

これまで多項式について議論してきた中で、私たちはある「韻」を見つけました：

$$\text{多項式} \longleftrightarrow \text{数}.$$

多項式は、ふつうの数と非常によく似た仕方で、足したり、引いたり、掛けたり、割ったり、簡単にしたりできます。実際のところ、この「韻」はもう少し微妙です。これまで示してきたのは、多項式が何となく「数のようなもの」だというだけではなく、むしろ整数によく似ている、ということでした。

この講義と次の講義では、この韻の話を上上げるために、多項式に対する有理数の類似物を説明します。通常の有理数とは、単に $\frac{a}{b}$ のように整数の比として書ける数のことでした。ここでは同じ考えを繰り返しますが、今度は分子と分母が多項式である分数を考えます。たとえば

$$\frac{x^2 + 3}{x - 2}.$$

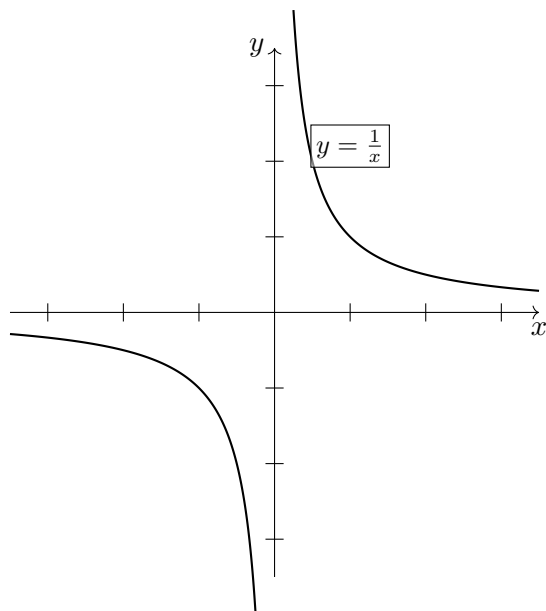
このようなものは**有理式**と呼ばれ、これを $x$ の関数として扱うときには**有理関数**と呼ぶこともあります。見ていくように、これらの有理式の操作は、皆さんがよく知っている分数の通常の規則と非常によく似ています。もちろん微妙な点はいくつかありますが、全体としてはかなり直感的です。

今日は次のことを扱います。

1. 「多項式の分数」という概念を定義し、その**定義域**を求める方法を学ぶ。
2. 因数分解と共通因子の約分によってこれらの新しい分数を簡単にする。ただし、正しい定義域の制限は保つ。
3. 必要に応じて最小公分母を使いながら、多項式の分数の掛け算・割り算・足し算・引き算を行う。

## 1 なぜ0で割ってはいけないのか

ふつうの分数は、分母が0であるときには定義できません。たとえば、 $\frac{1}{0}$ は実数ではありません。これを図で説明する1つの方法は次の通りです。

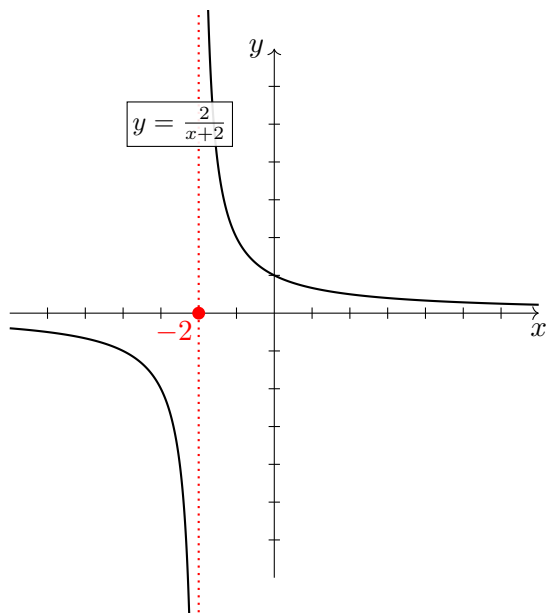


見ての通り、 $x$  を右側から0 に近づけると、 $y = \frac{1}{x}$  はどんどん大きくなっていきます。左側から0 に近づけると、今度は反対向きにどんどん大きくなります。これはいくつもの意味で都合が悪く、結局、 $x = 0$  そのものでは $\frac{1}{0}$  をどんな実数でも表せないと結論せざるをえません。

同じ考えは、変数を含む式にも当てはまります。たとえば

$$\frac{2}{x+2} \text{ は } x = -2 \text{ のとき定義されません。}$$

図で見ると、それは明らかです。



一般に、分数は分母が0になると問題を起こします。変数 $x$ は実数直線全体の値を取りうるので、変数を含む分母は、ある $x$ の値で思いがけず0になってしまうことがあります。前の例では

$$\frac{1}{x+2} \text{ で } x = -2 \text{ なら } \frac{1}{(-2)+2} = \frac{1}{0}$$

となり、これは未定義です。

### Exercise 1

各式について、定義できなくなる $x$ の値を答えなさい。

1.  $\frac{15}{x}$
2.  $\frac{15}{x+2}$
3.  $\frac{9}{4-2x^2}$

## 2 有理式・有理関数・定義域

ここで、多項式からできた分数について正確に話すための用語を導入します。

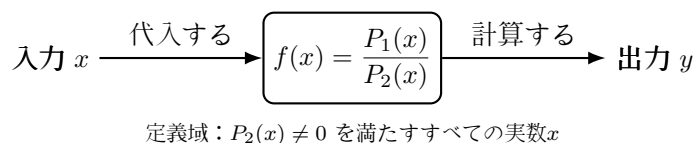
### 有理式

有理式とは、

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

の形の式のことである。ただし $P_1(x)$ と $P_2(x)$ は多項式であり、 $P_2(x) \neq 0$ である。

場合によっては、有理式を関数として見る方が便利です。 $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ のような有理式は、記号として操作・簡約できる対象ですが、有理関数として見ると、入力と出力をもつ規則として理解できます。



この「関数」としての見方によって、多項式の分数は評価したり、グラフを描いたり、応用したりできる対象になります。

## 有理関数と定義域

有理関数とは、

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

の形の関数である。ただし  $P_1(x)$  と  $P_2(x)$  は多項式である。

その定義域は、出力がちゃんと定まるような実数  $x$  全体の集合であり、つまり

$$P_2(x) \neq 0$$

を満たすものである。

したがって定義域とは、分母を0 にしてしまう値を除いたすべての実数である。

## 有理関数の定義域の求め方

$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$  の定義域を求めるには：

1. 分母を0 とおく： $P_2(x) = 0$ 。
2. その方程式を解く。
3. 得られた値を定義域から除く。

### Example

$$f(x) = \frac{4}{x-2}.$$

分母が0 になるのは  $x-2=0$ 、すなわち  $x=2$  のときです。したがって定義域は、 $x=2$  を除くすべての実数です。

$$g(x) = \frac{5x}{x^2-16}.$$

分母が0 になるのは  $x^2-16=0$ 、すなわち  $(x-4)(x+4)=0$  のときです。したがって分母が0 になるのは  $x=4$  または  $x=-4$  のときです。よって定義域は、 $x=\pm 4$  を除くすべての実数です。

### Exercise 2

各有理関数の定義域を求めなさい。

1.  $h(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$

2.  $k(x) = \frac{2x-5}{x^2+4x}$

## 3 有理式の簡約

数の分数では、簡約とは共通因子を約分することでした。

$$\frac{15}{25} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot (1) = \frac{3}{5},$$

これはしばしば「消し線」の記法で略して

$$\frac{15}{25} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{5 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{5},$$

と書かれます。

この考え方は多項式にも使えますが、その前にふつうは因数分解が必要です。

### 有理式の簡約

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

を簡約するには：

1.  $P_1(x)$  を完全に因数分解する。
2.  $P_2(x)$  を完全に因数分解する。
3. 共通因子を約分する。
4. 定義域の制限を書く。つまり、元の分母を0にする値は、依然として除外される。

非常に重要なのは、この約分が使えるのは分母が非零のときだけだ、ということです。言い換えると、0のコピーを「約分」することはできません。たとえば

$$\frac{3 \cdot \cancel{0}}{\cancel{0}} = 3 \text{ は正しくありません.}$$

約分記号は、実際には共通因子を自分自身で割ることの略記です。したがって、もし0も他の数と同じように（誤って）約分できるとすると、

$$3 = \frac{3 \cdot 0}{0} = (3) \cdot \left(\frac{0}{0}\right)$$

となってしまう、 $\frac{0}{0} = 1$  を意味してしまいます。しかしこれは成り立ちません。さらに悪いことに、もし $\frac{0}{0}$ が1だとすると、どんな2つの数も等しくなってしまいます。たとえば、 $3 \cdot 0 = 0$ なので、

$$3 = \frac{3 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = 1$$

と結論できてしまいます。これは明らかに破綻です。したがって、分母にある0を約分してはいけない、ということがわかるはずですが。

では、有理式の簡約の例を見ましょう。式 $\frac{x^2-1}{3x-3}$ を考えます。分子と分母を因数分解し、可能な限り約分するという手順に従うと、

$$\frac{x^2-1}{3x-3} = \frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)} = \frac{x+1}{3}, \quad \text{ただし } x \neq 1.$$

簡約後の式は $\frac{x+1}{3}$ ですが、元の分数は $x=1$ で定義されなかったため、制限 $x \neq 1$ はそのまま残します。もう一度強調すると、 $x=1$ の点では上の代数操作は成り立ちません。なぜなら、そのとき実際には

$$\frac{(1+1)(1-1)}{3(1-1)} = \frac{2 \cdot \cancel{0}}{3 \cdot \cancel{0}} \neq \frac{2}{3}$$

のようなことをしてしまうからです。これは、先ほど述べた理由により許されません。したがって、この状況を避けるために  $x \neq 1$  と明記する必要があります。

### Exercise 3

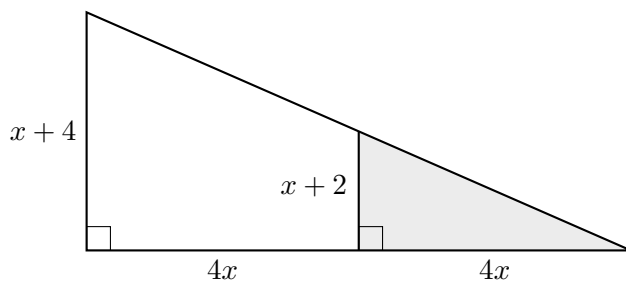
各有理式を簡約し、必要なら定義域の制限も書きなさい。

1.  $\frac{x^2 - 1}{3x - 3}$   
 2.  $\frac{2x^3 - 6x^2}{6x^2}$

3.  $\frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$

### 3.1 応用：ある図形の比

底辺の長さが  $4x + 4x = 8x$ 、高さが  $x + 4$  の直角三角形を考えます。下の図で色のついた小さい直角三角形は、底辺が  $4x$ 、高さが  $x + 2$  です。



ここで

$$\frac{\text{小さい三角形の面積}}{\text{大きい三角形の面積}}, \quad \text{ただし } x > 0$$

を求めたいとしましょう。

どうすればよいでしょうか。まず、三角形の面積公式を思い出す必要があります。

$$\text{面積} = \frac{1}{2}(\text{底辺})(\text{高さ}).$$

この公式を2回用いると、

$$\text{小さい方の面積} = \frac{1}{2}(\text{底辺})(\text{高さ}) = \frac{1}{2}(4x)(x+2)$$

$$\text{大きい方の面積} = \frac{1}{2}(\text{底辺})(\text{高さ}) = \frac{1}{2}(8x)(x+4)$$

となります。これらを合わせると、次の有理式が得られ、さらに簡約できます。

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(4x)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}\right)(8x)(x+4)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(4x)(x+2)}{\left(\frac{1}{2}\right)(2)(4x)(x+4)} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\cancel{(4x)}(x+2)}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}(2)\cancel{(4x)}(x+4)} = \frac{x+2}{2(x+4)} = \frac{x+2}{2x+8},$$

ここで  $x > 0$  です。

## 4 有理式の掛け算

分数の掛け算は、分子どうしを掛け、分母どうしを掛けるのでした。実際、有理式の掛け算もまったく同じです。すなわち

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

ここで  $a, b, c, d$  は代数式であり、分母は0ではないとします。手順をまとめると次の通りです。

### 有理式の掛け算

有理式を掛けるには：

1. 分子どうしを掛ける。
2. 分母どうしを掛ける。
3. 必要なら因数分解して簡約する。
4. 定義域の制限を書く。もとの分母を0にする値は除外する。

たとえば  $\frac{x^2-3}{3x}$  と  $\frac{3}{2x}$  を掛けるには、通常分数と同じように扱えばよく、

$$\frac{x^2-3}{3x} \cdot \frac{3}{2x} = \frac{3(x^2-3)}{6x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}, \quad \text{ただし } x \neq 0.$$

### Exercise 4

掛け算して簡約し、定義域の制限も書きなさい。

1.  $\frac{x^2-9}{x^2-4x} \cdot \frac{x}{x+3}$
2.  $\frac{4x^3y}{3xy^4} \cdot \frac{-6x^2y^2}{10x^4}$

## 5 有理式の割り算

割り算は掛け算の逆ですから、1つの分数を別の分数で割るには、2つ目の分数をひっくり返して掛ければよいのでした。たとえば

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{2}.$$

分数の割り算では逆数を使います：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

### 有理式の割り算

有理式を割るには：

1. 割り算を、逆数を掛ける掛け算に書き直す（2つ目の有理式をひっくり返す）。
2. 得られた2つの式を掛ける。
3. 可能なら分子・分母の共通因子を取り除いて簡約する。
4. 定義域の制限：
  - 元の分母を0にする値を除く。
  - さらに、割る側全体を0にしてしまう値も除く。

例として、有理式  $\frac{x}{x+3}$  を  $\frac{4}{x-1}$  で割ってみましょう。上の手順に従えば、

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1} = \frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-1}{4} = \frac{x(x-1)}{4(x+3)} = \frac{x^2-x}{4x+12}, \quad \text{ただし } x \neq -3, x \neq 1.$$

この例から、割り算は実質的には掛け算の別の形だとわかります。ただし微妙な違いが1つあります。上の(4)が示しているように、割り算では追加の制限が必要になることがあるのです。これをもう少しはっきりさせるために、たとえば  $\frac{x^2}{x+1}$  を  $\frac{x-1}{x+3}$  で割る場合を考えます。最終的に避けたいのは、誤って0で割ってしまう  $x$  の値です。まずobviousな候補は2つあって、両方の分母は常に0であってははいけません。しかしここには3つ目の危険な場合があります。それは、割る側全体  $\frac{x-1}{x+3}$  が0になるときです。なぜなら、私たちは今「割り算」をしようとしているので、

$$\text{もし } \frac{x-1}{x+3} = 0 \text{ ならば } \frac{x^2}{x+1} \div \frac{x-1}{x+3} \text{ は } \frac{x^2}{x+1} \div 0 \text{ となり、未定義である。}$$

有理式全体が0になるのは、分子が0になるときです。この場合、 $\frac{x-1}{x+3} = 0$  となるのは  $x-1=0$  かつ  $x+3 \neq 0$  のときです。したがって、この割り算の制限を書くときには、 $x \neq 1$  も加える必要があります。

### Exercise 5

割って簡約し、定義域の制限も書きなさい。

1.  $\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1}$
2.  $\frac{2x}{3x-12} \div \frac{x^2-2x}{x^2-6x+8}$

## 6 有理式の足し算と引き算

### 6.1 分母が同じ場合

2つの分数の分母が同じであれば、和はとても簡単です。単に分子を足せばよいのです。たとえば

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

有理式の加法も同様です。

分母が同じときの加法・減法

$a, b, c$  を代数式とする。もし  $c \neq 0$  なら

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \text{および} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

### Exercise 6

各式を簡約し、定義域の制限も書きなさい。

1.  $\frac{x}{4} + \frac{5-x}{4}$
2.  $\frac{7}{2x-3} - \frac{3x}{2x-3}$
3.  $\frac{x}{x^2-2x-3} - \frac{3}{x^2-2x-3}$

### 6.2 分母が異なる場合：LCM によるLCD

2つの分数の分母が一致していない場合、まずそれらを、同じ分母をもつ同値な分数に「わざと複雑に」書き換えます。たとえば

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$$

通常は、2つの最初の分母を掛け合わせれば、新しい共通分母が得られます。この例では  $3 \times 4 = 12$  です。しかし、いつもそれが必要なわけではありません。たとえば

$$\frac{7}{60} + \frac{19}{120},$$

を計算するのに、分母を  $60 \times 120$  にする必要はありません。むしろ、 $60 \times 2 = 120$  なので、最初の分数だけを分母120に直せばよいのです。

$$\frac{7}{60} + \frac{19}{120} = \frac{14}{120} + \frac{19}{120} = \frac{23}{120}.$$

このときの120は、60と120の最小公倍数です。つまり、それらの両方を因数にもつ最小の数です。

## 多項式の最小公倍式 (LCM)

2つ以上の多項式の最小公倍式とは、それらすべての倍数であるような、もっとも簡単な多項式のことである。

求め方：

1. 各多項式を完全に因数分解する。
2. 現れるすべての異なる因子を集める。
3. 各因子について、どの多項式でもっとも高いべきで現れるかを採用する。

言い換えると、多項式 $P_1(x)$ と $P_2(x)$ の最小公倍式とは、 $P_1(x)$ と $P_2(x)$ の両方を因子にもつ「最小の」多項式のことです。<sup>1</sup> 実際には、2つの多項式のLCMを決めるのに役立つ典型的な状況がいくつかあります。

### LCMを見つけるための便利なコツ

$P_1(x)$ と $P_2(x)$ を多項式とする。

1. もし $P_1(x)$ が $P_2(x)$ を割り切るなら、LCMは $P_2(x)$ である。
2. もし $P_2(x)$ が $P_1(x)$ を割り切るなら、LCMは $P_1(x)$ である。
3. もし $P_1(x) \neq P_2(x)$ で、しかも両方とも既約なら、LCMは積 $P_1(x)P_2(x)$ である。

実際、これらのコツは次のより一般的な公式から出てきます。

$$LCM(P_1, P_2) = \frac{P_1(x) \cdot P_2(x)}{GCD(P_1, P_2)},$$

ここでGCDはgreatest common divisor、すなわち両方を割り切る最大の多項式です。例を2つ見てみましょう。

1. まず、多項式 $x+1$ と $x^2-1$ を考えます。後者を因数分解すると $(x+1)(x-1)$ です。この形で見ると、 $x+1$ は明らかに $x^2-1$ の因子です。したがって、上の赤枠の規則(1)より、 $x+1$ と $x^2-1$ の最小公倍式は $x^2-1$ 自身です。
2. 次に、多項式 $x+1$ と $x^2+1$ を考えます。前回の講義で、 $x^2+1$ はそのグラフが $x$ 軸を横切らないので既約多項式であると見ました。 $x+1$ も明らかに既約です。したがって、赤枠の規則(3)を用いれば、 $x+1$ と $x^2+1$ の最小公倍式はその積 $(x+1)(x^2+1)$ になります。

### Exercise 7

次の式の最小公倍式を求めなさい。

1.  $6x, 2x^2, 9x^3$
2.  $x^2 - x, 2x - 2$
3.  $3x^2 + 6x, x^2 + 4x + 4$

先ほどの $\frac{7}{60} + \frac{19}{120}$ と同様に、有理式の加法も最小公倍式を使って行えます。

<sup>1</sup>別の言い方をすれば、 $P_1(x)$ と $P_2(x)$ はどちらもそのLCMで割り切れ、しかもLCMはその性質をもつもっとも簡単な多項式です。

## 分母が異なる有理式の加法・減法の戦略

分母が異なる有理式を足したり引いたりするには：

1. 分母を因数分解する。
2. 最小公分母（分母たちのLCM）を見つける。
3. 各分数を、その最小公分母をもつ形に書き換える。
4. 分子を足すか引くか、分母は最小公分母のままにする。
5. 必要なら簡約し、定義域の制限を書く。

例として、

$$\frac{7}{6x} + \frac{5}{8x}$$

を考えましょう。ここでは2つの分母が一致していないので、最小公倍数を使って同じ分母にもつ2つの分数に変換する必要があります。これには（少なくとも）2つの見方があります。

1. 両方の分母は同じべきの $x$ をもち、係数だけが違っています。したがって、まず6と8のLCMを見つけ、それに $x$ を付ければ、 $6x$ と $8x$ のLCMが得られます。調べると6と8のLCMは24です。<sup>2</sup>したがって、 $6x$ と $8x$ のLCMは $24x$ です。
2. あるいは公式 $\text{LCM} = \frac{\text{積}}{\text{GCD}}$ を使ってもよいです。この場合、 $6x$ と $8x$ の最大公約因子は $2x$ なので、

$$\frac{(6x)(8x)}{2x} = \frac{48x^2}{2x} = 24x$$

となります。

どちらの方法でも、LCDは $24x$ だとわかります。あとは各分数をその形に変換します。そのためには、それぞれの分数に対して分母を $24x$ にするための「足りない部分」を掛けます。分母が $6x$ の方には4、分母が $8x$ の方には3を掛ければよいので、

$$\frac{7}{6x} + \frac{5}{8x} = \frac{7(4)}{6x(4)} + \frac{5(3)}{8x(3)} = \frac{28}{24x} + \frac{15}{24x} = \frac{43}{24x}, \quad \text{ただし } x \neq 0.$$

### Exercise 8

足して簡約し、定義域の制限も書きなさい。

1.  $\frac{1}{2x} + \frac{3x}{4}$
2.  $\frac{x+2}{2} + \frac{7}{2x}$
3.  $\frac{x-2}{3} + \frac{5}{x}$

4.  $\frac{1}{6x^2} + \frac{3}{x}$
5.  $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$
6.  $\frac{2x+2}{x^2-3x-4} + \frac{3}{x-4}$

<sup>2</sup>より厳密に言えば、 $6 = 2 \times 3$ 、 $8 = 2 \times 2 \times 2$ なので、最小公倍数は $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ です。

## 練習問題の解答

### Exercise 1

1.  $x = 0$  のとき定義されない。
2.  $x + 2 = 0$ 、すなわち  $x = -2$  のとき定義されない。
3.  $4 - 2x^2 = 0$  のとき定義されない。解くと  $2x^2 = 4$ 、したがって  $x^2 = 2$ 、よって  $x = \pm\sqrt{2}$ 。

### Exercise 2

1.  $h(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$  は、分母が  $x^2 - 9 = 0$ 、すなわち  $(x-3)(x+3) = 0$  のとき 0 になる。定義域：  $x \neq 3$  かつ  $x \neq -3$  を満たすすべての実数。
2.  $k(x) = \frac{2x-5}{x^2+4x}$  は、分母が  $x^2 + 4x = 0$ 、すなわち  $x(x+4) = 0$  のとき 0 になる。定義域：  $x \neq 0$  かつ  $x \neq -4$  を満たすすべての実数。

### Exercise 3

1.
$$\frac{x^2-1}{3x-3} = \frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)} = \frac{x+1}{3}, \quad x \neq 1.$$
2.
$$\frac{2x^3-6x^2}{6x^2} = \frac{2x^2(x-3)}{6x^2} = \frac{x-3}{3}, \quad x \neq 0.$$
3.
$$\frac{9x^2-4}{3x-2} = \frac{(3x-2)(3x+2)}{3x-2} = 3x+2, \quad x \neq \frac{2}{3}.$$

### Exercise 4

1.
$$\frac{x^2-9}{x^2-4x} \cdot \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-4)} \cdot \frac{x}{x+3} = \frac{x-3}{x-4}.$$
定義域の制限は元の分母から来る：  $x \neq 0, x \neq 4, x \neq -3$ 。
2.
$$\frac{4x^3y}{3xy^4} \cdot \frac{-6x^2y^2}{10x^4} = \frac{-24x^5y^3}{30x^5y^4} = -\frac{4}{5y}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

### Exercise 5

1.
$$\frac{x}{x+3} \div \frac{4}{x-1} = \frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-1}{4} = \frac{x(x-1)}{4(x+3)}, \quad x \neq -3, x \neq 1.$$
2.
$$\frac{2x}{3x-12} \div \frac{x^2-2x}{x^2-6x+8} = \frac{2x}{3(x-4)} \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{x(x-2)} = \frac{2}{3}.$$

定義域の制限：  $x \neq 4$  ( $3x - 12$  から)、  $x \neq 2, 4$  ( $x^2 - 6x + 8$  から)、さらに割る式が 0 であってはいけないので  $x^2 - 2x \neq 0$ 、すなわち  $x \neq 0, 2$ 。まとめると  $x \neq 0, 2, 4$ 。

## Exercise 6

1.

$$\frac{x}{4} + \frac{5-x}{4} = \frac{x+5-x}{4} = \frac{5}{4}.$$

2.

$$\frac{7}{2x-3} - \frac{3x}{2x-3} = \frac{7-3x}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}.$$

3.  $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$  と因数分解して：

$$\frac{x}{x^2-2x-3} - \frac{3}{x^2-2x-3} = \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq 3, x \neq -1.$$

## Exercise 7

1.  $6x = 2 \cdot 3 \cdot x$ ,  $2x^2 = 2 \cdot x^2$ ,  $9x^3 = 3^2 \cdot x^3$ 。したがって LCM =  $2 \cdot 3^2 \cdot x^3 = 18x^3$ 。

2.  $x^2 - x = x(x-1)$ ,  $2x - 2 = 2(x-1)$ 。したがって LCM =  $2x(x-1)$ 。

3.  $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ ,  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ 。したがって LCM =  $3x(x+2)^2$ 。

## Exercise 8

1.

$$\frac{1}{2x} + \frac{3x}{4} = \frac{2}{4x} + \frac{3x^2}{4x} = \frac{3x^2+2}{4x}, \quad x \neq 0.$$

2.

$$\frac{x+2}{2} + \frac{7}{2x} = \frac{x(x+2)}{2x} + \frac{7}{2x} = \frac{x^2+2x+7}{2x}, \quad x \neq 0.$$

3.

$$\frac{x-2}{3} + \frac{5}{x} = \frac{x(x-2)}{3x} + \frac{15}{3x} = \frac{x^2-2x+15}{3x}, \quad x \neq 0.$$

4.

$$\frac{1}{6x^2} + \frac{3}{x} = \frac{1}{6x^2} + \frac{18x}{6x^2} = \frac{1+18x}{6x^2}, \quad x \neq 0.$$

5.  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$  と因数分解して：

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}, \quad x \neq 1, x \neq -1.$$

6.  $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$ ,  $2x+2 = 2(x+1)$  と因数分解して：

$$\frac{2x+2}{x^2-3x-4} + \frac{3}{x-4} = \frac{2(x+1)}{(x-4)(x+1)} + \frac{3}{x-4} = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x-4} = \frac{5}{x-4}.$$

定義域の制限は元の分母から来る： $x \neq 4$  および  $x \neq -1$ 。