MAT140 — 第11讲讲义
有理式

在前面关于多项式的讨论中，我们一直在发现一种对应关系：

$$\text{多项式} \longleftrightarrow \text{数}.$$

多项式可以像普通数一样进行加法、减法、乘法、除法和化简。事实上，这种对应关系还可以说得更精确一些：我们目前看到的并不是多项式只是模糊地"像数"，而是它们很像整数。

在本讲和下一讲中，我们将完成这一对应关系的讨论，介绍多项式中的有理数类比。回忆一下，通常的有理数就是可以写成比值形式的数，例如$\dfrac{a}{b}$，其中a 和b 是整数。现在我们重复同样的想法，但这次分子和分母都将是多项式，例如：

$$\frac{x^2+3}{x-2}.$$

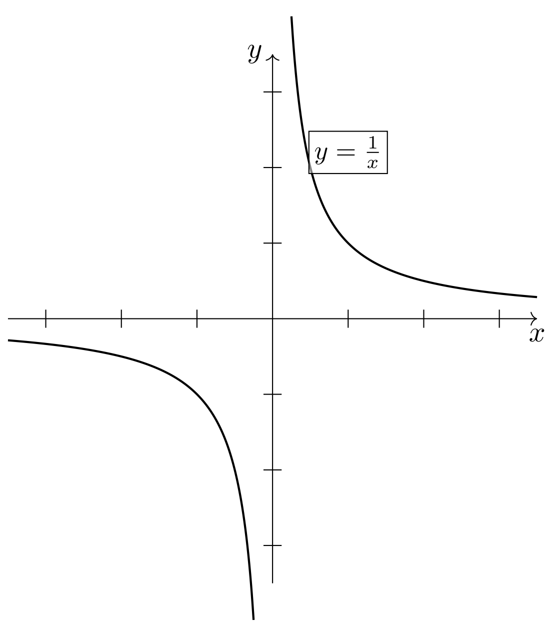
这样的式子称为**有理式**；当我们把它们看作x 的函数时，也称为**有理函数**。正如我们将看到的，有理式的运算规则与大家熟悉的普通分数规则非常相似。当然，其中也有一些需要注意的细节，但总体来说，有理式是相当直观的。

今天我们将：

1. 定义"多项式分式"的概念，并学习如何求它们的**定义域**。
2. 通过因式分解和约去公因子来化简这些新的分式，同时保留正确的定义域限制。
3. 在需要时使用最小公分母，对多项式分式进行乘法、除法、加法和减法。

1 为什么不能除以零

普通分数在分母为0 时没有定义。例如，$\frac{1}{0}$ 不是实数。解释这一点的一种方式是从图像来看：

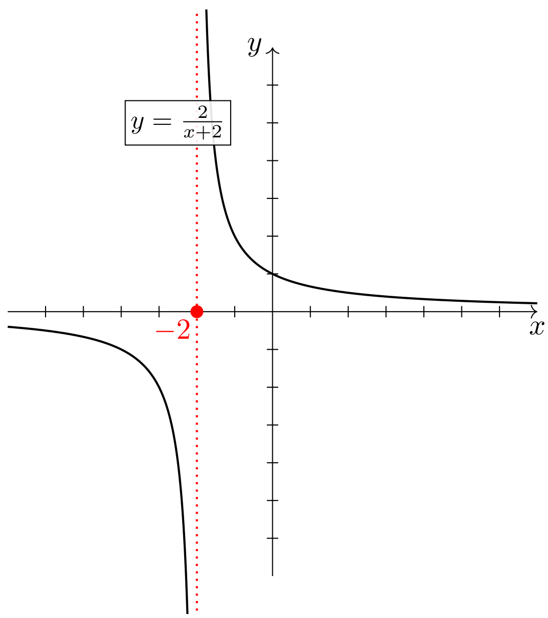


如图所示，当x 从右侧接近0 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的值会越来越大。当x 从左侧接近0 时，它会朝相反方向变得越来越大。这在很多意义上都是不合理的。因此，在0 这个点本身，$\frac{1}{0}$ 的值无法用任何实数来描述。

同样的想法也适用于含有变量的式子。例如，

$$\frac{2}{x+2}\ \text{在}x=-2\ \text{时没有定义。}$$

从图像上看，这一点非常明显：



一般来说，只要分母等于0，分数就会出现问题。由于变量x 可以取实数轴上的各种值，含有变量的分母可能会在某些x 的取值下意外地变成0。在前面的例子中，

$$\frac{1}{x+2}\quad \text{在}x=-2\ \text{时变成：}\ \frac{1}{(-2)+2}=\frac{1}{0}$$

这是没有定义的。

练习1

对每个式子，写出使它没有定义的x 的值。

1. $\dfrac{15}{x}$
2. $\dfrac{15}{x+2}$
3. $\dfrac{9}{4-2x^2}$

2 有理式、有理函数与定义域

现在我们引入一些精确术语，用来讨论由多项式构成的分数。

有理式

有理式是形如

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

的式子，其中$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 是多项式，并且$P_2(x) \neq 0$。

有时候，把有理式想象成一个函数会更有用。像$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ 这样的有理式是一个可以操作和化简的符号对象；但如果把它看成有理函数，它就更像是一个具有输入和输出的规则：

$$\textbf{输入}\ x \xrightarrow{\text{代入}} \boxed{f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}} \xrightarrow{\text{计算}} \textbf{输出}\ y$$

定义域：所有满足$P_2(x) \neq 0$ 的实数x

这种“函数”的观点把多项式的分数变成了可以求值、作图，并且可能用于实际问题的对象。

有理函数与定义域

有理函数是形如

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

的函数，其中$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 是多项式。
它的**定义域**是所有使输出有定义的实数x 的集合，也就是说

$$P_2(x) \neq 0.$$

因此，定义域就是：**除去那些使分母等于0 的值以外的所有实数。**

如何求有理函数的定义域

要求

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

的定义域：

1. 令分母等于零：$P_2(x) = 0$。
2. 解这个方程。
3. 将这些值从定义域中排除。

例

$$f(x) = \frac{4}{x-2}.$$

分母在$x-2=0$ 时等于零，也就是$x=2$。因此定义域是除$x=2$ 以外的所有实数。

$$g(x)=\frac{5x}{x^2-16}.$$

分母在$x^2-16=0$ 时等于零，即$(x-4)(x+4)=0$。所以分母在$x=4$ 或$x=-4$ 时等于零。因此定义域是除$x=\pm 4$ 以外的所有实数。

练习2

求每个有理函数的定义域。

1. $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$
2. $k(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+4x}$

3 有理式的化简

对于普通数的分数，化简意味着约去公因子：

$$\frac{15}{25}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}=\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)\cdot(1)=\frac{3}{5},$$

这通常也可以用"划掉"的记号简写为：

$$\frac{15}{25}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{3\cdot \cancel{5}}{5\cdot \cancel{5}}=\frac{3}{5}.$$

同样的想法也适用于多项式，但通常需要先因式分解。

化简有理式

要化简

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)},$$

可以按照以下步骤：

1. 将$P_1(x)$ 完全因式分解。
2. 将$P_2(x)$ 完全因式分解。
3. 约去所有公因子。
4. 写出定义域限制：任何使原来的分母等于0 的值仍然要排除。

非常重要的一点是，约分只在分母非零时才有效。换句话说，我们不能"约掉"零。例如，写成

$$\frac{3\cdot \cancel{0}}{\cancel{0}}=3 \text{ 是错误的}.$$

回忆一下，约分记号只是把一个公因子除以它自身的简写。因此，如果我们可以错误地把0 像普通数一样约掉，那么就会得到

$$3=\frac{3\cdot 0}{0}=(3)\cdot\left(\frac{0}{0}\right),$$

这意味着$\frac{0}{0}=1$，但这是不正确的。更糟糕的是，如果$\frac{0}{0}$ 真的等于1，那么任意两个数都会变得相等。例如，由于$3\cdot 0=0$，我们会得到

$$3=\frac{3\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}=1,$$

这显然是灾难性的。因此，我们不能约去分母中的零。

现在来看一个有理式化简的例子。考虑$\frac{x^2-1}{3x-3}$。按照上面的步骤，先将分子和分母因式分解，然后在可能时约分：

$$\frac{x^2-1}{3x-3}=\frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)}=\frac{x+1}{3},\qquad \text{其中}x\neq 1.$$

尽管化简后的式子是$\frac{x+1}{3}$，原来的分式在$x=1$ 时没有定义，所以我们必须保留限制$x\neq 1$。再次强调，在$x=1$ 这个点，上面的代数操作**不成立**，因为那相当于在做

$$\frac{(1+1)(1-1)}{3(1-1)}=\frac{2\cdot \cancel{0}}{3\cdot \cancel{0}}\neq\frac{2}{3},$$

这是不允许的，原因正如前面所说。因此，为了避免这种情况，我们必须明确写出$x\neq 1$。

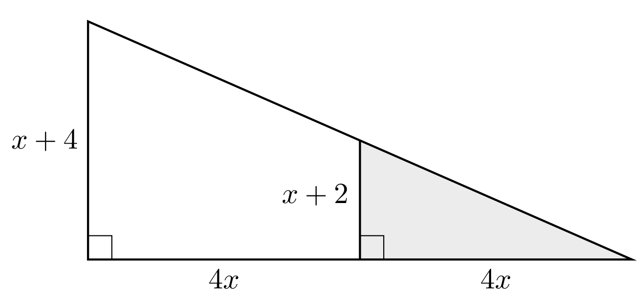
练习3

化简每个有理式，并写出定义域限制。

1. $\dfrac{x^2-1}{3x-3}$
2. $\dfrac{2x^3-6x^2}{6x^2}$
3. $\dfrac{9x^2-4}{3x-2}$

3.1 应用：一个几何比值

假设有一个直角三角形，它的底边长度为$4x+4x=8x$，高度为$x+4$。下图中阴影部分的小直角三角形的底边为$4x$，高度为$x+2$。



现在假设我们想求

$$\frac{\text{小三角形的面积}}{\text{大三角形的面积}},\quad \text{其中}x>0.$$

应该怎么做呢？首先，我们回忆三角形面积公式：

$$\text{面积} = \frac{1}{2}(\text{底边})(\text{高度}).$$

将这个公式用两次，得到

$$\text{小三角形的面积} = \frac{1}{2}(\text{底边})(\text{高度}) = \frac{1}{2}(4x)(x+2),$$

$$\text{大三角形的面积} = \frac{1}{2}(\text{底边})(\text{高度}) = \frac{1}{2}(8x)(x+4).$$

把这两个式子合在一起，就得到下面的有理式，并可以化简：

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(4x)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}\right)(8x)(x+4)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(4x)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}\right)(2)(4x)(x+4)} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\cancel{(4x)}(x+2)}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}(2)\cancel{(4x)}(x+4)} = \frac{x+2}{2(x+4)} = \frac{x+2}{2x+8},$$

其中$x>0$。

4 有理式的乘法

回忆一下，两个分数相乘时，我们把分子相乘、分母相乘。事实上，有理式的乘法与普通分数的乘法完全一样。也就是说：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

这里a, b, c, d 是代数式，并且分母不能为零。步骤总结如下。

有理式的乘法

要乘有理式：

1. 将分子相乘。
2. 将分母相乘。
3. 如果可能，因式分解并化简。
4. 写出定义域限制：排除所有使原分母等于零的值。

例如，要把$\frac{x^2-3}{3x}$ 和$\frac{3}{2x}$ 相乘，我们就像处理普通分数一样：

$$\frac{x^2-3}{3x} \cdot \frac{3}{2x} = \frac{3(x^2-3)}{6x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}, \qquad \text{其中} x \neq 0.$$

练习4

相乘并化简。写出定义域限制。

1. $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x} \cdot \dfrac{x}{x+3}$
2. $\dfrac{4x^3y}{3xy^4} \cdot \dfrac{-6x^2y^2}{10x^4}$

5 有理式的除法

由于除法是乘法的逆运算，所以要用一个分数除以另一个分数，只需要把第二个分数倒过来，然后做乘法。例如：

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{2}.$$

分数除法使用倒数：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

有理式的除法

要除有理式：

1. 将除法改写为乘以倒数，也就是把第二个有理式上下翻转。
2. 将刚刚得到的两个式子相乘。
3. 如果可能，约去分子和分母中的公因子。
4. 定义域限制：
   - 排除所有使原分母等于零的值；
   - 还要排除所有使整个除式等于0 的值。

例如，我们来计算$\frac{x}{x+3}$ 除以$\frac{4}{x-1}$。按照上面的步骤：

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1} = \frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-1}{4} = \frac{x(x-1)}{4(x+3)} = \frac{x^2-x}{4x+12}, \qquad \text{其中} x \neq -3,\ x \neq 1.$$

从这个例子可以看出，除法实际上只是乘法的另一种形式。不过，这里有一个细微差别：上面第(4)步告诉我们，在做除法时可能需要加入额外的限制。为了更清楚地说明这一点，考虑一个例子：假设我们要用$\frac{x^2}{x+1}$ 除以$\frac{x-1}{x+3}$。最终，我们要避免那些会让我们不小心除以零的x 值。显然有两个可能的问题：两个分式的分母都不能为零。但是这里还有第三种可能的问题：整个式子 $\frac{x-1}{x+3}$ 可能等于零。因为我们正在做除法，所以

$$\text{如果}\frac{x-1}{x+3} = 0,\ \text{那么}\frac{x^2}{x+1} \div \frac{x-1}{x+3}\ \text{就变成}\frac{x^2}{x+1} \div 0,\ \text{这是没有定义的。}$$

有理式在分子等于零时可能整体等于零。在这个例子中，$\frac{x-1}{x+3} = 0$ 发生在$x-1=0$ 且$x+3 \neq 0$ 的时候。因此，在写出这个除法的限制时，我们还需要写出$x \neq 1$。

练习5

相除并化简。写出定义域限制。

1. $\dfrac{x}{x+3} \div \dfrac{4}{x-1}$
2. $\dfrac{2x}{3x-12} \div \dfrac{x^2-2x}{x^2-6x+8}$

6 有理式的加法和减法

6.1 分母相同的情况

如果两个分数有相同的分母，那么它们的和特别简单：只需要把分子相加。例如：

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}.$$

有理式的加法也是一样的。

同分母的加法和减法

设a, b, c 是代数式。若$c \neq 0$，则

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \qquad \text{并且} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

练习6

化简每个式子，并写出定义域限制。

1. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{5-x}{4}$
2. $\dfrac{7}{2x-3}-\dfrac{3x}{2x-3}$
3. $\dfrac{x}{x^2-2x-3}-\dfrac{3}{x^2-2x-3}$

6.2 分母不同的情况：通过LCM 求LCD

如果两个分数的分母不同，那么我们首先要把它们"反向化简"为具有相同分母的等价分数。例如：

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}.$$

通常，可以把两个原来的分母相乘来得到新的共同分母。在上面的例子中，$3 \times 4 = 12$。不过，这并不总是必要的。例如，要计算

$$\frac{7}{60}+\frac{19}{120},$$

没有必要把分母变成60×120。我们只需要注意到$60 \times 2 = 120$，因此只需把第一个分数改写成分母为120 的形式：

$$\frac{7}{60}+\frac{19}{120}=\frac{14}{120}+\frac{19}{120}=\frac{23}{120}.$$

这里的120 是60 和120 的最小公倍数，也就是同时以60 和120 为因数的最小数。

多项式的最小公倍式（LCM）

两个或多个多项式的**最小公倍式**，是指最简单的、同时为每一个多项式的倍数的多项式。
求法：

1. 将每个多项式完全因式分解。
2. 收集所有出现过的不同因子。
3. 对每个因子，取它在任何一个多项式中出现的最高次幂。

换句话说，多项式$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 的最小公倍式，就是同时以$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 为因子的"最小"多项式。[1] 在实际计算中，有几个有用的情况可以帮助我们判断两个多项式的LCM。

寻找LCM 的有用技巧

设$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 是多项式。

1. 如果$P_1(x)$ 能整除$P_2(x)$，那么LCM 等于$P_2(x)$。
2. 如果$P_2(x)$ 能整除$P_1(x)$，那么LCM 等于$P_1(x)$。
3. 如果$P_1(x) \neq P_2(x)$，并且二者都是不可约的，那么它们的LCM 是乘积$P_1(x)P_2(x)$。

事实上，这些技巧都来自一个更一般的规则：

$$LCM(P_1, P_2) = \frac{P_1(x) \cdot P_2(x)}{GCD(P_1, P_2)},$$

其中GCD 是多项式的最大公因式，也就是能同时整除$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 的最大多项式。现在来看几个例子。

1. 首先考虑多项式$x+1$ 和x^2-1。注意到后者可以因式分解为$(x+1)(x-1)$。在这个形式下，我们很明显可以看到$x+1$ 是x^2-1 的因子。因此，由上面红框中的规则(1)可知，$x+1$ 和x^2-1 的最小公倍式就是x^2-1 本身。
2. 现在考虑多项式$x+1$ 和x^2+1。在上一讲中，我们看到x^2+1 是不可约多项式，因为它的图像不与x-轴相交。多项式$x+1$ 显然也是不可约的。因此，我们可以使用红框中的规则(3)，得出$x+1$ 和x^2+1 的最小公倍式是它们的乘积$(x+1)(x^2+1)$。

练习7

求下列式子的最小公倍式。

1. $6x,\ 2x^2,\ 9x^3$
2. $x^2-x,\ 2x-2$
3. $3x^2+6x,\ x^2+4x+4$

和前面$\frac{7}{60}+\frac{19}{120}$ 的例子一样，有理式的加法也可以通过寻找最小公倍式来完成。

[1]另一种说法是：$P_1(x)$ 和$P_2(x)$ 都能整除它们的LCM，而这个LCM 是满足该性质的最简单多项式。

分母不同的有理式加减法策略

要加减分母不同的有理式：

1. 将分母因式分解。
2. 求最小公分母，也就是这些分母的LCM。
3. 将每个分式改写为具有最小公分母的形式。
4. 加上或减去分子，分母保持为最小公分母。
5. 如果可能，继续化简，并写出定义域限制。

例如，考虑加法：

$$\frac{7}{6x}+\frac{5}{8x}.$$

这里两个分母不同，所以我们需要用它们的最小公倍式，把它们改写成具有相同分母的分式。至少有两种方法可以做到这一点：

1. 注意到两个分母都含有同样次数的x，只是系数不同。因此，只要先求6 和8 的LCM，然后再乘上x，就得到$6x$ 和$8x$ 的LCM。通过检查可知，6 和8 的LCM 是24。[2] 因此，$6x$ 和$8x$ 的LCM 是$24x$。
2. 也可以使用公式$\mathrm{LCM}=\frac{\text{乘积}}{\mathrm{GCD}}$。在这个例子中，$6x$ 和$8x$ 的最大公因式是$2x$，所以最小公倍式为$\frac{(6x)(8x)}{2x}=\frac{48x^2}{2x}=24x$。

无论用哪种方法，我们都得到LCD 应该是$24x$。现在为了完成计算，需要把两个分式都改写成分母为$24x$ 的形式。对于分母为$6x$ 的分式，需要乘以4；对于分母为$8x$ 的分式，需要乘以3。于是

$$\frac{7}{6x}+\frac{5}{8x}=\frac{7(4)}{6x(4)}+\frac{5(3)}{8x(3)}=\frac{28}{24x}+\frac{15}{24x}=\frac{43}{24x},\qquad \text{其中}x\neq 0.$$

练习8

相加并化简。写出定义域限制。

1. $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3x}{4}$
2. $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{7}{2x}$
3. $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{5}{x}$
4. $\dfrac{1}{6x^2}+\dfrac{3}{x}$
5. $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}$
6. $\dfrac{2x+2}{x^2-3x-4}+\dfrac{3}{x-4}$

练习答案

练习1

1. 当$x=0$ 时没有定义。
2. 当$x+2=0$，即$x=-2$ 时没有定义。
3. 当$4-2x^2=0$ 时没有定义。解得$2x^2=4$，所以$x^2=2$，因此$x=\pm\sqrt{2}$。

[2]更精确地说：$6=2\times3$，$8=2\times2\times2$，所以最小公倍数是$2\times2\times2\times3=24$。

练习2

1. $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$ 的分母在$x^2-9=0$ 时等于零，即$(x-3)(x+3)=0$。定义域：所有满足$x\neq 3$且$x\neq -3$ 的实数。
2. $k(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+4x}$ 的分母在$x^2+4x=0$ 时等于零，即$x(x+4)=0$。定义域：所有满足$x\neq 0$且$x\neq -4$ 的实数。

练习3

1. $$\frac{x^2-1}{3x-3}=\frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)}=\frac{x+1}{3},\qquad x\neq 1.$$
2. $$\frac{2x^3-6x^2}{6x^2}=\frac{2x^2(x-3)}{6x^2}=\frac{x-3}{3},\qquad x\neq 0.$$
3. $$\frac{9x^2-4}{3x-2}=\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x-2}=3x+2,\qquad x\neq \frac{2}{3}.$$

练习4

1. $$\frac{x^2-9}{x^2-4x}\cdot\frac{x}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-4)}\cdot\frac{x}{x+3}=\frac{x-3}{x-4}.$$
   定义域限制来自原来的分母：$x\neq 0$, $x\neq 4$, 且$x\neq -3$。
2. $$\frac{4x^3y}{3xy^4}\cdot\frac{-6x^2y^2}{10x^4}=\frac{-24x^5y^3}{30x^5y^4}=-\frac{4}{5y},\qquad x\neq 0,\ y\neq 0.$$

练习5

1. $$\frac{x}{x+3}\div\frac{4}{x-1}=\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x-1}{4}=\frac{x(x-1)}{4(x+3)},\qquad x\neq -3,\ x\neq 1.$$
2. $$\frac{2x}{3x-12}\div\frac{x^2-2x}{x^2-6x+8}=\frac{2x}{3(x-4)}\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-2)}=\frac{2}{3}.$$
   定义域限制：$x\neq 4$ 来自$3x-12$，$x\neq 2,4$ 来自x^2-6x+8。此外，除式本身不能为0，所以$x^2-2x\neq 0$，即$x\neq 0,2$。合并后得到：$x\neq 0,2,4$。

练习6

1. $$\frac{x}{4}+\frac{5-x}{4}=\frac{x+5-x}{4}=\frac{5}{4}.$$

2.
$$\frac{7}{2x-3}-\frac{3x}{2x-3}=\frac{7-3x}{2x-3}, \qquad x\neq\frac{3}{2}.$$

3. 将x^2-2x-3 因式分解为$(x-3)(x+1)$：
$$\frac{x}{x^2-2x-3}-\frac{3}{x^2-2x-3}=\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{x+1}, \qquad x\neq 3,\ x\neq -1.$$

练习7

1. $6x=2\cdot 3\cdot x$，$2x^2=2\cdot x^2$，$9x^3=3^2\cdot x^3$。因此$\mathrm{LCM}=2\cdot 3^2\cdot x^3=18x^3$。
2. $x^2-x=x(x-1)$，且$2x-2=2(x-1)$。因此$\mathrm{LCM}=2x(x-1)$。
3. $3x^2+6x=3x(x+2)$，且$x^2+4x+4=(x+2)^2$。因此$\mathrm{LCM}=3x(x+2)^2$。

练习8

1.
$$\frac{1}{2x}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{4x}+\frac{3x^2}{4x}=\frac{3x^2+2}{4x}, \qquad x\neq 0.$$

2.
$$\frac{x+2}{2}+\frac{7}{2x}=\frac{x(x+2)}{2x}+\frac{7}{2x}=\frac{x^2+2x+7}{2x}, \qquad x\neq 0.$$

3.
$$\frac{x-2}{3}+\frac{5}{x}=\frac{x(x-2)}{3x}+\frac{15}{3x}=\frac{x^2-2x+15}{3x}, \qquad x\neq 0.$$

4.
$$\frac{1}{6x^2}+\frac{3}{x}=\frac{1}{6x^2}+\frac{18x}{6x^2}=\frac{1+18x}{6x^2}, \qquad x\neq 0.$$

5. 将x^2-1 因式分解为$(x-1)(x+1)$：
$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}, \qquad x\neq 1,\ x\neq -1.$$

6. 将x^2-3x-4 因式分解为$(x-4)(x+1)$，并且$2x+2=2(x+1)$：
$$\frac{2x+2}{x^2-3x-4}+\frac{3}{x-4}=\frac{2(x+1)}{(x-4)(x+1)}+\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-4}=\frac{5}{x-4}.$$

   定义域限制来自原来的分母：$x\neq 4$ 且$x\neq -1$。