MAT140 — 第13講ハンドアウト
連立方程式

このコースの前半では、一次方程式の代数的性質を議論し、そのグラフの性質も調べました。ここからは、その考えを拡張して、複数の一次方程式をまとめて考えます。こうした一次方程式の集まりは「連立一次方程式」あるいは「同時方程式」と呼ばれます。今後4回の講義では、この話題を扱います。こうした方程式の集まりから出発すると、構造・表現・応用に関する新しい魅力的な物語が立ち現れてきます。その後、行列を定義して調べることになり、そこから自然に線形代数への導入へと進みます。まずはその出発点として、未知数が2つの一次方程式2本という素朴な場合から始めましょう。

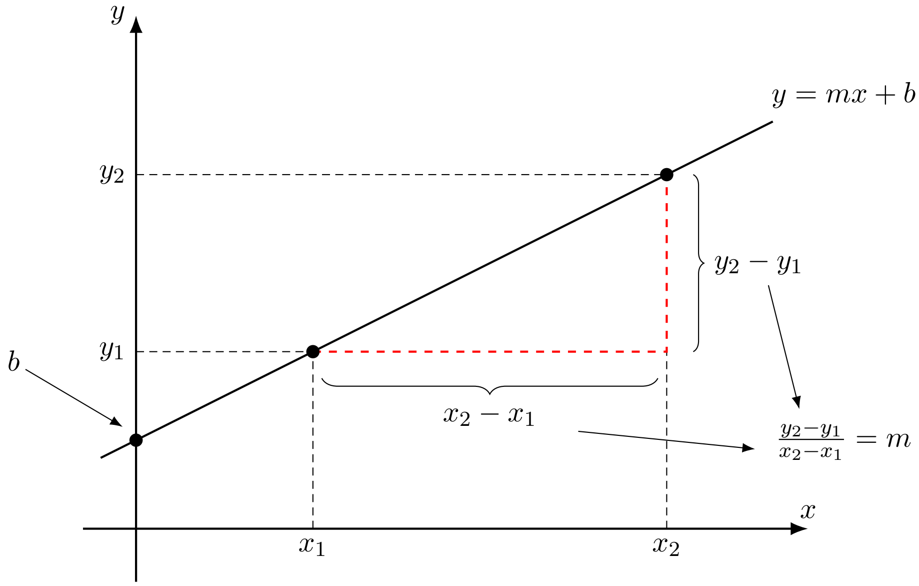
今日は次のことを扱います。

1. **連立一次方程式**とは何か、そして**解**とは何を意味するのかを定義する。
2. グラフを使って連立方程式を解き、解を直線の交点として解釈する。
3. **代入法**を使って代数的に解く。
4. **消去法**を使って代数的に解く。
5. 「変わった場合」、すなわち**解なし**と**無数に解がある**場合を理解する。

1 連立一次方程式とその解

1.1 連立一次方程式の定義

直線とは、一定の割合で変化する曲線のことです。前の講義で見たように、この「割合」は傾きと呼ばれ、x 座標の変化に応じてy 座標がどれだけ増えるかを表します。また、垂直でないすべての直線はy 軸とただ1回交わります。その点がいわゆるy 切片です。この2つの数が、直線の幾何を一意に決定します。



このようにして得られる一次方程式$y = mx + b$ は、座標平面内の1本の直線を表します。しか

し、これはその直線の唯一の表し方ではありません。実際、同じ幾何学的対象を表す式は何通りもあります。たとえば、次の3つは同じ直線を表しています。

$$y = 2x + 1 \qquad 3y = 6x + 3 \qquad -2x + y = 1.$$

後ろの2つの式は、両辺に同じ算術操作を施しているだけなので、方程式の解の集合は保たれます。したがって、どの式も同じ直線、すなわちその方程式の解全体の集合を表しています。

以下では、一次方程式を3つ目の形に書けると非常に便利です。この表し方を標準形と呼びます。

標準形の一次方程式

標準形の一次方程式とは

$$ay + bx = c,$$

の形の方程式である。ただしa, b, c は実数、x, y は変数であり、a とb が同時に0 である場合は除く。

標準形の一次方程式は、基本的な代数操作によって傾き切片形に書き直せます：

$$ax + by = c \;\Rightarrow\; by = -ax + c \;\Rightarrow\; y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

したがって、このとき直線の傾きは$-\frac{a}{b}$、y 切片は$\frac{c}{b}$ です。私たちはこの形を使って連立一次方程式を定義します。

連立一次方程式

連立一次方程式とは、同じ変数を含む2本以上の一次方程式の集まりである。もっとも単純な場合として、2変数の2本の方程式を考えると、

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

となる。ただしa, b, c, d, e, f は数、x, y は変数である。

この講義では、2変数2本の連立方程式だけに集中します。より一般の場合は次回の講義に譲ります。

1.2 連立方程式の解

私たちの言語の比喩で言えば、方程式とは2つの代数式を結びつけて「これはこれである」と主張しているものです。方程式の解とは、変数に代入したときその主張が真になる値のことです。この意味で、2本の一次方程式からなる連立方程式は、一種の「かつ（and）」の接続詞のように振る舞います。つまり「これがこれであり、しかもこれがこれである」と言っているのです。このような「and」の文が真になるには、両方の方程式が同時に真でなければなりません。これが連立一次方程式の解の定義につながります。

連立方程式の解

x とy に関する連立方程式の**解**とは、**すべての**方程式を**同時に**満たす順序対(x, y) のことである。

例として、次の連立一次方程式を考えます。

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - 5y = -2. \end{cases}$$

点$(3, 3)$ と$(4, 2)$ が解かどうかを調べてみましょう。

- $(3, 3)$：$x = 3$, $y = 3$ を両方の式に代入します。1本目の式については

  $$(3) + (3) = 6 \ \Rightarrow 6 = 6, \qquad \text{したがって}(3,3)\ \text{は}x + y = 6\ \text{の解である。}$$

  しかし、2本目に代入すると

  $$2(3) - 5(3) = -2 \ \Rightarrow 6 - 15 \neq -2, \qquad \text{したがって}(3,3)\ \text{は}2x - 5y = -2\ \text{の解ではない。}$$

  $(3, 3)$ は2本目の解ではないので、連立方程式全体の解でもありません。
- $(4, 2)$：$x = 4$, $y = 2$ を両方に代入します。すると

  $$(4) + (2) = 6 \ \Rightarrow 6 = 6, \qquad \text{したがって}(4,2)\ \text{は}x + y = 6\ \text{の解である。}$$

  さらに

  $$2(4) - 5(2) = -2 \ \Rightarrow 8 - 10 = -2, \qquad \text{したがって}(4,2)\ \text{は}2x - 5y = -2\ \text{の解でもある。}$$

  したがって、$(4, 2)$ は両方の式を同時に満たすので、この連立方程式の解です。

よくある間違い

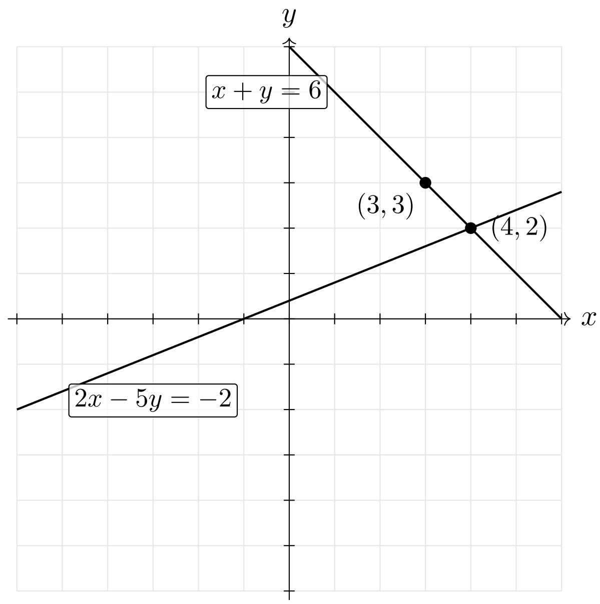
連立方程式の解は、すべての方程式を同時に満たさなければならない。先ほどの例が示すように、1本だけを満たしていても十分ではない。

2　グラフによる解法

x とy に関する一次方程式は直線を表します。したがって、2本の一次方程式からなる連立方程式があるとき、私たちは**2本の直線**を同時に見ていることになります。再び次の連立方程式を考えましょう：

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - 5y = -2. \end{cases}$$

この2本、$x + y = 6$ と$2x - 5y = -2$ を同じ座標軸に描くと次のようになります。



図の2つの点$(3,3)$ と$(4,2)$ は、先ほど調べた点です。$(3,3)$ は$x+y=6$ の解だったので1本目の直線上にはありますが、$2x-5y=-2$ の解ではなかったので2本目の直線上にはありません。一方で、連立方程式の解であった$(4,2)$ は、2本の直線の両方に同時にのっています。これは連立一次方程式の解に関する一般的な性質です。

解のグラフ的意味

点(x,y) が

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f \end{cases}$$

を解くのは、(x,y) が**両方の直線上にある**とき、そしてそのときに限る。したがって、解はちょうど2つのグラフの交点である。

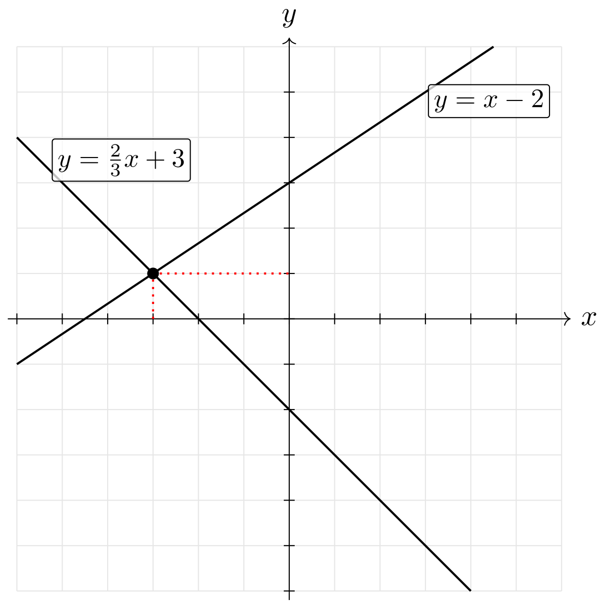
別の例として、

$$\begin{cases} \quad x+y=-2, \\ 2x-3y=-9. \end{cases}$$

を考えます。これをグラフで解くには、まず傾き切片形に直すのが簡単です。$x+y=-2$ から$y=-x-2$、また$2x-3y=-9$ から

$$-3y=-2x-9 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+3.$$

次の図が2つのグラフを表しています。



図を見ると、2本の直線は点$(-3, 1)$ で交わっています。これがこの連立方程式の解です。実際に代入しても、

$$(-3) + (1) = -2 \qquad \text{および} \qquad 2(-3) - 3(1) = -9.$$

となり、両方とも成り立っています。

2.1 起こりうる3つの場合

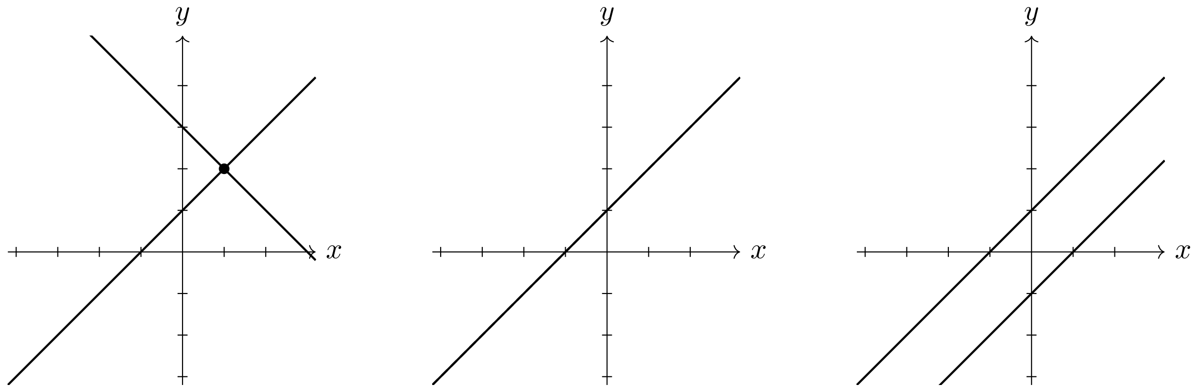
以上から、連立一次方程式で表される2本の直線が描ければ、その交点を見ることで解を求められることが多いとわかります。しかし、2本の直線が必ずただ1点で交わるとは限りません。したがって、連立方程式が必ず一意な解をもつわけではありません。実際、2本の直線の関係には3通りあります。

整合・不整合な連立方程式

2変数2本の連立一次方程式について、次の3つのうちいずれかが起こる。

1. **解が1つ（整合的）**: 直線が1回だけ交わる（傾きが異なる）。
2. **解なし（不整合）**: 直線が平行である（傾きが同じで切片が異なる）。
3. **無数に解がある（従属）**: 2本が同じ直線である（方程式が同値）。

この3つの状況を図にすると次のようになります。



解が1つ **無数に解がある** **解なし**

最初の場合、2本の直線は1点で交わります。2番目の場合、2本の直線はあらゆる点で一致しているので、対応する連立方程式には無数の解があります。3番目の場合、直線は平行で交わらないため、対応する連立方程式には解がありません。

Exercise 2

グラフ、または傾きについての直感を使って、各連立方程式が何個の解をもつかを判断しなさい。

1. $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2y = 3x + 2 \\ 4y = 6x + 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3　代入法による解法

グラフによる方法は幾何学的に美しいのですが、連立一次方程式を解くにはいつも最善とは限りません。もっとも単純な理由は、実際には解がきれいな整数の組とは限らず、その場合グラフから正確な値を読み取れないかもしれないということです。そういうときには、グラフではなく代数を使って、どんな形の解であっても正確に求められる方が望ましいのです。

代入法は、そのような代数的方法の1つです。おそらくもっとも直感的な方法といえます。

代入法

代入法で連立方程式を解くには：

1. どちらかの方程式を、1つの変数について解く（たとえばy について解く）。
2. その式をもう一方の方程式に代入して、1変数の方程式にする。
3. その1変数方程式を解く。
4. 得られた値を元の方程式のどちらかに代入して、もう1つの変数を求める。
5. 元の連立方程式で確認する。

手順だけ見ると少し不自然に見えるかもしれませんが、例を見ると非常にはっきりします。次の連立方程式を考えます。

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$$

最初の目標は、一方の方程式を他方に代入できる形に変形することです。そうすると、2変数の連立を1変数の方程式に落とし込めます。1本目の式から

$$-x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1.$$

を得ます。これでy をx だけで表せたので、これを2本目に代入します。

$$2x + y = -2 \quad \Rightarrow \quad 2x + (x+1) = -2 \quad \Rightarrow \quad 3x + 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad 3x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

これで解の半分が得られました。y を求めるには、この$x = -1$ を先ほどの$y = x + 1$ に代入すればよく、

$$y = -1 + 1 = 0.$$

となります。したがって解は$(x, y) = (-1, 0)$ です。

3.1　分数を含む例

次の連立方程式を考えます。

$$\begin{cases} 5x + 3y = 18, \\ 2x - 7y = -1. \end{cases}$$

これを代入法で解きます。まず1本目の式をx について解くと、

$$5x + 3y = 18 \quad \Rightarrow \quad 5x = -3y + 18 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{5}y + \frac{18}{5}.$$

これを2本目に代入します。

$$2x - 7y = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\left(-\frac{3}{5}y + \frac{18}{5}\right) - 7y = -1.$$

これをy について解きます。まず整理すると

$$-\frac{6}{5}y + \frac{36}{5} - 7y = -1.$$

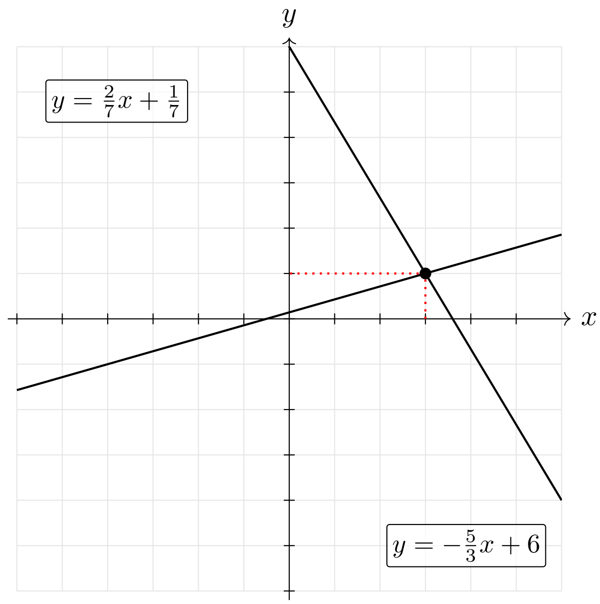
両辺を5 倍して整理すると

$$-6y + 36 - 35y = -5 \quad \Rightarrow \quad 36 - 41y = -5 \quad \Rightarrow \quad -41y = -41 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

これで解の半分が得られました。x を求めるために、$y = 1$ を$x = -\frac{3}{5}y + \frac{18}{5}$ に代入すると、

$$x = -\frac{3}{5}(1) + \frac{18}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

したがって解は$(3, 1)$ です。これはグラフでも確認できます。



3.2　従属系・不整合系に対する代入法

代入法を使うと、時には意外な式が現れます。たとえば

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$$

を代入法で解こうとすると、$x = 3y + 2$ を使って

$$-2(3y + 2) + 6y = 2 \quad \Rightarrow \quad -6y + 4 + 6y = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2.$$

となってしまいます。これはy の値にかかわらず常に矛盾が起こることを意味しています。したがって、この連立方程式には解がありません。つまり不整合です。

別の例として、

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

を考えましょう。代入法を試すと、1本目から$y = -3x + 5$ が得られ、これを用いると

$$9x + 3(-3x + 5) = 15 \quad \Rightarrow \quad 9x - 9x + 15 = 15 \quad \Rightarrow 15 = 15.$$

となります。これはx の値によらず常に真です。したがって、この連立方程式は解を1つだけではなく、無数にもちます。つまり従属系です。

最後に出てくる式の解釈

代入して整理したあと、

1. 偽の式（たとえば$-4 = 2$）が出たら、その連立方程式は**不整合**であり、**解はない**。
2. 真の式（たとえば$15 = 15$）が出たら、その連立方程式は**従属**であり、**無数に解がある**（2本の式が同じ直線を表している）。

Exercise 3

各連立方程式を代入法で解きなさい。

1. $\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9x+3y=15 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

4　消去法による解法

ここで、2変数の連立方程式を解く最後の方法、消去法に移ります。代入法と同様に、これは正確な解を与える代数的手法です。しかし、次の講義でより複雑な連立方程式を解くときにとても役立つ、別の技法です。手順は次のようにまとめられます。

消去法

消去法で連立方程式を解くには：

1. x あるいはy の係数が互いに逆符号になるように、一方または両方の方程式に適当な定数を掛ける。
2. 方程式を足して1つの変数を消去し、残った1変数方程式を解く。
3. 得られた値を元の方程式のどれかに代入して、もう1つの変数を求める。
4. 元の両方の方程式で確認する。

言い換えると、消去法では、片方の変数の係数が互いに逆符号になるように2本の式を整えることを目指します。そうすれば、2つの式を足したときにその変数が「消去」され、1変数だけの簡単な方程式が残ります。

4.1　2つの例

簡単な例として、次の連立方程式を考えます。

$$\begin{cases} 4x+3y=1, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$$

ここではy の係数が3 と-3 で、すでに逆符号になっています。したがって、2つの式を足せばy を消去できます。

$$(4x+3y)+(2x-3y)=1+5 \quad \Rightarrow \quad 6x=6 \quad \Rightarrow \quad x=1.$$

次に、この$x=1$ を1本目の式に代入してy を求めます。

$$4(1)+3y=1 \quad \Rightarrow \quad 3y=-3 \quad \Rightarrow \quad y=-1.$$

したがって、解は$(1,-1)$ です。

この例では、はじめからある変数が同じ係数・逆符号で現れていたので、ただ足せばすぐに消去できました。しかし一般には、係数が最初から一致しているとは限りません。そのため、消

去法ではまずどちらかの変数の係数が一致するように式を整えることが重要です。

その例として、次の連立方程式を考えます。

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ \;\; 3x + y = -5. \end{cases}$$

ここでは、x もy も係数が一致していません。しかし、式を変形すれば一致させることができます。今回はy の係数-3 と1 をそろえる方が簡単なので、2本目の式を両辺とも3 倍します。これは、$3x + y = -5$ が表す直線の幾何を変えることなく、同じ直線の別の式を作っているだけです。すると

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ \;\; 3x + y = -5. \end{cases}$$

から、y の係数がそろった新しい連立方程式が得られます。ここからは先ほどと同じように、2つの式を足してy を消去できます。

$$(2x - 3y) + (9x + 3y) = -7 + (-15) \quad \Rightarrow \quad 11x = -22 \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

次に、このx を元の式のどれかに代入してy を求めます。$3x + y = -5$ に代入すると

$$3(-2) + y = -5 \quad \Rightarrow \quad -6 + y = -5 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

したがって、解は$(-2, 1)$ です。

4.2 従属系・不整合系に対する消去法

代入法と同じく、消去法でも予想外の結果が現れることがあります。ここでは、3.2節で見た2つの系を消去法で解いてみます。

まず

$$\begin{cases} \quad x - 3y = 2, \\ -2x + 6y = 2. \end{cases}$$

を考えます。係数をそろえるために、1本目を2 倍すると

$$\begin{cases} \;\; 2x - 6y = 4, \\ -2x + 6y = 2. \end{cases}$$

を得ます。ここで2つの式を足してx を消去すると、

$$-6y + 6y = 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 6.$$

となります。x を消そうとしたら、たまたまy も消えてしまい、偽の式$0 = 6$ が出てきました。これは3.2 節での結論と同じで、この連立方程式には解がありません。

次に

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ \;\; 3x + y = 5 \end{cases}$$

を考えます。この場合は2本目を3 倍すると

$$\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 9x + 3y = 15 \end{cases}$$

となります。ここで2本目を1本目から引けばx を消去できるはずですが、実際にはまったく同じ式が2本並んでいるので、引くとすべてが消えて$0 = 0$ になります。もちろん$0 = 0$ は常に真です。したがって、この連立方程式は従属であり、無数に解をもちます。

この2つの現象をまとめると次のようになります。

0

消去したあと：

1. $0 = k$（ただし$k \neq 0$、たとえば$0 = 11$）が出たら、その系は**不整合**であり、**解はない**（平行な直線）。
2. $0 = 0$ が出たら、その系は**従属**であり、**無数に解がある**（同じ直線）。

このことには、3.2節の幾何学的説明ともつながる話があります。見かけの違う2つの方程式が、実は**同じ**直線を表していることがあります。これは、両方を標準形に直したあと、一方が他方の非零定数倍になっているときにちょうど起こります。

同じ直線とは定数倍のこと

2つの一次方程式が同じ直線を表すなら、両方を標準形に書いたあとで、一方の方程式はもう一方の非零定数倍になっている。たとえば

$$2y = 3x + 2 \quad と \quad 4y = 6x + 4$$

は同じ直線を表す。なぜなら、後者は前者を2 倍したものだからである。

平行な直線は、傾きが同じで切片が異なる場合です。たとえば$y = mx + b_1$ と$y = mx + b_2$ で$b_1 \neq b_2$ なら、2本は平行で決して交わりません。

Exercise 4

各連立方程式を消去法で解くか、一意な解がないと判断しなさい。

1. $\begin{cases} 2b + a = 15 \\ 3b - a = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 6y = -5 \\ -4x + 12y = 10 \end{cases}$

練習問題の解答

Exercise 1

1. $(3,3)$：1本目では$3+3=6$（真）。2本目では$2(3)-5(3)=6-15=-9 \neq -2$（偽）。したがって$(3,3)$ は解ではない。
2. $(4,2)$：1本目では$4+2=6$（真）。2本目では$2(4)-5(2)=8-10=-2$（真）。したがって$(4,2)$ は解である。
3. $(1,5)$：1本目では$1+5=6$（真）。2本目では$2(1)-5(5)=2-25=-23 \neq -2$（偽）。したがって$(1,5)$ は解ではない。

Exercise 2

1. 解は1つ（直線が1回だけ交わる）、交点は$(-3,1)$。
2. 解なし（平行：傾きが同じ2、切片が異なる）。
3. 無数に解がある（同じ直線：2本目は1本目の2 倍）。
4. 解なし（不整合：$x-3y=2$ を-2 倍すると$-2x+6y=-4$ となり、$-2x+6y=2$ と矛盾する）。

Exercise 3

1. $-x+y=1$ から$y=x+1$。これを$2x+y=-2$ に代入すると$2x+(x+1)=-2 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$、したがって$y=0$。よって$(-1,0)$。
2. 作業例から解は$(3,1)$。
3. $x-3y=2$ から$x=3y+2$。これを$-2x+6y=2$ に代入すると$-2(3y+2)+6y=2 \Rightarrow -6y-4+6y=2 \Rightarrow -4=2$（偽）。解なし。
4. 2本目を3 倍すると1本目になるので、2本は同じ直線。無数に解があり、すべての(x,y)で$3x+y=5$ を満たすもの。

Exercise 4

1. 足すと$(2b+a)+(3b-a)=15+5 \Rightarrow 5b=20 \Rightarrow b=4$、したがって$a=15-2(4)=7$。
2. 足すと$(4x+3y)+(2x-3y)=1+5 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$、さらに$4(1)+3y=1 \Rightarrow y=-1$。よって$(1,-1)$。
3. 2本目を3 倍すると$9x+3y=-15$。これを$2x-3y=-7$ に足すと$11x=-22 \Rightarrow x=-2$、さらに$3(-2)+y=-5 \Rightarrow y=1$。よって$(-2,1)$。
4. $2x-6y=5$ を3 倍して$6x-18y=15$。$3x-9y=2$ を-2 倍して$-6x+18y=-4$。足すと$0=11$（偽）。解なし。
5. $2x-6y=-5$ を2 倍して$4x-12y=-10$。これを$-4x+12y=10$ に足すと$0=0$（真）。無数に解があり、すべて直線$2x-6y=-5$ 上の点である。