MAT140 — 第14讲讲义

线性方程组

上节课我们用作图法、代入法和消元法解了两个一次方程组成的方程组。我们看到，作图法最直观美观，代入法最容易理解，而消元法最有用。关于最后这一点，我们曾简要提到：消元法之所以是三者中最好的方法，是因为它能够推广到更复杂的方程组，而代入法和作图法做不到。今天我们将把这个想法完整展开，看看消元法的真正威力。

现在我们要研究更复杂的线性方程组，其中有三个或更多方程，并且有更多未知数。求解这些系统的策略，是先把它们变换成一种更容易求解的形式，再去解这个更简单的系统。这种策略有一系列技术名称，整个过程称为高斯消元法，它事实上与上一讲里看到的"消元"方法非常相似。更技术性地说，今天我们将：

1. 理解行阶梯形，并用回代法解简单系统。
2. 学习三种行变换，并说明它们为什么保持方程组的解集不变。
3. 使用高斯消元法来解线性方程组。
4. 引入矩阵，这是一种能够简化高斯消元过程的记号。

下面，我们主要关注由2 个或3 个方程和未知数组成的系统。不过需要指出，这些技术同样适用于更复杂的系统。

1 行阶梯形与回代法

当我们使用高斯消元法时，目标是把方程组改写成这样一种形式：最后一个方程只含一个变量，倒数第二个方程只含两个变量，以此类推。从某种意义上说，这正是在"消去"变量。最终就会形成一种三角形的、"台阶状"的结构。

行阶梯形

一个系统

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

称为**行阶梯形**，如果系数a_2, a_3 和b_3 都等于零，也就是：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \qquad\quad b_2y + c_2z = d_2 \\ \qquad\qquad\quad c_3z = d_3. \end{cases}$$

例如，比较下面这两个方程组：

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \quad -x + 3y = -4, \\ 2x - 5y + z = 10. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \qquad y + 2z = 5, \\ \qquad\qquad z = 3. \end{cases}$$

不是行阶梯形 　　　　 **行阶梯形**

方便的是，后者可以通过一个直观过程来求解，这个过程称为回代法。如果一个方程组已经写成行阶梯形，比如上面右边那个系统，那么我们可以从下往上，逐个变量地求解。例如，对于方程组:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \qquad y + 2z = 5, \\ \qquad\qquad z = 3. \end{cases}$$

第三个方程直接告诉我们$z = 3$。既然知道了这一点，我们就可以把$z = 3$ 代入第二个方程求y:

$$y + 2(3) = 5 \quad \Rightarrow \quad y + 6 = 5 \quad \Rightarrow \quad y = -1.$$

现在既然已经知道$z = 3$ 且$y = -1$，就可以把它们代入第一个方程求x:

$$x - 2(-1) + 2(3) = 9 \quad \Rightarrow \quad x + 2 + 6 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

因此，解为$(1, -1, 3)$。

练习1

用回代法解下列方程组:

$$\begin{cases} 4a + b + c = 9, \\ \quad 3b - 2c = 5, \\ \qquad\quad 3c = 6. \end{cases}$$

2 高斯消元与行变换

高斯消元法就是一个系统性的过程，它把方程组变换成行阶梯形，同时不改变它的解集。如果我们能做到这一点，那么就可以通过简单的回代法解方程组，而不必去直接处理那些含有多个未知数的复杂方程。现在我们先来讨论：怎样把一个方程组化成行阶梯形，同时又不破坏它的解。

2.1 推导行变换

归根结底，我们想找的是：在不改变解的前提下，可以用哪些操作来简化方程组。下面我们给出几种不会改变方程组解的变换方式。

方法1：交换方程顺序。首先，很显然，改变方程的书写顺序并不会改变它们所描述的几何对象。[1]

方法2：乘以一个非零常数。另一种在不改变直线本身的情况下改变方程写法的方法，就是把方程两边同时乘以同一个非零常数。这不会移动直线上的点，只是给同一条直线换了一种方程表示形式。

方法3：把两个方程相加。最后，还有一个比较微妙的观察：如果我们把两个方程相加，那么它们的解集仍然会被保留下来。为了从代数上看清这一点，我们写一个一般的二元一次方程组:

[1]两个方程组成的方程组就像在说"这个并且那个同时成立"。而"并且"是对称的，说A 且B 与说B 且A 是一样的。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2. & (2) \end{cases}$$

假设我们已经知道点(α, β) 是这个方程组的一个解。这意味着把$x=\alpha$ 和$y=\beta$ 代入方程(1) 或(2) 时，都会得到真命题。把这两个方程相加，就是把左边相加、右边也相加，再把它们重新设为相等。写出来就是：

$$(a_1x+b_1y)+(a_2x+b_2y)=c_1+c_2 \quad \Rightarrow \quad (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y=c_1+c_2.$$

现在注意，这个新方程仍然是线性的，因为我们没有给x 或y 引入更高次幂。[2] 更重要的是，这个新线性方程仍然以$x=\alpha$ 与$y=\beta$ 为解。如果把这两个值代入进去，就得到：

$$\underbrace{(a_1(\alpha)+b_1(\beta))}_{\text{等于}c_1}+\underbrace{(a_2(\alpha)+b_2(\beta))}_{\text{等于}c_2}=c_1+c_2.$$

从几何上说，这个新方程通常描述的是一条与前两条完全不同的直线。不过根据上面的代数推导，这条新直线仍然会在点(α, β) 处与方程(1) 和(2) 的图像相交。因此，尽管我们换掉了其中一条直线的方程，**解本身并没有改变**。

为了看到这一点，考虑方程组

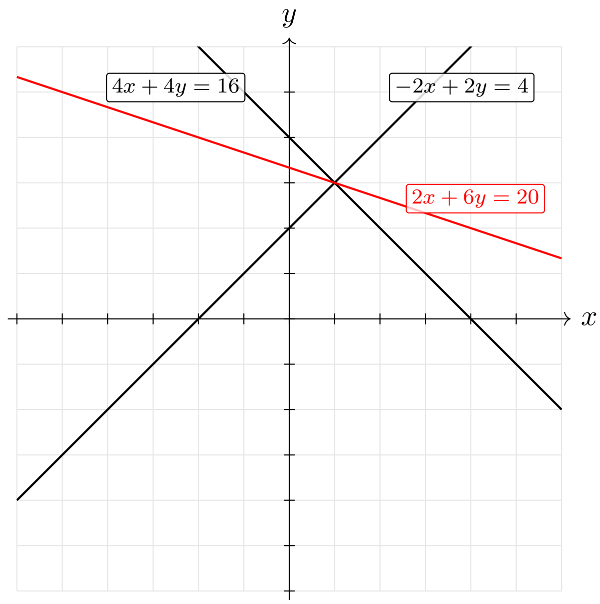
$$\begin{cases} 4x+4y=16, & (1) \\ -2x+2y=4. & (2) \end{cases}$$

你可以自己检查一下，这个方程组的解是$x=1$、$y=3$。从图像上看，这意味着这两条直线会在点$(1,3)$ 相交。如果把方程(1) 和(2) 相加，就得到一条新直线的方程：

$$(4x+4y)+(-2x+2y)=16+4 \quad \Rightarrow \quad 2x+6y=20.$$

这个新方程描述的是一条与原来两条都不同的直线。不过，看看把三条直线一起画出来会发生什么：

[2]可以注意到，新方程在x 和y 上仍然只是一次的，因此它仍然是线性方程。



如你所见，前两条直线的和定义出的第三条直线（红色）仍然会在$(1,3)$ 处与原来的两条直线相交。这意味着，我们可以用这条第三直线替换原来方程组中的某一条，而不会改变方程组的解。换句话说：

$$\begin{cases} 4x+4y=16, & (1) \\ -2x+2y=4, & (2) \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} 4x+4y=16, & (1) \\ 2x+6y=20. & (2) \end{cases}$$

在这里，我们把方程(2) 替换成了(1) 和(2) 的和。

2.2 三种基本行变换

一般来说，我们可以执行上面三种操作来改变一个方程组，同时保持它的解不变。

三种基本行变换

有三种基本的**行变换**：

(O1) 交换行：交换两个方程的位置。

(O2) 倍乘一行：把一个方程乘以一个非零常数。

(O3) 替换一行：把某一行用“它本身加上另一行的某个倍数”来替换。

虽然这已经稍微超出本课程范围，但值得一提的是：从某种意义上说，这三种操作已经“够了”。可以证明，你只需要这三种基本操作，而且任何保持线性方程组解集不变的操作，都可以写成这三种操作的组合。

下面我们简单举例说明三种行变换。考虑方程组

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

作为**(O1)** 的例子，我们交换第1 行和第2 行。这写作：

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{cases} -x+3y=-4 \\ x-2y+2z=9 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

作为**(O2)** 的例子，把第一行乘以3：

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \to 3R_1} \begin{cases} 3x-6y+6z=27 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

作为**(O3)** 的例子，我们把第1 行替换为第1 行与第2 行的和：

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \to R_1+R_2} \begin{cases} y+2z=5 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

2.3 一个高斯消元的完整例子

作为行变换实际运作的例子，考虑方程组：

$$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ -x+3y+0z=-4, \\ 2x-5y+z=10. \end{cases}$$

我们将通过把这个系统化成行阶梯形来求解它，这样就可以方便地用回代法求解。为此，我们首先需要消去第二行和第三行中的x 项。要做到这一点，先观察这些行中x 项的系数，并看它们与第一行中x 项之间的关系。最关键的问题是：

> "为了让别的行中的x 项在相加后被消掉，我应该把第一行乘以多少？"

为了消去x 项，我们需要分别回答这个问题两次，之后还需要消去第三行中的y 项。下面按顺序完成这三步：

- 对第2 行，我们看到x 项是$-x$，而第1 行中的x 项是x。因此，只要把这两行相加，x 就会互相抵消，从而被消去。我们希望把这个"消掉了x 的新行"放到第2 行中，使得第2 行不再含有x。所以正确的行变换是(O3)：$R_2 \to R_2 + R_1$。

  $$(-x+3y)+(x-2y+2z)=-4+9 \quad \Rightarrow \quad y+2z=5.$$

  用这个结果替换第2 行，就得到新方程组：

  $$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ y+2z=5, \\ 2x-5y+z=10. \end{cases}$$

  可以看到，我们已经成功地把第2 行中的x 消掉了。

- 对第3 行，我们看到x 项是$2x$，而第1 行中的对应项只是x。关键问题就是：我们应当把第1 行乘以多少，使得得到的新系数与$2x$ 相匹配，并能在相加后抵消？答案是：我们希望把第1 行中的x 项变成$-2x$，这样最终就会得到$2x - 2x = 0$。因此，这一步仍然使用(O3)，只不过这次是用“第3 行加上第1 行的-2 倍”来替换第3 行。也就是说：$R_3 \to R_3 - 2R_1$。写出来就是：

  $$(2x - 5y + z) - 2(x - 2y + 2z) = 10 - 18 \quad \Rightarrow \quad -y - 3z = -8.$$

  用这个结果替换第3 行，于是新方程组变成：

  $$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \quad\;\; y + 2z = 5, \\ \;\; -y - 3z = -8. \end{cases}$$

- 最后，我们要消去第3 行中的y 项。此时，如果尝试用第1 行去处理第3 行，那么就会重新引入x 项，把前面的工作又破坏掉。因此，要消去第3 行中的y，必须使用第2 行。观察现在的系统可知，第2 行和第3 行中的y 系数已经大小相同、符号相反（都是1，一个正一个负）。所以，把第2 行和第3 行相加，就能消去第3 行中的y。这对应于(O3)：$R_3 \to R_3 + R_2$。相加后得到：

  $$(-y - 3z) + (y + 2z) = -8 + 5 \quad \Rightarrow \quad -z = -3.$$

  于是我们就得到了行阶梯形：

  $$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \quad\;\; y + 2z = 5, \\ \quad\quad\;\; -z = -3. \end{cases}$$

这和第1 节讨论过的是同一个系统，现在可以用回代法求得解：$x = 1$、$y = -1$、$z = 3$。

2.4 一个不相容系统

有时，高斯消元会得到一个假命题，这意味着这个方程组无解。这和我们在二元方程组中看到的不相容情形完全一样：我们进行了逻辑正确的变换，结果却得到一个永远不可能成立的式子。

例如，考虑方程组：

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

通过一系列行变换，可以得到与它等价的系统：

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ \quad 5y - 4z = 0, \\ \quad 5y - 4z = -2. \end{cases}$$

把第二个方程从第三个方程中减去，就得到$0 = -2$，这是错误的。另一种看法是：在这个三元系统中，存在一个由两个方程和两个未知数组成的子系统本身就是不相容的：

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ \quad 5y - 4z = 0, \\ \quad 5y - 4z = -2. \end{cases}$$

从图像上说，这两个方程对应的是yz 平面中的两条平行直线。

一般来说，任何线性方程组只会出现以下少数几种情况。

解的个数（高斯消元的结果）

对于一个线性方程组，以下三种情况中恰好有一种成立：

1. 恰好有一个解。
2. 有无穷多个解。
3. 没有解。

3 矩阵与增广矩阵

从某种意义上说，当我们利用行变换来解线性方程组时，我们真正关心的并不是变量本身，而是它们的系数。为了消去变量，我们比较不同行中的系数，然后思考如何利用(O3) 把这些系数消成零。事实上，我们完全可以只写下系数和行变换，而不必显式写出变量本身。考虑下面这个简单例子：

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{cases} 4x+y=2 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \arrow[r, "(\mathrm{R2})\to 2\cdot(\mathrm{R2})", "\color{red}(\mathrm{O2})"'] \arrow[d, "\text{只写出数字}"] & \begin{cases} 4x+y=2 \\ 4x+4y=2 \end{cases} \arrow[r, "(\mathrm{R2})\to(\mathrm{R2})-(\mathrm{R1})", "\color{red}(\mathrm{O3})"'] \arrow[d, "\text{只写出数字}"] & \begin{cases} 4x+y=2 \\ 3y=0 \end{cases} \arrow[d, "\text{只写出数字}"] \\
\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \arrow[r, "(\mathrm{R2})\to 2\cdot(\mathrm{R2})", "\color{red}(\mathrm{O2})"'] & \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \arrow[r, "(\mathrm{R2})\to(\mathrm{R2})-(\mathrm{R1})", "\color{red}(\mathrm{O3})"'] & \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right]
\end{tikzcd}$$

可以看出，这种按网格排布的数字表，以更简单的记号保留了同样的信息。重要的是，

- 我们仍然能看出各行的排列；
- 我们仍然能看出等号（这里用竖线表示）；
- 我们仍然能区分各个变量对应的系数；
- 我们仍然可以对它执行行变换，并把系统化成行阶梯形。

这意味着，只要把方程组里各项的系数写出来，我们其实并没有丢失任何重要信息。因此，我们仍然可以求解这个系统，只不过这次使用的是一种更简洁的记号。

这种按网格排列的数字数组非常有用。它们有一个名字，叫做矩阵。

矩阵及其阶数

一个**矩阵**是一个由数字构成的长方形数组。我们把一个有m 行、n 列的矩阵写作：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

如果它有m 行、n 列，我们就说这个矩阵的**阶**是$m \times n$。

练习3

判断下列各矩阵的阶：

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3.1 系数矩阵与增广矩阵

一个线性方程组（常数项写在右边）对应着一个**系数矩阵**和一个**增广矩阵**。

三个方程组的系数矩阵与增广矩阵

考虑一个含有三个方程、三个未知数的系统：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

它的**系数矩阵**是把所有左边的系数取出来，按位置排成的3×3 矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

该系统的**增广矩阵**是在系数矩阵右边再加一列，把方程右边的常数项一起写进去：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right].$$

我们用方括号来写增广矩阵，以便与普通矩阵区分开来。

例如，考虑系统：

$$\begin{cases} \quad 3x + 2y - z = 1, \\ \quad x + 0y + 2z = -3, \\ -2x - y + 0z = 4. \end{cases}$$

把变量前面的系数取出来，就得到矩阵：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这叫做系数矩阵。如果把右边的常数项作为额外一列也写进去，就得到增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

虽然我们刚刚是针对三个方程定义了增广矩阵，但要注意，这里并没有任何限制，任何线性方程组都可以写成增广矩阵。例如，第3 节开头那两个系统对应的增广矩阵就是2×3 的矩阵。

练习4

为每个方程组写出系数矩阵和增广矩阵。

1. $\begin{cases} -x+5y=2 \\ 7x-2y=-6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+0y+2z=-3 \\ -2x-y+0z=4 \end{cases}$

4 矩阵上的初等行变换

我们也可以把同样的行变换直接作用在增广矩阵上。

练习5

执行下面各个行变换。

1. 交换第一行和第二行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

2. 将第一行乘以$\frac{1}{2}$：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

3. 用“第三行加上第一行的-2 倍”替换第三行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

4. 用“第二行加上第一行的6 倍”替换第二行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ -6 & -11 & 3 & 18 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

练习6

判断哪些矩阵已经是行阶梯形：

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 用增广矩阵求解方程组

要用矩阵来解线性方程组，步骤如下。

用增广矩阵解方程组

要用矩阵来解一个方程组：

1. 写出它的**增广矩阵**。
2. 通过行变换把它化成**行阶梯形**。
3. （如果愿意）再把它转回方程形式，然后用**回代法**求解。

为了看看矩阵形式下的高斯消元，我们来解下面这个简单方程组：

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 13. \end{cases}$$

第一步是写出该系统对应的增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right].$$

现在做三步行变换：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 2 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & -7 & -28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

既然已经得到行阶梯形，我们就可以把它重新读回成方程组：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 13, \\ y = 4 \end{cases}$$

用回代法立刻得到$y = 4$，所以：

$$x + 2(4) = 13 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

因此解为$(5, 4)$。

练习7

解下列方程组（你可以使用增广矩阵）：

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ 3x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

练习答案

练习1: 由$3c=6$ 得$c=2$。代入$3b-2c=5$:

$$3b-2(2)=5\Rightarrow 3b=9\Rightarrow b=3.$$

再把$b=3$ 和$c=2$ 代入$4a+b+c=9$:

$$4a+3+2=9\Rightarrow 4a=4\Rightarrow a=1.$$

所以$(a,b,c)=(1,3,2)$。

练习3: (a) 2×3

(b) 2×2

(c) 3×2

练习4: (a) 系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 7 & -2\end{pmatrix}\qquad \text{增广矩阵:}\ \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 5 & 2\\ 7 & -2 & -6\end{array}\right]$$

(b) 系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\qquad \text{增广矩阵:}\ \left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 0 & 4\end{array}\right]$$

练习5: (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 4 & 1\end{array}\right]$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -3 & 0\\ 5 & -2 & 1 & 2\end{array}\right]$$

(c) $R_3\to R_3-2R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 13 & -8\end{array}\right]$$

(d) $R_2\to R_2+6R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 15 & -6\\ 0 & 4 & 7 & 0\end{array}\right]$$

练习6: (a) 不是行阶梯形　　(b) 是行阶梯形　　(c) 是行阶梯形。

练习7:

$$(2x+3y+z)-2(x+y+z)=11-12\Rightarrow y-z=-1.$$

$$(3x+3y+2z)-3(x+y+z)=16-18\Rightarrow -z=-2\Rightarrow z=2.$$

然后由$y-z=-1$ 得$y-2=-1$，所以$y=1$。最后由$x+y+z=6$ 得$x+1+2=6$，所以$x=3$。因此$(x,y,z)=(3,1,2)$。