MAT140 — 第12讲讲义

有理式续篇

上节课我们学习了**多项式分式**（也叫做**有理式**）。我们学会了如何通过因式分解来化简它们，以及如何通过因式分解与约分来进行乘法和除法。

在本讲中，我们将从两个方面进一步推进这些思想。首先，我们学习如何化简**复杂分式**，也就是由更小的分式构成的分式。其次，我们学习如何通过清除分母来解某些**有理方程**。最后，我们还会看到一些简短的应用例子，在这些例子中，简单的代数模型可以给出有用的预测（线性模型、二次模型以及反平方模型）。

今天我们将：

1. 复习有理式的化简、乘法、除法和加法。
2. 学习如何化简**复杂分式**。
3. 学习如何通过乘以最小公分母来解**有理方程**。
4. 练习在具体情境中的代数模型（存钱、温度转换、轨迹、反平方定律）。

1 复杂分式

涉及两个有理式相除的问题，有时会写成**复杂分式**的形式。

复杂分式

一个**复杂分式**是指分子或分母（或两者）本身也是分式的分式。

例如，如果$\frac{P_1}{P_2}$ 和$\frac{P_3}{P_4}$ 是多项式分式，那么由它们构成的一个复杂分式就可能是这样的形式：

$$\frac{\frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_3}{P_4}}.$$

从写法上看，复杂分式一开始并不总是容易展开和化简。最简单的方法也许是记住：分式本质上表示的是除法。我们可以加上括号，突出主要的除法运算，从而看清如何化简：

$$\frac{\frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_3}{P_4}} = \frac{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\left(\frac{P_3}{P_4}\right)} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right) \div \left(\frac{P_3}{P_4}\right) = \frac{P_1}{P_2} \times \frac{P_4}{P_3} = \frac{P_1 \cdot P_4}{P_2 \cdot P_3}.$$

下面把这个过程总结成步骤。

如何化简复杂分式

要化简一个复杂分式：

1. **把它写成**一个除法问题。
2. **翻转**分母中的分式（取倒数）。
3. **相乘**，把分子乘以这个倒数。
4. **化简**，通过因式分解并约去公因子。

为了看到这个过程的实际运作，我们先来看一个由普通有理数组成的复杂分式：

$$\frac{\frac{5}{14}}{\frac{25}{8}}.$$

$$\frac{\frac{5}{14}}{\frac{25}{8}} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{25}{8}\right)} = \frac{5}{14} \div \frac{25}{8} = \frac{5}{14} \cdot \frac{8}{25} = \frac{5 \cdot 8}{14 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4}{35}.$$

对于含有多项式的复杂分式，我们可以按完全相同的思路处理，只不过这次用的是多项式运算而不是整数运算。例如，考虑下面这个复杂分式：

$$\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}}.$$

这个式子可以这样化简：

$$\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x+2}{3} \div \frac{x-2}{x} = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x}{x-2} = \frac{x(x+2)}{3(x-2)}.$$

由于现在得到的是一个多项式有理式，因此有可能出现某些x 值使我们意外地除以零。所以，我们需要指出这些有问题的x 值并将它们排除。在这个例子中，有两个有问题的值：

- 如果$x = 0$，那么第二个分式$\frac{x-2}{x}$ 没有定义。
- 如果$x = 2$，那么第二个分式$\frac{x-2}{x}$ 会等于零，这就意味着原来的复杂分式会变成$\frac{x+2}{3} \div 0$，同样没有定义。

因此，限制条件是：$x \neq 0$ 且$x \neq 2$。

常见错误

- 不要在加法或减法跨项约分。你只能约去乘积中的**因子**。
- 化简时一定要先**因式分解**，再约去公因子。
- 不要忘记保留原始分母带来的**限制条件**。

练习1

化简每个复杂分式。写出关于x 的所有限制条件。

1. $\frac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{2}}$
2. $\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $\frac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{2}{x+1}}$

1.1 不太好读的复杂分式

有时，复杂分式会写成一种一开始很难看清和化简的形式。在这种情况下，最好的办法通常是先把它们改写成更整洁的形式，然后再处理除法。

例如，考虑复杂分式：

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{x}}.$$

要化简它，更容易的办法是先改写分母：

$$1-\frac{2}{x}=\frac{x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

同样，分子也可以改写成：

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}=\frac{x+2}{3}.$$

这样一来，原式就变成了一个更容易处理的形式：

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}}=\frac{x+2}{3}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{x(x+2)}{3(x-2)}.$$

至于限制条件，在这里x 不能等于零，因为那样分式$\frac{2}{0}$ 没有定义；同时x 也不能等于2，因为那会使整个分母变成$1-\frac{2}{2}=1-1=0$。

练习2

化简每个复杂分式。写出关于x 的所有限制条件。

1. $\dfrac{\frac{x+1}{4}}{1-\frac{1}{x}}$
2. $\dfrac{\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)}$

2 求解有理方程

有理方程是指分母中含有变量的方程。核心思想是：通过乘以最小公分母（LCD）来清除分母。

为了看一个例子，我们先从一个含分数的线性方程开始。考虑方程：

$$\frac{3}{5}=\frac{x}{2}+1.$$

当然，解这个方程的一种方法是先两边减去1，再把所有东西乘以2。不过，我们也可以直接把整个方程乘以10，因为10 是2 和5 的最小公倍数，这样就能一次性消掉所有分母。我们有：

$$10\left(\frac{3}{5}\right)=10\left(\frac{x}{2}+1\right)\quad\Rightarrow\quad 6=5x+10\quad\Rightarrow\quad -4=5x\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{4}{5}.$$

当然，我们可以代回原方程来检查这个答案是否正确：

$$\frac{x}{2}+1=\frac{-4/5}{2}+1=-\frac{2}{5}+1=\frac{3}{5},$$

因此$x=-\frac{4}{5}$ 的确是正确的。

当然，含有有理式的方程不一定像前面的例子那样简单。一般来说，可以按下面的步骤进行。

解有理方程

要解一个有理方程：

1. 写出所有**限制条件**（也就是使任何分母等于0 的值）。
2. 找到**最小公分母**（LCD）。
3. 将方程**两边**都乘以这个LCD。
4. 展开、化简，并解所得方程。
5. 在原方程中**检验**解（这样可以排除增根）。

再来看一个稍复杂一些的例子，考虑：

$$\frac{8}{3}=\frac{7}{x}-\frac{1}{3x}.$$

首先我们注意到，这个方程只有一个限制条件：$x\neq 0$。接下来，要清除分母，就要找出3、x 和$3x$ 的最小公分母。这里显然是$3x$。因此，把方程两边同时乘以$3x$，就能消去所有分母：

$$3x\left(\frac{8}{3}\right)=3x\left(\frac{7}{x}-\frac{1}{3x}\right)\quad\Rightarrow\quad 8x=21-1$$

于是得到$x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$。

练习3

解每个方程。写出限制条件，并检查你的解。

1. $\frac{2}{x}+\frac{1}{3}=1$
2. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$

3 多项式的应用

3.1 买一只狗

假设你想买一只新狗，它的价格是350000 日元。你现在已经存了150000 日元，并且每周可以再存20000 日元。那么攒够这笔钱需要多长时间?

对于这类问题，一个简单的模型是：

$$\text{存下的钱}=\text{初始存款}+\text{每周存款}\times\text{时间}.$$

这就是一个可以直接求解的线性方程：

$$350000 = 150000 + 20000t \quad \Rightarrow \quad 350 = 150 + 20t \quad \Rightarrow \quad 200 = 20t \quad \Rightarrow \quad t = 10.$$

因此，我们看到一共需要**10 周**。

练习4

你想买一辆价值480000 日元的汽车。你现在已经存了120000 日元，并且每周可以存30000 日元。需要多少周？

3.2 温度换算

温度换算

华氏温度F 与摄氏温度C 的关系为：

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

例如，假设我们想把52°F 换算成摄氏度。

$$52 = \frac{9}{5}C + 32 \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{9}{5}C \quad \Rightarrow \quad C = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9} \approx 11.1.$$

所以52°F 大约是11.1°C。

反过来，52 摄氏度则是：

$$F = \frac{9}{5} \cdot 52 + 32 = \frac{468}{5} + 32 = \frac{468}{5} + \frac{160}{5} = \frac{628}{5} = 125.6.$$

所以52°C 等于125.6°F。

练习5

1. 将68°F 换算成摄氏度。
2. 将20°C 换算成华氏度。

3.3 计算轨迹

抛体运动的一个常见模型是：

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

其中：

- $h(t)$ 表示时刻t 的高度，
- h_0 表示初始高度，
- v_0 表示初始竖直速度，
- g 表示重力加速度。

为了简化，我们取$h_0 = 1$ 且$g \approx 10$，从而得到：

$$h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2.$$

现在假设你是一位海盗，想把一颗炮弹朝空中发射。

练习6

设$v_0 = 40$ m/s。令

$$h(t) = 1 + 40t - 5t^2.$$

1. 3 秒后炮弹的高度是多少?
2. 炮弹在什么时刻位于高度61 m?
3. 现在假设我们不知道v_0。如果希望炮弹在3 秒后达到高度100 m，那么初速度应当是多少?

4 反平方定律

反平方定律

一个反平方模型具有如下形式：

$$y = \frac{a}{x^2},$$

其中a 是一个常数。

它的一个关键特征在于输出值随距离的缩放方式：

- 如果x 变成原来的两倍，那么x^2 会变成原来的4 倍，所以y 会变成原来的**四分之一**。
- 如果x 变成原来的三倍，那么x^2 会变成原来的9 倍，所以y 会变成原来的**九分之一**。

这本质上是一个关于三维几何的结论：如果我们取一个半径为x 的球，并在它表面画一个小正方形，那么当我们增大x 时，这个正方形对应的表面积会按与x^2 成正比的速率增长。把这种增长关系重新整理，就得到公式：

$$y = \frac{a}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{a}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a}{y}}.$$

这种模型出现在很多地方，例如：

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{（牛顿万有引力定律）}, \qquad F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{（库仑定律）}.$$

一般来说，大多数把点状波源向三维空间传播的物理情形，都遵循反平方定律。

4.1 篝火

一个简单的温度模型（类似辐射模型）是：

$$T(d) = 15 + \frac{k}{d^2},$$

其中d 是离火的距离，15 是基准温度，k 是常数。

练习7

假设在$d = 1$ m 时，温度为$55°$。

1. 求k。
2. 当$d = 2$ m 时温度是多少？当$d = 0.5$ m 时呢？
3. 如果我们希望温度为$45°$，那么应该坐在离火多远的地方？

练习答案

练习1

1. $\frac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{2}} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2x-2}$。限制条件：$x \neq 1$。
2. $\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(2x+1)(x+1)}{x(x-1)}$。限制条件：$x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$。
3. $\frac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{2}{x+1}} = \frac{x-1}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$。限制条件：$x \neq 1, x \neq -1$。

练习2

1. $\frac{\frac{x+1}{4}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{4(x-1)}$。限制条件：$x \neq 0, x \neq 1$。
2. 先改写分子与分母：
$$2x - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^3-3}{x^2}, \qquad x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}.$$
然后：
$$\frac{\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2x^3-3}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{2x^3-3}{x^2} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(2x^3-3)}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3-3}{x(x^2-1)} = \frac{2x^3-3}{x^3-x}.$$
限制条件：$x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$。

练习3

1. 限制条件：$x \neq 0$。
$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{乘以}3x:\ 6 + x = 3x \quad \Rightarrow \quad 6 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$
检验：$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$。正确。
2. 限制条件：$x \neq 2, x \neq -2$。
$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}.$$
LCD 是$2(x-2)(x+2)$。两边同乘：
$$2(x+2) + 2(x-2) = (x-2)(x+2) \quad \Rightarrow \quad 2x + 4 + 2x - 4 = x^2 - 4$$

$$4x = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 4 = 0.$$

解得:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

这两个值都满足限制条件，因此解为$x = 2 + 2\sqrt{2}$ 和$x = 2 - 2\sqrt{2}$。

练习4

$$480000 = 120000 + 30000t \quad \Rightarrow \quad 480 = 120 + 30t \quad \Rightarrow \quad 360 = 30t \quad \Rightarrow \quad t = 12.$$

需要**12 周**。

练习5

1. $68 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow 36 = \frac{9}{5}C \Rightarrow C = 36 \cdot \frac{5}{9} = 20$。因此68°F 是20°C。
2. $F = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$。因此20°C 是68°F。

练习6

1. $h(3) = 1 + 40(3) - 5(3^2) = 1 + 120 - 45 = 76$ m。
2. 令$h(t) = 61$:

   $$1 + 40t - 5t^2 = 61 \Rightarrow -5t^2 + 40t - 60 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-6) = 0.$$

   所以$t = 2$ s 或$t = 6$ s。
3. 我们希望在$h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2$ 中满足$h(3) = 100$:

   $$100 = 1 + 3v_0 - 5(9) = 1 + 3v_0 - 45 \Rightarrow 100 = 3v_0 - 44 \Rightarrow 3v_0 = 144 \Rightarrow v_0 = 48 \text{ m/s}.$$

练习7

已知$T(d) = 15 + \dfrac{k}{d^2}$ 且$T(1) = 55$。

1. $55 = 15 + \dfrac{k}{1^2} \Rightarrow k = 40$。
2. $T(2) = 15 + \dfrac{40}{2^2} = 15 + \dfrac{40}{4} = 15 + 10 = 25$。此外,

   $$T(0.5) = 15 + \frac{40}{(0.5)^2} = 15 + \frac{40}{0.25} = 15 + 160 = 175.$$

3. $45 = 15 + \dfrac{40}{d^2} \Rightarrow 30 = \dfrac{40}{d^2} \Rightarrow d^2 = \dfrac{4}{3}$。由于距离应为正数,

   $$d = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 \text{ m}.$$