MAT140 — 第12講ハンドアウト

有理式の続き

前回の講義では、**多項式の分数**（**有理式**とも呼ばれる）を扱いました。それらを因数分解によって簡約する方法や、因数分解と約分を使って掛け算・割り算をする方法を学びました。

この講義では、その考えを2つの方向に押し進めます。第一に、分数の中にさらに分数が入った**繁分数**を簡約する方法を学びます。第二に、分母を払うことによってある種の**有理方程式**を解く方法を学びます。最後に、単純な代数的モデルが役立つ予測を与えるいくつかの短い応用（一次モデル、二次モデル、逆二乗モデル）を見ます。

今日は次のことを扱います。

1. 有理式の簡約、掛け算、割り算、足し算の復習。
2. **繁分数**を簡約する方法。
3. **有理方程式**を、最小公分母を掛けることで解く方法。
4. 文脈の中での代数モデルの練習（貯金、温度変換、軌道、逆二乗則）。

1 繁分数

2つの有理式の割り算を含む問題は、**繁分数**として書かれることがあります。

> 繁分数
>
> **繁分数**とは、分子または分母（あるいはその両方）に分数を含む分数のことである。

たとえば、$\frac{P_1}{P_2}$ と $\frac{P_3}{P_4}$ が多項式の分数であるとき、それらから作られる繁分数は

$$\frac{\frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_3}{P_4}}$$

のような形になります。この形のままだと、繁分数をどうほどいて簡約すればよいのかが少しわかりにくいです。おそらくもっとも簡単な考え方は、「分数は割り算を表している」と思い出すことです。括弧を補って、どこで割っているのかをはっきりさせると、簡約の仕方が見えてきます。

$$\frac{\frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_3}{P_4}} = \frac{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\left(\frac{P_3}{P_4}\right)} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right) \div \left(\frac{P_3}{P_4}\right) = \frac{P_1}{P_2} \times \frac{P_4}{P_3} = \frac{P_1 \cdot P_4}{P_2 \cdot P_3}.$$

この手順をまとめると次のようになります。

繁分数を簡約する方法

繁分数を簡約するには：

1. **割り算の形に書き直す**。
2. 分母の分数を**ひっくり返す**（逆数をとる）。
3. 分子にその逆数を**掛ける**。
4. 因数分解と約分によって**簡約する**。

この手順が実際にどう働くかを見るために、まず有理数の繁分数を考えましょう：

$$\frac{\frac{5}{14}}{\frac{25}{8}}.$$

$$\frac{\frac{5}{14}}{\frac{25}{8}} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{25}{8}\right)} = \frac{5}{14} \div \frac{25}{8} = \frac{5}{14} \cdot \frac{8}{25} = \frac{5 \cdot 8}{14 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4}{35}.$$

多項式を含む繁分数も、まったく同じ型で簡約できます。今度は整数の代わりに多項式の計算を使うだけです。たとえば、次の繁分数を考えます。

$$\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}}.$$

これは次のように簡約できます。

$$\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x+2}{3} \div \frac{x-2}{x} = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x}{x-2} = \frac{x(x+2)}{3(x-2)}.$$

こうして得られた式は、多項式を含む有理式ですから、x にある値を入れると分母が0 になってしまう可能性があります。したがって、そのような問題のある値を明示して除外しなければなりません。この例では問題になる値は2つあります。

- $x = 0$ なら、2つ目の分数$\frac{x-2}{x}$ が定義されません。
- $x = 2$ なら、2つ目の分数$\frac{x-2}{x}$ が0 になってしまい、繁分数全体は$\frac{x+2}{3} \div 0$ となってやはり未定義です。

したがって、制限は$x \neq 0$ および$x \neq 2$ です。

よくある間違い

- 足し算や引き算をまたいで約分してはいけない。約分できるのは積の中の**因子**だけである。
- 常にまず**因数分解してから**共通因子を約分する。
- 元の分母から来る**制限**を忘れない。

Exercise 1

各繁分数を簡約し、x の制限も書きなさい。

1. $\dfrac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{2}}$
2. $\dfrac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $\dfrac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{2}{x+1}}$

1.1 扱いにくい繁分数

繁分数は、ときに最初の見た目では読み取りづらく、簡約しにくい形で書かれていることがあります。その場合、たいていはまず式を見やすい形に書き換えてから、そのあとで割り算を処理するのが最善です。

例として、次の繁分数を考えます。

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{x}}.$$

これを簡約するには、まず分母を書き換える方が簡単です。

$$1-\frac{2}{x}=\frac{x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

同様に、分子も

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}=\frac{x+2}{3}$$

と書き換えられます。すると、もとの式は扱いやすい形になります。

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x-2}{x}}=\frac{x+2}{3}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{x(x+2)}{3(x-2)}.$$

制限については、$x=0$ では$\frac{2}{0}$ が未定義になるのでだめですし、$x=2$ でも分母全体が$1-\frac{2}{2}=1-1=0$ になってしまうのでだめです。

Exercise 2

各繁分数を簡約し、x の制限も書きなさい。

1. $\dfrac{\frac{x+1}{4}}{1-\frac{1}{x}}$
2. $\dfrac{\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)}$

2 有理方程式を解く

有理方程式とは、分母に変数を含む分数が現れる方程式のことです。基本的な考え方は、最小公分母（LCD）を両辺に掛けて分母を払うことです。

例を見るために、まず分数を含む一次方程式から始めます。次の方程式を考えましょう。

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{2} + 1.$$

もちろん、この方程式を解く方法としては、両辺から1 を引いて、それから全体に2 を掛けるという方法もあります。しかし、2 と5 の最小公倍数である10 をすべてに掛けて、一度に分母を消すこともできます。

$$10\left(\frac{3}{5}\right) = 10\left(\frac{x}{2}+1\right) \quad \Rightarrow \quad 6 = 5x + 10 \quad \Rightarrow \quad -4 = 5x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{5}.$$

もちろん、これが正しいかどうかは元の式に代入して確かめられます。

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{-4/5}{2} + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = \frac{3}{5},$$

したがって$x = -\frac{4}{5}$ はたしかに正しいです。

もちろん、有理式を含む方程式は前の例ほど単純とは限りません。一般には、次のような手順になります。

有理方程式の解き方

有理方程式を解くには：

1. **制限**（どの分母も0 にしてしまう値）を書き出す。
2. **最小公分母**（LCD）を見つける。
3. 方程式の**両辺**にLCD を掛ける。
4. 分配し、簡約し、得られた方程式を解く。
5. 元の方程式で**解を確認する**（これにより余分な解を除ける）。

もう少し複雑な例として、

$$\frac{8}{3} = \frac{7}{x} - \frac{1}{3x}$$

を考えます。まずこの方程式には$x \neq 0$ という制限があることに注意します。分母を払うには、3, x, $3x$ の最小公分母を見つける必要がありますが、これは明らかに$3x$ です。そこで両辺に$3x$ を掛けます。

$$3x\left(\frac{8}{3}\right) = 3x\left(\frac{7}{x} - \frac{1}{3x}\right) \quad \Rightarrow \quad 8x = 21 - 1$$

ここから$x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ とわかります。

Exercise 3

各方程式を解きなさい。制限を書き、解の確認も行いなさい。

1. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3} = 1$
2. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$

3　多項式の応用

3.1　犬を買う

新しい犬を買いたいとします。値段は350000 円です。今150000 円持っていて、毎週20000 円ずつ貯められるとします。必要な金額を貯めるのにどれくらいかかるでしょうか。

このような問題では、簡単なモデルとして

$$\text{貯金額} = \text{最初の貯金} + \text{毎週の貯金額} \times \text{時間}$$

を使えます。これは一次方程式で、直接解けます。

$$350000 = 150000 + 20000t \quad \Rightarrow \quad 350 = 150 + 20t \quad \Rightarrow \quad 200 = 20t \quad \Rightarrow \quad t = 10.$$

したがって、**10週間**かかります。

Exercise 4

480000 円の車を買いたい。今120000 円貯金があり、毎週30000 円ずつ貯められる。何週間かかるか。

3.2　温度の変換

温度変換

華氏F と摂氏C の関係は

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

たとえば、52°F を摂氏に直したいとします。

$$52 = \frac{9}{5}C + 32 \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{9}{5}C \quad \Rightarrow \quad C = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9} \approx 11.1.$$

したがって、52°F はおよそ11.1°C です。

逆に、摂氏52 度は

$$F = \frac{9}{5} \cdot 52 + 32 = \frac{468}{5} + 32 = \frac{468}{5} + \frac{160}{5} = \frac{628}{5} = 125.6.$$

したがって、52°C は125.6°F です。

Exercise 5

1. 68°F を摂氏に変換しなさい。
2. 20°C を華氏に変換しなさい。

3.3 軌道の計算

放物運動のよくあるモデルは

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

です。ここで

- $h(t)$ は時刻t における高さ、
- h_0 は初期高さ、
- v_0 は初速度の鉛直成分、
- g は重力加速度

を表します。簡単のため、$h_0 = 1$, $g \approx 10$ として

$$h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2$$

を用います。さて、あなたが海賊で、大砲を空に向かって撃ちたいとしましょう。

Exercise 6

$v_0 = 40$ m/s とする。すなわち

$$h(t) = 1 + 40t - 5t^2.$$

1. 3秒後の高さは？
2. 大砲の弾が高さ61 m にあるのはいつか？
3. 今度はv_0 がわからないとする。3秒後に高さ100 m に達してほしいなら、初速度は何m/s であるべきか？

4 逆二乗則

逆二乗則

逆二乗モデルは

$$y = \frac{a}{x^2},$$

の形をしている。ただしa は定数である。

このモデルの重要な特徴は、距離によって出力がどう変わるかです。

- x が2倍になると、x^2 は4倍になるので、y は**4分の1**になる。
- x が3倍になると、x^2 は9倍になるので、y は**9分の1**になる。

これは本質的には3次元の幾何学に関する主張です。半径x の球面上に小さな正方形を描くと、その面積はx を大きくするとx^2 に比例して増えていきます。この増え方をひっくり返したものが

$$y = \frac{a}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{a}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a}{y}}$$

という式です。

このモデルはさまざまなところに現れます。たとえば

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{（ニュートンの万有引力の法則）}, \qquad F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{（クーロンの法則）}.$$

一般に、点状の波源が3次元空間へ広がるような物理現象の多くは、逆二乗則に従います。

4.1　たき火

放射を意識した単純な温度モデルとして

$$T(d) = 15 + \frac{k}{d^2},$$

を考えます。ここでd は火からの距離、15 は基準温度、k は定数です。

Exercise 7

$d = 1$ m のとき温度が55° だとする。

1. k を求めなさい。
2. $d = 2$ m での温度は？$d = 0.5$ m では？
3. 温度を45° にしたいとき、どれくらい離れて座ればよいか？

練習問題の解答

Exercise 1

1. $\frac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{2}} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2x-2}$。制限：$x \neq 1$。
2. $\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(2x+1)(x+1)}{x(x-1)}$。制限：$x \neq 0,\, x \neq 1,\, x \neq -1$。
3. $\frac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{2}{x+1}} = \frac{x-1}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$。制限：$x \neq 1,\, x \neq -1$。

Exercise 2

1. $\frac{\frac{x+1}{4}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{4}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{4(x-1)}$。制限：$x \neq 0,\, x \neq 1$。
2. 分子と分母を書き換える：

$$2x - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^3-3}{x^2}, \qquad x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}.$$

したがって

$$\frac{\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2x^3-3}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{2x^3-3}{x^2} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(2x^3-3)}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3-3}{x(x^2-1)} = \frac{2x^3-3}{x^3-x}.$$

制限：$x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$。

Exercise 3

1. 制限：$x \neq 0$。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{両辺に}3x\text{ を掛けると } 6 + x = 3x \quad \Rightarrow \quad 6 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

確認：$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$。よって正しい。

2. 制限：$x \neq 2$, $x \neq -2$。

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

LCD は$2(x-2)(x+2)$。両辺に掛けると

$$2(x+2) + 2(x-2) = (x-2)(x+2) \quad \Rightarrow \quad 2x + 4 + 2x - 4 = x^2 - 4$$

$$4x = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 4 = 0.$$

解くと

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

どちらも制限を満たすので、解は$x = 2 + 2\sqrt{2}$ と$x = 2 - 2\sqrt{2}$。

Exercise 4

$$480000 = 120000 + 30000t \quad \Rightarrow \quad 480 = 120 + 30t \quad \Rightarrow \quad 360 = 30t \quad \Rightarrow \quad t = 12.$$

したがって、**12週間**かかる。

Exercise 5

1. $68 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow 36 = \frac{9}{5}C \Rightarrow C = 36 \cdot \frac{5}{9} = 20$。したがって68°F は20°C。
2. $F = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$。したがって20°C は68°F。

Exercise 6

1. $h(3) = 1 + 40(3) - 5(3^2) = 1 + 120 - 45 = 76$ m。
2. $h(t) = 61$ とおく：

$$1 + 40t - 5t^2 = 61 \Rightarrow -5t^2 + 40t - 60 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-6) = 0.$$

よって$t = 2$ 秒または$t = 6$ 秒。

3. $h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2$ として$h(3) = 100$ になってほしい：

$$100 = 1 + 3v_0 - 5(9) = 1 + 3v_0 - 45 \Rightarrow 100 = 3v_0 - 44 \Rightarrow 3v_0 = 144 \Rightarrow v_0 = 48 \text{ m/s}.$$

Exercise 7

$T(d) = 15 + \dfrac{k}{d^2}$ で$T(1) = 55$。

1. $55 = 15 + \dfrac{k}{1^2} \Rightarrow k = 40$。
2. $T(2) = 15 + \dfrac{40}{2^2} = 15 + \dfrac{40}{4} = 15 + 10 = 25$。また

$$T(0.5) = 15 + \frac{40}{(0.5)^2} = 15 + \frac{40}{0.25} = 15 + 160 = 175.$$

3. $45 = 15 + \dfrac{40}{d^2} \Rightarrow 30 = \dfrac{40}{d^2} \Rightarrow d^2 = \dfrac{4}{3}$。距離は正なので

$$d = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 \text{ m}.$$