MAT140 — 第13讲讲义

联立方程

在课程前面，我们讨论了一次方程的代数性质，并研究了它们的图像性质。现在我们要把这个想法推广，去看这些方程的集合。这类一次方程的集合称为“线性方程组”，有时也叫“联立方程”。接下来的四讲我们都会围绕这个主题展开：我们将看到，从这些方程组出发，会逐渐出现一个关于结构、表示与应用的有趣新故事。之后，我们会定义并研究矩阵，这将自然地把我们带入线性代数的入门。现在，我们从最朴素的情形开始：两个未知数对应的两个一次方程。

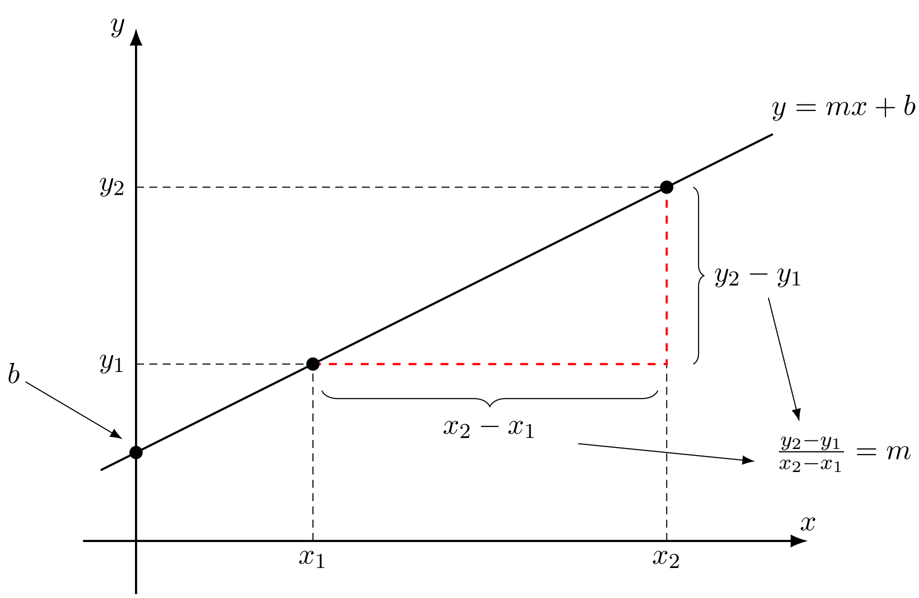
今天我们将：

1. 定义什么是**线性方程组**，以及什么是它的**解**。
2. 通过**作图**来解方程组，并把解解释为两条直线的交点。
3. 用**代入法**代数地求解方程组。
4. 用**消元法**代数地求解方程组。
5. 理解那些“奇怪的情形”：**无解**与**无穷多解**。

1 线性方程组及其解

1.1 线性方程组的定义

一条直线就是一条以固定速率变化的曲线。正如前面几讲中所见，这个“速率”叫做斜率，它告诉我们当x 坐标变化时，直线的y 坐标会如何变化。除此之外，我们还知道，所有非竖直直线都有唯一一个与y 轴相交的点，即所谓的y 轴截距。这两个数唯一决定了一条直线的几何形状：



得到的一次方程$y = mx + b$ 描述了坐标平面中的一条唯一的直线。不过，这并不是描述同一条直线的唯一方式。事实上，同一个几何对象往往可以有许多种不同描述。例如，下面这三个式子描述的就是同一条直线：

$$y = 2x + 1 \qquad 3y = 6x + 3 \qquad -2x + y = 1.$$

在后两个表示中，我们只是对等式两边做了平衡的算术运算，因此方程的解集保持不变。直线本身，只不过是这些方程中任意一个的全部解的集合，因此在这三种表示里它都是同一条线。

在接下来的讨论中，把线性方程写成第三种形式会非常方便。这种表示称为标准形式。

标准形式的线性方程

一个标准形式的一次方程是

$$ay + bx = c,$$

其中a, b, c 是实数，x, y 是变量，并且排除a 和b 同时为零的情形。

任何一个标准形式的线性方程都可以通过基本代数变形写成斜截式：

$$ax + by = c \;\Rightarrow\; by = -ax + c \;\Rightarrow\; y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

因此这里直线的斜率是$-\frac{a}{b}$，y 截距是$\frac{c}{b}$。我们将利用这些方程来定义线性方程组。

线性方程组

一个**线性方程组**是由两个或更多个、含有同样变量的一次方程组成的集合。最简单的情形是两个变量、两个方程：

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

其中a, b, c, d, e, f 是数字，x, y 是变量。

本讲中我们只关注两个方程、两个变量的情形，更一般的理论留到下一讲再讲。

1.2 方程组的解

在“数学像语言”的比喻中，一个方程是在断言两个代数表达式之间的关系，也就是在说“这个等于那个”。一个方程的解，就是那些代入之后能使这个断言成立的变量取值。从这个角度看，一个两元一次方程组就像逻辑中的“并且”连接词，也就是在说“这个等于那个并且那个也等于另一个”。这样的“并且”命题成立的唯一方式，就是两个方程同时成立。这就引出了线性方程组解的定义。

方程组的解

一个关于x 和y 的方程组的**解**，是一个有序对(x, y)，它能使方程组中的**所有**方程都**同时**成立。

例如，考虑下面这个线性方程组：

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - 5y = -2. \end{cases}$$

现在我们来检查点$(3, 3)$ 和$(4, 2)$ 是否是它的解。

- $(3,3)$：把$x=3$ 和$y=3$ 代入两个方程。对第一个方程有

  $$(3)+(3)=6 \ \Rightarrow 6=6, \qquad \text{因此}(3,3)\ \text{是}x+y=6\ \text{的解。}$$

  但是当我们把$(3,3)$ 代入第二个方程时，得到

  $$2(3)-5(3)=-2 \ \Rightarrow 6-15\neq -2, \qquad \text{因此}(3,3)\ \text{不是}x+y=6\ \text{的解。}$$

  因为点$(3,3)$ 不是第二个方程的解，所以它也不是整个方程组的解。
- $(4,2)$：把$x=4$ 和$y=2$ 代入两个方程。我们看到

  $$(4)+(2)=6 \ \Rightarrow 6=6, \qquad \text{因此}(4,2)\ \text{是}x+y=6\ \text{的解，}$$

  并且：

  $$2(4)-5(2)=-2 \ \Rightarrow 8-10=-2, \qquad \text{因此}(3,3)\ \text{是}x+y=6\ \text{的解。}$$

  因为有序对$(4,2)$ 同时是这两个方程的解，所以它也是整个方程组的解。

常见错误

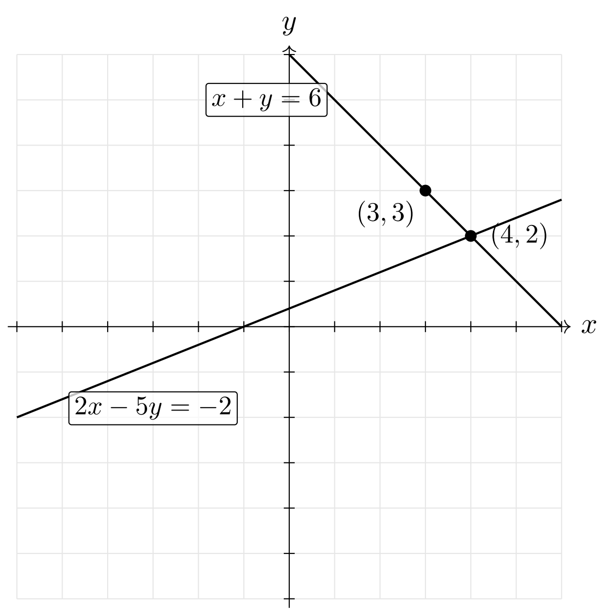
一个方程组的解必须同时是每一个方程的解。正如前面的例子所表明的，仅仅验证一个候选值满足其中一个方程是不够的。

2 通过作图解方程组

一个关于x 和y 的一次方程描述的是一条直线。因此，当我们有一个关于x 和y 的两个一次方程组成的方程组时，我们实际上是在同时描述**两条直线**。再考虑之前的方程组：

$$\begin{cases} x+y=6, \\ 2x-5y=-2. \end{cases}$$

我们可以把方程$x+y=6$ 和$2x-5y=-2$ 画在同一组坐标轴上：



注意图中标出的两个点就是之前的$(3,3)$ 和$(4,2)$。在$(3,3)$ 的情形下，这个点落在第一条直线上，因为它是方程$x+y=6$ 的解；但它不落在第二条直线上，因为它不是方程$2x-5y=-2$ 的解。另一方面，点$(4,2)$ 是整个方程组的解，因此它同时落在两条直线上。这其实是线性方程组解的一般特征。

解的图像意义

一个点(x,y) 是方程组

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f \end{cases}$$

的解，当且仅当(x,y) 同时落在**两条**直线上。因此，方程组的解正是两条图像的**交点**。

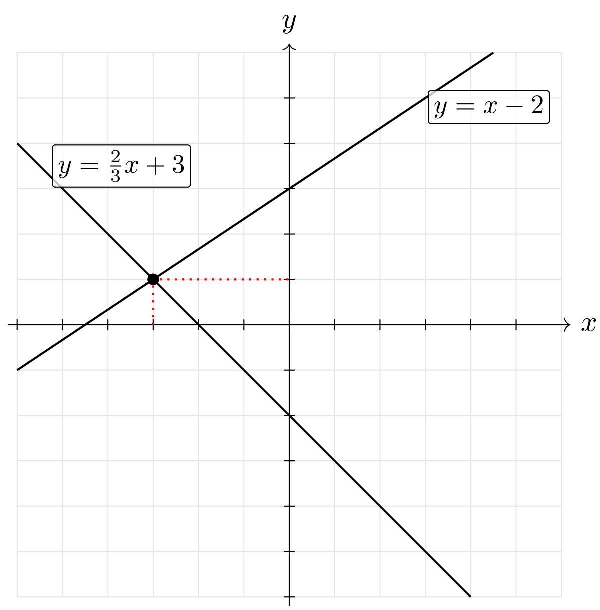
再看另一个例子，考虑方程组：

$$\begin{cases} \quad x+y=-2, \\ 2x-3y=-9. \end{cases}$$

如果想通过作图来解它，最方便的办法是先把两个方程都写成斜截式。由$x+y=-2$ 得到$y=-x-2$，而由$2x-3y=-9$ 得到

$$-3y=-2x-9 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+3.$$

下面的图展示了这两条直线。



可以看到，这两条直线交于点$(-3,1)$，这就是该线性方程组的解。我们可以通过代入验证这一点：

$$(-3)+(1)=-2 \qquad 并且 \qquad 2(-3)-3(1)=-9.$$

2.1 三种可能结果

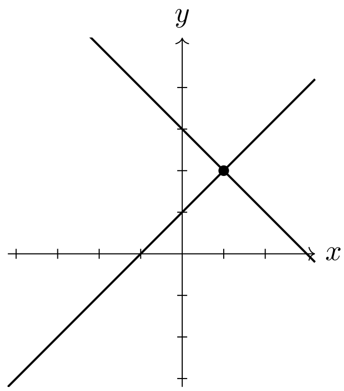
根据上面的讨论，如果我们能画出线性方程组对应的两条直线，那么常常只需要观察它们的交点就能确定方程组的解。不过，直线并不总是在唯一一个点相交，因此某些方程组可能并没有唯一解。事实上，两条直线之间只有三种可能的相互位置关系。

相容与不相容方程组

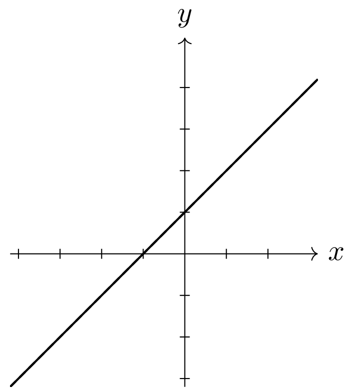
考虑一个二元一次方程组。

1. **一个解（相容）**：两条直线相交一次（斜率不同）。
2. **无解（不相容）**：两条直线平行（斜率相同但截距不同）。
3. **无穷多解（相关）**：两条直线其实是同一条直线（两个方程等价）。

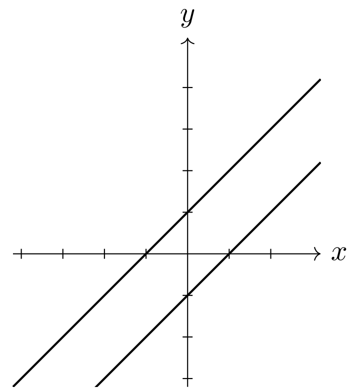
下面这三幅图展示了这三种情况。



一个解



无穷多解



无解

在第一种情形中，两条直线只有一个交点；在第二种情形中，两条直线处处重合，因此对应的方程组有无穷多个解；在第三种情形中，两条直线互相平行，因此永远不会相交，也就是说对应的方程组没有解。

练习2

用作图（或斜率直觉）判断每个方程组有多少个解。

1. $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2y = 3x + 2 \\ 4y = 6x + 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3 用代入法解方程组

虽然从几何上看很美，但用作图来解线性方程组并不总是最好的方法。最简单的原因是，现实中方程组的解可能并不是一个“漂亮”的整数点，因此图像并不能准确告诉我们它的具体坐标。用代数

方法会更好，因为无论图像长什么样，我们都能得到精确的解。

代入法就是一种这样的方法。它也许是最直观的代数解法。

代入法

用**代入法**解方程组时：

1. 先把其中一个方程解出某个变量（例如解出y）。
2. 把这个表达式代入另一个方程，得到一个只含一个变量的方程。
3. 解这个一元方程。
4. 再把这个答案代回原来的某个方程，求出另一个变量。
5. 最后在原方程组中检查答案。

这个分步过程一开始可能有点陌生，但只要看一个例子就会变得非常清楚。考虑方程组：

$$\begin{cases} -x+y=1, \\ 2x+y=-2. \end{cases}$$

代入法的第一步目标，是把其中一个方程改写成能直接代入另一个方程的形式。这样，我们就能把原本含有两个变量的方程组，化成只含一个变量的单个方程。由第一个方程我们可以整理得到

$$-x+y=1 \quad \Rightarrow \quad y=x+1.$$

现在我们已经把y 完全写成了x 的表达式，于是就可以把它代入第二个方程：

$$2x+y=-2 \quad \Rightarrow \quad 2x+(x+1)=-2 \quad \Rightarrow \quad 3x+1=-2 \quad \Rightarrow \quad 3x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-1.$$

这给出了最终答案的一半。为了求出y 的值，我们把$x=-1$ 代回某个方程中求解y。最简单的是代回第一步得到的$y=x+1$：

$$y=-1+1=0.$$

因此，解是$(x,y)=(-1,0)$。

3.1 一个带分数的例子

考虑方程组：

$$\begin{cases} 5x+3y=18, \\ 2x-7y=-1. \end{cases}$$

我们将用代入法来解它。先把第一个方程整理成关于x 的表达式：

$$5x+3y=18 \quad \Rightarrow \quad 5x=-3y+18 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{5}y+\frac{18}{5}.$$

现在把这个看起来不太友好的x 表达式代入第二个方程：

$$2x-7y=-1 \quad \Rightarrow \quad 2\left(-\frac{3}{5}y+\frac{18}{5}\right)-7y=-1.$$

然后解这个方程求y。先化简：

$$-\frac{6}{5}y+\frac{36}{5}-7y=-1.$$

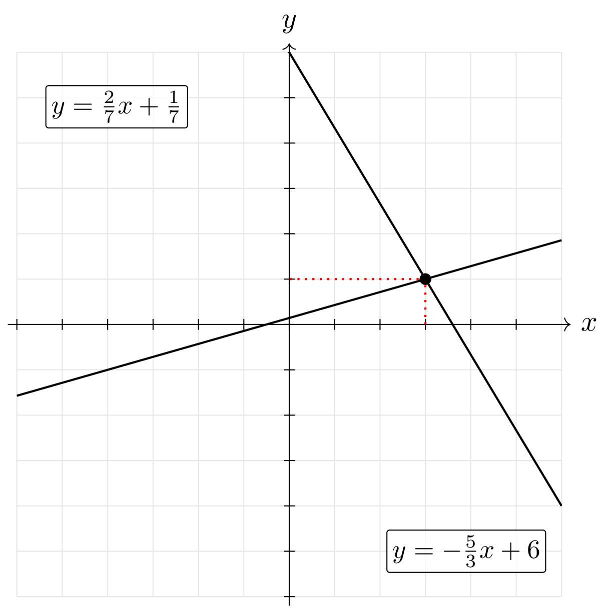
接着把方程两边同乘5，再整理：

$$-6y+36-35y=-5 \quad\Rightarrow\quad 36-41y=-5 \quad\Rightarrow\quad -41y=-41 \quad\Rightarrow\quad y=1.$$

这给出了最终答案的一半。为了求出x，把$y=1$ 代回整理后的式子$x=-\frac{3}{5}y+\frac{18}{5}$：

$$x=-\frac{3}{5}(1)+\frac{18}{5}=\frac{15}{5}=3.$$

因此解为$(3,1)$。这也可以通过作图来确认：



3.2 代入法中的相关与不相容方程组

有时，代入法最后会得到一个令人意外的结论。例如，如果我们尝试用代入法解方程组

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ -2x+6y=2 \end{cases}$$

那么由$x=3y+2$ 可得

$$-2(3y+2)+6y=2 \quad\Rightarrow\quad -6y+4+6y=2 \quad\Rightarrow\quad 4=2.$$

这意味着无论y 取什么值，最后都会得到一个矛盾。因此，这个方程组没有解，也就是说它是不相容的。

再看另一个例子，考虑方程组

$$\begin{cases} 9x+3y=15 \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

在这种情况下，如果使用代入法，第一个方程给出$y=-3x+5$，于是代入得到：

$$9x+3(-3x+5)=15 \quad\Rightarrow\quad 9x-9x+15=15 \quad\Rightarrow 15=15.$$

这个等式无论x 取什么值都成立。因此，这个方程组不只是有一个解，而是有无穷多个解，对应于不同的x 取值。换句话说，这是一个相关方程组。

如何理解最后得到的等式

在代入并化简之后：

1. 如果得到一个假命题（例如$-4 = 2$），那么这个方程组是**不相容**的，因此**无解**。
2. 如果得到一个真命题（例如$15 = 15$），那么这个方程组是**相关**的，因此有**无穷多解**（两条方程描述的是同一条直线）。

练习3

用代入法解每个方程组。

1. $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

4　用消元法解方程组

现在我们来看解二元一次方程组的最后一种方法：消元法。和代入法一样，这也是一种可以得到精确答案的代数过程。不过，它是一种不同的技巧，而且在下一讲处理更复杂的方程组时会非常有用。它的基本步骤可以总结如下。

消元法

用**消元法**解方程组时：

1. 通过把一个或两个方程乘以适当常数，使x（或y）的系数变成相反数。
2. 将两个方程相加，消去一个变量，得到一个一元方程并解出它。
3. 再把这个结果代回原来的某个方程，求出另一个变量。
4. 在原方程组中检查你的解。

换句话说，消元法的目标是把两个方程调整成某一个变量的系数大小相同、符号相反。这样一来，把两个方程相加时，这个变量就会被“消去”，从而留下一个只含一个变量的方程，便于求解。

4.1　两个例子

作为一个简单例子，考虑方程组：

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 2x - 3y = 5. \end{cases}$$

注意，这两个方程中的y 项系数刚好大小相同、符号相反（3 和-3）。因此，我们可以直接把两个方程相加来消去y：

$$(4x + 3y) + (2x - 3y) = 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

现在把这个x 的值代回第一个方程求y:

$$4(1)+3y=1 \quad \Rightarrow \quad 3y=-3 \quad \Rightarrow \quad y=-1.$$

因此解是$(1,-1)$。

注意，在这个例子中，一开始就已经有一个变量的系数相同且符号相反，所以直接相加就能消元。然而一般情况下，变量的系数并不会一开始就这么整齐。因此，消元法的一个关键步骤就是先通过代数变形，把方程调整成某个变量的系数可以相互抵消。

为了看一个这样的例子，考虑方程组:

$$\begin{cases} 2x-3y=-7, \\ \ \ 3x+y=-5. \end{cases}$$

这里，无论是x 还是y，它们的系数一开始都不能直接消掉。但我们可以通过变形做到这一点。由于比较方便，我们选择处理y 的系数，目前它们是-3 和1。如果把第二个方程两边同时乘以3，那么方程$3x+y=-5$ 所描述的直线几何上不会改变。这样就得到一个新的方程组，其中y 的系数已经匹配了:

$$\begin{cases} 2x-3y=-7, \\ \ \ 3x+y=-5. \end{cases}$$

接下来，就可以像前面一样，把这两个方程相加来消去y:

$$(2x-3y)+(9x+3y)=-7+(-15) \quad \Rightarrow \quad 11x=-22 \quad \Rightarrow \quad x=-2.$$

然后把这个x 值代回原来的一个方程求y。代入$3x+y=-5$，得到:

$$3(-2)+y=-5 \quad \Rightarrow \quad -6+y=-5 \quad \Rightarrow \quad y=1.$$

因此解为$(-2,1)$。

4.2 消元法中的不相容与相关方程组

和代入法一样，消元法也可能得到一些意外的结果。现在我们用消元法来解第3.2 节中的那两个方程组。

先看方程组

$$\begin{cases} \quad x-3y=2, \\ -2x+6y=2. \end{cases}$$

如果把第一个方程乘以2，就得到新方程组:

$$\begin{cases} \ \ 2x-6y=4, \\ -2x+6y=2. \end{cases}$$

现在把这两个方程相加来消去x，得到:

$$-6y+6y=4+2 \quad \Rightarrow \quad 0=6.$$

在试图消去x 的过程中，我们也顺便把y 消掉了，于是得到假命题$0 = 6$。这和第3.2 节中的结论完全一致，也就是这个方程组没有解。

再看方程组

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ \ \ 3x + y = 5 \end{cases}$$

在这个例子中，把第二个方程乘以3，就能让x 的系数匹配。于是得到：

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 9x + 3y = 15 \end{cases}$$

现在，如果用"第一行减第二行"的方式消去x，由于这两行其实完全相同，所以左右两边所有项都会相互抵消，最后得到恒等式$0 = 0$。显然，$0 = 0$ 无论如何都成立，因此这个方程组是相关的，也就是说它有无穷多个解。

这两种现象可以总结如下。

0

在消元之后：

1. 如果得到$0 = k$ 且$k \neq 0$（例如$0 = 11$），那么这个方程组是**不相容**的，因此**无解**（对应平行直线）。
2. 如果得到$0 = 0$，那么这个方程组是**相关**的，因此有**无穷多解**（对应同一条直线）。

这里还有一个几何叙述，与第3.2 节的结论一致。两个看起来不同的方程也可能描述**同一条**直线。这恰好发生在把它们都写成标准形式之后，其中一个方程是另一个的非零常数倍。

同一条直线意味着成比例

如果两个一次方程描述的是同一条直线，那么（把它们都写成标准形式后）其中一个方程必定是另一个的非零常数倍。例如：

$$2y = 3x + 2 \quad 和 \quad 4y = 6x + 4$$

描述的是同一条直线，因为第二个方程正好是第一个的2 倍。

平行直线有相同的斜率但不同的截距。例如，$y = mx + b_1$ 和$y = mx + b_2$，若$b_1 \neq b_2$，那么这两条直线平行且永不相交。

练习4

用消元法解每个方程组，或者判断它没有唯一解。

1. $\begin{cases} 2b + a = 15 \\ 3b - a = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - 6y = -5 \\ -4x + 12y = 10 \end{cases}$

练习答案

练习1

1. $(3,3)$：方程1 给出$3+3=6$（真）。方程2 给出$2(3)-5(3)=6-15=-9\neq-2$（假）。所以$(3,3)$ 不是解。
2. $(4,2)$：方程1 给出$4+2=6$（真）。方程2 给出$2(4)-5(2)=8-10=-2$（真）。所以$(4,2)$是解。
3. $(1,5)$：方程1 给出$1+5=6$（真）。方程2 给出$2(1)-5(5)=2-25=-23\neq-2$（假）。所以$(1,5)$ 不是解。

练习2

1. 一个解（两条直线相交一次），交点在$(-3,1)$。
2. 无解（平行直线：斜率同为2，但截距不同）。
3. 无穷多解（同一条直线：第二个方程是第一个的2 倍）。
4. 无解（不相容：将$x-3y=2$ 乘以-2 得$-2x+6y=-4$，这与$-2x+6y=2$ 矛盾）。

练习3

1. 由$-x+y=1$ 得$y=x+1$。代入$2x+y=-2$：$2x+(x+1)=-2\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1$，然后$y=0$。所以解是$(-1,0)$。
2. 由前面的例子可知，解是$(3,1)$。
3. 由$x-3y=2$ 得$x=3y+2$。代入$-2x+6y=2$：$-2(3y+2)+6y=2\Rightarrow -6y-4+6y=2\Rightarrow -4=2$（假）。无解。
4. 第二个方程乘以3 就是第一个方程，所以两条直线重合。无穷多解：所有满足$3x+y=5$的(x,y)。

练习4

1. 相加得：$(2b+a)+(3b-a)=15+5\Rightarrow 5b=20\Rightarrow b=4$，然后$a=15-2(4)=7$。
2. 相加得：$(4x+3y)+(2x-3y)=1+5\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1$，然后$4(1)+3y=1\Rightarrow y=-1$。所以解为$(1,-1)$。
3. 将第二个方程乘以3：$9x+3y=-15$。与$2x-3y=-7$ 相加得：$11x=-22\Rightarrow x=-2$，然后$3(-2)+y=-5\Rightarrow y=1$。所以解为$(-2,1)$。

4. 将$2x-6y=5$ 乘以3 得$6x-18y=15$。将$3x-9y=2$ 乘以-2 得$-6x+18y=-4$。相加得：$0=11$（假）。无解。
5. 将$2x-6y=-5$ 乘以2 得$4x-12y=-10$。再与$-4x+12y=10$ 相加得$0=0$（真）。无穷多解，也就是所有落在直线$2x-6y=-5$ 上的(x,y)。