平方の差

a とb が実数、変数、あるいは代数式であるとき、

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

この一般形は、FOIL を使って右辺を展開してみれば確かめられます。実際、そのとき交差項が打ち消し合って、2つの平方の差だけが残ります。

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

この因数分解を使いこなす鍵は、a とb が何であるかをはっきり書き出すことです。そうすれば、上の式を一種の公式としてそのまま使えます。たとえば、次の3つは2つの平方の差であり、それぞれ対応するa とb は次の通りです。

たとえば：

$$x^2-1 \quad \text{では} a=x,\, b=1 \text{ なので} \quad x^2-1=(x+1)(x-1)$$

ただし、この方法はa とb が式である場合にもそのまま使えます。たとえば：

$$4x^2-9 \quad \text{では} a=2x,\, b=3 \text{ なので} \quad 4x^2-9=(2x+3)(2x-3).$$

また、この方法は変数が複数ある式にも使えます。たとえば：

$$9x^4 - 16y^2 \text{では} a = 3x^2,\ b = 4y \text{ なので} \quad 9x^4 - 16y^2 = (3x^2 + 4y)(3x^2 - 4y).$$

Exercise 1

各多項式を因数分解しなさい。

1. $x^2 - 36$
2. $x^2 - \frac{4}{25}$
3. $81x^2 - 49$
4. $9a^2 - 16b^2$
5. $25y^4 - 1$

2　完全因数分解

2.1　素因数分解

整数72 を考えましょう。ある意味では、この数も積の形に書くことで「因数分解」できます。たとえば、$12 \cdot 6$ も72 の因数分解ですし、$2 \cdot 36$ もそうです。さらに、72 の因子そのものもまた因数分解できることが多く、たとえば$36 = 6 \cdot 6$ です。原理的には、この手続きを繰り返して、各因子をこれ以上分けられなくなるまでどんどん小さくしていけます。そうすると最終的に次の分解に到達します。

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2.$$

見ての通り、これで72 を、これ以上分解できない素数だけを使って表したことになります。これを72 の素因数分解といいます。これは正の整数なら必ず存在し、一意です。

また、同じ素数が何回も現れることもあります。たとえば、72 の素因数分解では2 は3回現れます。この回数をその因子の重複度と呼び、次のように定義します。

重複度

n を正の整数とし、その素因数分解が

$$n = (p_1)^{a_1} \cdot (p_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (p_m)^{a_m},$$

であるとする。ここでp_i は素数である。このとき、n における素数p_i の**重複度**とは、指数a_i のことである。

たとえば、$72 = 2^3 \cdot 3^2$ において、素数2 の重複度は3、素数3 の重複度は2 です。

2.2　既約多項式

多項式の因数分解は、整数の素因数分解によく似ています。場合によっては、多項式を何段階にもわたって因数分解し、どんどん小さな因子に分けていくことができます。たとえば、多項

式$x^4 - x^2$ の因数分解は2段階で行えます。

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1).$$

見ての通り、この過程はここで終わりです。これ以上できることがないからです。このことをもう少しはっきり言えば、2つのより小さい多項式の積に分解できる多項式もあれば、できない多項式もあります。後者は素数によく似ています。つまり、「素な多項式」（非公式な言い方）の因子は、その多項式自身と非零定数しかありません。実際、このような「素な多項式」には正式な名前があり、既約多項式と呼ばれます。

既約多項式

ある多項式が、2つの非定数多項式の積として表せないとき、その多項式を**既約**であるという。

たとえば、多項式$x - 1$ は既約です。なぜなら、$x - 1$ になるような、より次数の低い非定数多項式の組は存在しないからです。

2.3　完全に因数分解する

因数分解は、しばしば多段階の作業です。1回因数分解したあと、その因子がさらに因数分解できないか、必ず確かめるべきです。これは先ほどの素因数分解ととてもよく似た考え方です。ただし今度は、多項式が既約多項式の積として表されるところまで因数分解を続けたいのです。（一意性について一言述べると、実数係数の範囲では、完全因数分解は因子の順序の違いと非零定数のくくり出し方を除いて一意です。つまり、あなたと友人で因子の並べ方が違ったり、定数の配り方が違ったりしても、既約な構成要素そのものは同じです。）

完全に因数分解する

多項式を**完全**に因数分解するには：

1. まず、**最大の共通単項因子**をくくり出す（もしあれば）。
2. 次に、残った多項式を因数分解する。
3. 私たちの道具でこれ以上分解できなくなるまで繰り返す。

例として、多項式$x^4 - 1$ を考えましょう。まず、これは$a = x^2$, $b = 1$ としたときの2つの平方の差です。したがって、第1節で述べた方法により因数分解できます。

Example 1

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

しかしさらに、小さい方の多項式$x^2 - 1$ も、今度は$a = x$, $b = 1$ とした2つの平方の差になっています。したがって、因数分解を続けることができます。

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

ここでx^2+1 はこれ以上因数分解できません。したがってこの過程は終了し、x^4-1 を既約多項式の積として表すことができました。

次に、多項式$20x^3-5x$ を考えましょう。2つの項は共通因子$5x$ をもつので、まずこれをくくり出してから残りを因数分解します。

$$20x^3-5x=5x(4x^2-1)=5x\big((2x)^2-1^2\big)=5x(2x+1)(2x-1).$$

Exercise 2

各多項式を完全に因数分解しなさい。

1. x^4-1
2. x^4-16
3. $20x^3-5x$
4. $18y^2-2$
5. $8x^3+27$

3　完全平方三項式

次は、別の「特別な形」に移ります。これは完全平方三項式で、通常は二項式を2乗した結果として現れます。

完全平方三項式

a とb が数、変数、または代数式であるとき、

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad \text{および} \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

これらの公式も、因数分解された形を逆向きに展開することで簡単に確かめられます。最初の式については

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

後者については

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2.$$

見ての通り、完全平方三項式は2つの平方の差とよく似ています。しかし第1節と違って、ここでは交差項が逆符号で2回出て打ち消し合うのではなく、同じ符号で2回現れて倍になるのです。

完全平方三項式の例として、x^2+4x+4 を考えましょう。ここでは$a=x$, $b=2$ なので、

$$x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

負符号の入る例としては、多項式y^2-6y+9 があります。これも完全平方三項式ですが、この場合は$a=y$, $b=-3$ です。したがって、

$$y^2-6y+9=(y-3)^2.$$

なお、係数が整数である必要はありません。たとえば、

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Exercise 3

次のうち完全平方三項式であるものを選び、そうであれば因数分解しなさい。

1. $m^2 - 4m + 4$
2. $4x^2 - 2x + 1$
3. $y^2 + 6y - 9$
4. $x^2 + x + \frac{1}{4}$
5. $9p^2 + 12pq + 4q^2$

4　2つの立方の和または差

今日扱う最後の「特別な形」は、2つの立方の和または差です。

2つの立方の和と差

a とb が数、変数、または式であるとき、

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

これらもまた、右辺を展開すれば確かめられます。

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + ba^2 - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3,$$

および

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - ba^2 + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

2つの立方の和や差の例をいくつか挙げると、

$$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y+3)(y^2 - 3y + 9),$$

$$64 - x^3 = 4^3 - x^3 = (4-x)(16 + 4x + x^2),$$

$$2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8) = 2(x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

もちろん、もっと高次の複雑な多項式に対しても一般的な因数分解の型はあります。たとえば$a^4 - b^4$ にも何らかの公式がありそうです。しかし実際問題として、多項式にありうるすべての形をただ暗記するのは現実的ではありません。実際には、より複雑な多項式に対処できるような因数分解の技法を学ぶ方がよいのです。

Exercise 4

各多項式を因数分解しなさい。

1. $y^3 + 27$
2. $64 - x^3$
3. $2x^3 - 16$
4. $a^3 - 8$
5. $27m^3 + 1$

5　因数分解を用いて多項式方程式を解く

ここまでは、多項式を単なる操作規則のレベルでしか扱ってきませんでした。ここからは少し幾何学へ踏み込み、多項式のグラフがどのような形をしているかを見ます。そして明確な見返りがあります。$P(x) = 0$ の形の方程式は、因数分解を使ってしばしば解け、そのことにははっきりした幾何学的意味があります。

5.1　根と解の幾何学

まず、多項式方程式の解について考えましょう。実は、これには少し洒落た名前があり、多項式の根と呼ばれます。

多項式の根

$P(x)$ を多項式とする。数r が

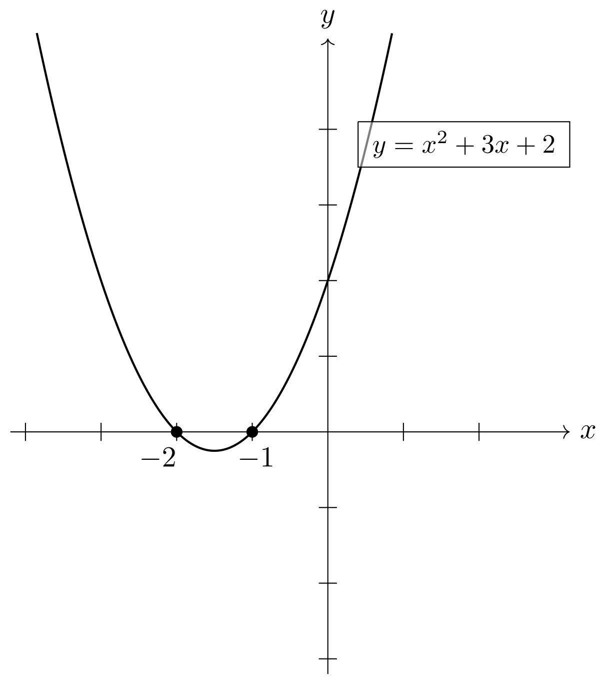
$$P(r) = 0$$

を満たすとき、r をP の**根**という。すなわち、r が多項式$P(x)$ の根であるとは、r が方程式$P(x) = 0$ の解であることを意味する。

二次式$x^2 + 3x + 2$ を考えましょう。この方程式は2つの根$x = -1$ と$x = -2$ をもつことがわかります。なぜなら

$$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad \text{および} \qquad (-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

だからです。ここで関数$y = x^2 + 3x + 2$ のグラフを描くと、次の曲線が得られます。



見ての通り、グラフ$y = x^2 + 3x + 2$ は$x = -2$ と$x = -1$ の2つのx 切片をもちます。これは別に不思議なことではありません。むしろ、完全に自然です。x 軸の方程式は$y = 0$ ですから、方程式$x^2 + 3x + 2 = 0$ を解くことは、グラフ$y = x^2 + 3x + 2$ とグラフ$y = 0$ の両方に同時にのっている点を探すことと同じだからです。

この簡単な例から、一般的な規則の兆しが見えてきました。

根の幾何学的解釈

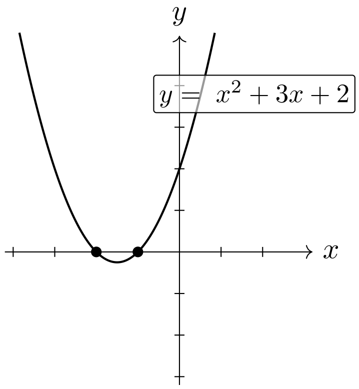
$P(x)$ を多項式とすると、

1. r が$P(x)$ の根であるならば、座標$(r, 0)$ は$P(x)$ のグラフがx 軸と交わる点を表し、逆も成り立つ。
2. $P(x)$ のグラフがx 軸と交わる任意の点のx 座標は、$P(x)$ の根である。

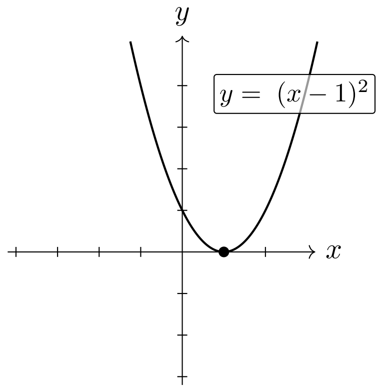
なお、多項式のグラフがx 軸と交わる仕方には2通りあります。

- x 軸に当たってそのまま突き抜ける場合
- x 軸に接するだけで折り返す場合

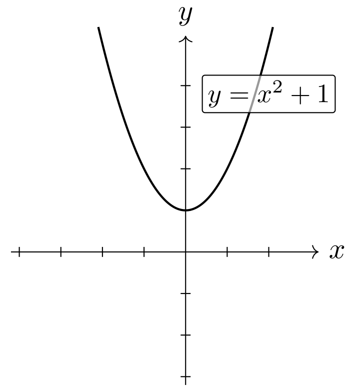
さらに、多項式のグラフがまったくx 軸に触れないこともありえます。これら3つの状況を次に示します。



2つの解



1つの解



解なし

この3つの図は、3つの異なる状況を示しています。

- **2つの解:** $y = x^2 + 3x + 2$ は$x = -2$ と$x = -1$ でx 軸を2回横切るので、$x^2 + 3x + 2 = 0$ の解は$x = -2$ と$x = -1$ である。
- **実数解が1つ:** $y = (x - 1)^2$ は$x = 1$ でx 軸に接するが横切らないので、$(x - 1)^2 = 0$ の解は1つだけで$x = 1$ である。
- **実数解なし:** $y = x^2 + 1$ はx 軸をまったく横切らないので、$x^2 + 1 = 0$ は実数解をもたない。

5.2　因数分解を使って多項式方程式を解く

再び多項式$x^2 + 3x + 2$ を考えましょう。これは簡単に因数分解できます。

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

括弧の中の2つの数が、先ほどの2つの根$x = -1$ と$x = -2$ によく似ていることに注目してください。実際、これらの値を因数分解された形に代入すると、うまい簡約が起こります。

- $x = -1$ を代入すると$(-1 + 1)(-1 + 2) = (0)(1) = 0$ となり、
- $x = -2$ を代入すると$(-2 + 1)(-2 + 2) = (-1)(0) = 0$ となります。

つまり、どちらの解を代入しても、積のどちらか一方が0 になり、その結果、式全体が0 になるのです。

この観察から、多項式を解く一般的な戦略のヒントが得られます。もし因数分解できるなら、括弧の中の情報から根を「読み取る」ことができるのではないか、というわけです。この方法の土台にあるのが、次の事実です。

零積の法則

a とb が実数、変数、または代数式であり、

$$ab = 0$$

であるならば、$a = 0$ または$b = 0$（あるいはその両方）でなければならない。このことは3つ以上の因子にも成り立つ。たとえば$abc = 0$ ならば、少なくともa, b, c のどれか1つは0 である。

この性質こそが、因数分解で多項式方程式を解く鍵です。もしP を多項式として$P(x) = 0$ という方程式があるなら、$P(x)$ を因数分解し、それぞれの因子を順に0 とおくことで解を見つけられます。一般的な手順は次の通りです。

因数分解による多項式方程式の解法

因数分解を使って多項式方程式を解くには：

1. 方程式を変形して、片方の辺が0 になるようにする。
2. もう片方の辺の多項式を完全に因数分解する。
3. 各因子を0 とおく。
4. それぞれの簡単な方程式を解く。
5. 代入して解を確認する。グラフを描けば、解はx 切片と一致するはずである。

先ほどの多項式$x^2 + 3x + 2$ に戻りましょう。これを因数分解すると$(x + 1)(x + 2) = 0$ です。したがって零積の法則により、この積のどちらか一方が0 でなければなりません。考えるべき場合は2つです。

- 場合1: $x + 1 = 0$ ならば$x = -1$。
- 場合2: $x + 2 = 0$ ならば$x = -2$。

これが先ほど得られた2つの解です。

別の例として、方程式$x^2 - x - 6 = 0$ を考えます。これを解くには因数分解して、それぞれの因子を順に0 とおきます。因数分解すると$(x + 2)(x - 3) = 0$ です。ここでも2つの場合があります。

- 場合1: $x + 2 = 0$ ならば$x = -2$。
- 場合2: $x - 3 = 0$ ならば$x = 3$。

次の演習が示すように、この方法は方程式の右辺が0 のときにしか直接は使えません。

5.2.1 Exercise 5

次の多項式方程式を因数分解によって解きなさい。

1. $x^2 - 2x + 16 = 6x$
2. $3x^3 = 15x^2 + 18x$

Hint: 右辺が0 になるように方程式を整理しなさい。

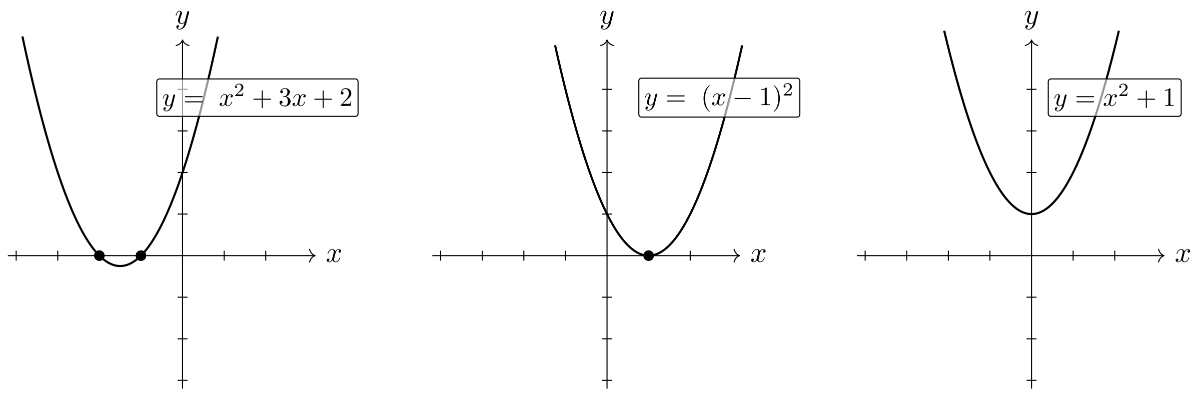
Exercise 6

各方程式を解きなさい。

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $x^2 + 3x + 17 = 1 - 7x$
3. $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
4. $5x^3 + 33x^2 + 90x = x^3 - 3x^2 + 10x$
5. $x^2 + 1 = 0$

5.3　根と既約性の関係

先ほどの3つの二次方程式に戻りましょう。



2つの解　**1つの解**　**解なし**

最初の図は、多項式$x^2 + 3x + 2$ のグラフで、これが$(x+1)(x+2)$ と因数分解できることはすでに知っています。2番目の図では、多項式がすでに因数分解された形$(x-1)^2$ で与えられています。3番目の図では、多項式$x^2 + 1$ のグラフがあり、これはまったく因数分解できません。ここで自然な疑問が生じます。多項式の根と、その完全因数分解との間には、正確にはどのような関係があるのでしょうか。

これを代数的に説明してみましょう。多項式$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ を考えます。この多項式は根$x = 1$ をもちます。実際、$(1)^3 - 6(1^2) + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ です。ここで多項式$x - 1$ を考えます。$P(x)$ を$(x-1)$ で割ると、一般には

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R(x),$$

と書けます。ここでQ は商、$R(x)$ は余りです。第8講で見たように、余りR の次数は常に割る式の次数より小さくなります。この場合、割る式$(x-1)$ は1次式なので、R は0次、つまり定数でなければなりません。ここで根を代入すると

$$0 = P(1) = (1-1)Q(1) + R = 0 + R$$

となるので、$R = 0$ です。つまり$(x-1)$ は多項式$P(x)$ を割り切ります。これは次の一般法則の例です。

根と一次因子

r が多項式$P(x)$ の根であるならば、$(x-r)$ は$P(x)$ の因子である。

これは、$P(x)=0$ を解くことが本質的には$P(x)$ の一次因子をすべて見つけることと同じだ、ということを意味しています。言い換えると、すべての根は$P(x)$ の完全因数分解において一次因子を1つ与えます。これにより、なぜx^2+1 のグラフがx 軸を横切らないのかも説明できます。もし横切るなら、その座標を使って$x^2+1=(x-r)(x-s)$ と因数分解できるはずです。しかしx^2+1 は実数の範囲では既約です。つまり、これをより低次の多項式の積には分解できません。したがってそのような因子は存在せず、結果として、x^2+1 のグラフはx 軸を横切ることができないのです。

根の重複度

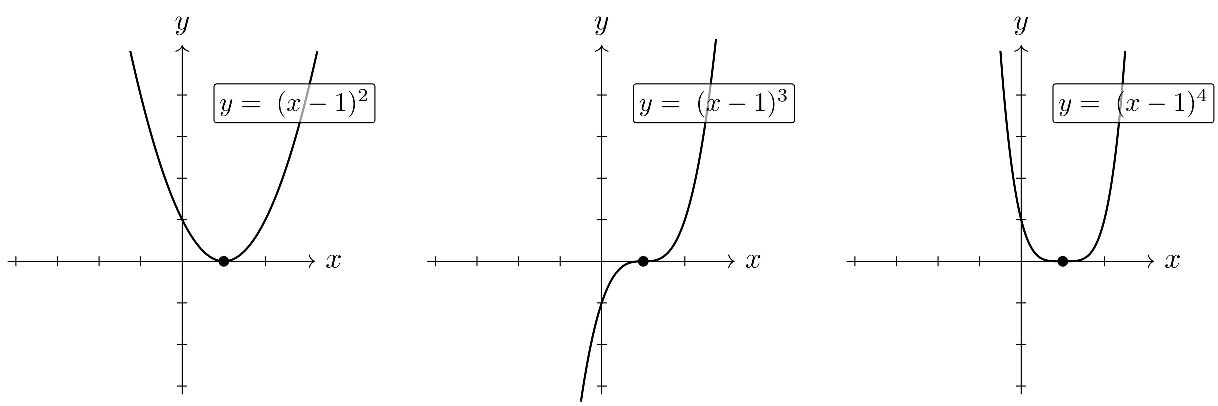
r が**重複度**k の根であるとは、

$$P(x)=(x-r)^k\,Q(x) \quad \text{かつ} \quad Q(r)\neq 0$$

となることである。言い換えると、根r の重複度がk であるとは、完全因数分解において一次因子$(x-r)$ がk 回現れることを意味する。

実は、この重複度はグラフがx 軸の近くでどのような形になるかにも現れます。

- k が**奇数**（たとえば$k=1$）なら、グラフは通常$x=r$ でx 軸を**横切る**。
- k が**偶数**（たとえば$k=2$）なら、グラフは$x=r$ でx 軸に**接して**折り返す。



$r=1$ の**重複度は**2　　$r=1$ の**重複度は**3　　$r=1$ の**重複度は**4

練習問題の解答

Exercise 1

1. $x^2-36=(x+6)(x-6)$.
2. $x^2-\dfrac{4}{25}=x^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\left(x+\dfrac{2}{5}\right)\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$.
3. $81x^2-49=(9x)^2-7^2=(9x+7)(9x-7)$.

4. $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$.
5. $25y^4 - 1 = (5y^2)^2 - 1^2 = (5y^2 + 1)(5y^2 - 1)$.

Exercise 2

1. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.
2. $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$.
3. $20x^3 - 5x = 5x(4x^2 - 1) = 5x(2x + 1)(2x - 1)$.
4. $18y^2 - 2 = 2(9y^2 - 1) = 2(3y + 1)(3y - 1)$.
5. $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$.

Exercise 3

1. $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$（完全平方三項式）。
2. 完全平方三項式ではない（中間項は$\pm 4x$ でなければならない）。
3. 完全平方三項式ではない（定数項が負で、平方数にならない）。
4. $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$（完全平方三項式）。
5. $9p^2 + 12pq + 4q^2 = (3p + 2q)^2$（完全平方三項式）。

Exercise 4

1. $y^3 + 27 = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$.
2. $64 - x^3 = (4 - x)(16 + 4x + x^2)$.
3. $2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.
4. $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$.
5. $27m^3 + 1 = (3m)^3 + 1^3 = (3m + 1)(9m^2 - 3m + 1)$.

Exercise 5

1. $x^2 - 2x + 16 = 6x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 0$ より$x = 4$。
2. $3x^3 = 15x^2 + 18x \Rightarrow 3x^3 - 15x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - 5x - 6) = 0 \Rightarrow 3x(x - 6)(x + 1) = 0$ より$x = 0, 6, -1$。

Exercise 6

1. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$ より$x = 2$。
2. $x^2 + 3x + 17 = 1 - 7x \Rightarrow x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x + 2) = 0$ より$x = -8$ または$x = -2$。
3. $x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2 - 7x + 10) = x(x - 5)(x - 2) = 0$ より$x = 0, 5, 2$。
4. $5x^3 + 33x^2 + 90x = x^3 - 3x^2 + 10x \Rightarrow 4x^3 + 36x^2 + 80x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 9x + 20) = 0 \Rightarrow 4x(x + 5)(x + 4) = 0$ より$x = 0, -5, -4$。
5. 実数解なし（$x^2 + 1 > 0$ はすべての実数x について成り立つため）。