MAT140 — 第14講ハンドアウト
一次方程式系

前回の講義では、グラフ・代入法・消去法を使って、2本の一次方程式からなる連立方程式を解きました。その中で、グラフはもっとも美しく、代入法はもっとも直感的で、消去法はもっとも有用であることを見ました。特に後者については、消去法が3つの方法の中で最良であるのは、それが代入法やグラフにはできない仕方で、より複雑な連立方程式へ拡張できるからだと少し触れました。今日はその考えをさらに具体化し、消去法の本当の力を見ていきます。

ここからは、未知数が増え、方程式も*3*本以上あるような、より複雑な連立一次方程式を扱います。こうした系を解くための戦略は、まずそれをより解きやすい形に変形し、その解きやすくなったものを解くことです。この戦略にはいくつかの専門的な名前がついており、全体の過程はガウス消去法と呼ばれます。実際、前回見た消去法と非常によく似た考え方です。技術的に言えば、今日は次のことを扱います。

1. 行階段形を理解し、後退代入によって簡単な系を解く。
2. 3つの行基本変形を学び、それらが解集合を保つことを見る。
3. ガウス消去法を使って連立一次方程式を解く。
4. 行列を導入する。これはガウス消去法を簡潔に表すための記法である。

以下では主として、2本または3本の方程式・未知数からなる系に集中します。ただし、ここで学ぶ技法はもっと複雑な系にもそのまま適用できます。

1　行階段形と後退代入

ガウス消去法では、最後の方程式が1つの変数だけを含み、その1つ上の方程式が2つの変数だけを含み、というような形に系を書き直すことを目指します。ある意味で、私たちは変数を「消去」しているのです。すると、三角形状の「階段」パターンが現れます。

行階段形

連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

が**行階段形**であるとは、係数a_2, a_3, b_3 がすべて0 であって、

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \qquad\quad b_2y + c_2z = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad c_3z = d_3. \end{cases}$$

の形になっていることである。

たとえば、次の2つの連立方程式を比べてみましょう。

$$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ \quad -x+3y=-4, \\ 2x-5y+z=10. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x-2y+2z=9, \\ \qquad\quad y+2z=5, \\ \qquad\qquad\quad z=3. \end{cases}$$

行階段形ではない **行階段形**

便利なことに、右側のような系は後退代入という直感的な方法で解けます。行階段形で書かれている系では、下から上へとたどりながら、1つずつ変数を求めていけばよいのです。たとえば、

$$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ \qquad\quad y+2z=5, \\ \qquad\qquad\quad z=3. \end{cases}$$

では、3本目の式からただちに$z=3$ とわかります。これを2本目に代入すると、

$$y+2(3)=5 \quad \Rightarrow \quad y+6=5 \quad \Rightarrow \quad y=-1.$$

さらに$z=3$ と$y=-1$ を1本目に代入すると、

$$x-2(-1)+2(3)=9 \quad \Rightarrow \quad x+2+6=9 \quad \Rightarrow \quad x=1.$$

したがって解は$(1,-1,3)$ です。

Exercise 1

次の連立方程式を後退代入で解きなさい。

$$\begin{cases} 4a+b+c=9, \\ \quad 3b-2c=5, \\ \qquad\quad 3c=6. \end{cases}$$

2　ガウス消去法と行基本変形

ガウス消去法とは、解集合を変えずに系を行階段形へ系統的に変形していく過程です。これができれば、複数の未知数が絡んだ複雑な方程式を直接解く必要はなくなり、最後は単純な後退代入だけで解けます。ここでは、解集合を壊さずに系を行階段形へ変換するにはどうすればよいのかを詳しく見ていきます。

2.1　行基本変形の導出

目標は、連立方程式の解を変えずに、系を簡単化してくれる操作を見つけることです。そこでまず、解を変えないまま方程式系を変形する方法をいくつか挙げます。

方法1：行の入れ替え。まず、方程式を書く順番を入れ替えても、その背後にある幾何は何も変わらないのは明らかでしょう。[1]

方法2：定数倍する。直線を表す方程式を変える別の方法として、両辺を同じ非零定数倍することがあります。これは直線上の点を動かすのではなく、同じ直線を表す別の式を書いているだけです。

方法3：2本の方程式を足す。最後に、少し微妙な観察があります。2本の方程式の解集合は、それらを足し合わせても保たれます。これを代数的に見るために、一般の2変数2本の系を書いてみましょう。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (2) \end{cases}$$

(α, β) がこの系の解だとします。つまり$x = \alpha$, $y = \beta$ を(1) にも(2) にも代入すると真になります。2本の式を足すとは、左辺どうしを足し、右辺どうしを足して、それらを等号で結ぶことです。すると

$$(a_1x + b_1y) + (a_2x + b_2y) = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2.$$

となります。この新しい式も、x やy に新しいべきが付いていないので、やはり一次方程式です。[2] さらに、この新しい方程式も$x = \alpha$, $y = \beta$ を解にもっています。実際、

$$\underbrace{(a_1(\alpha) + b_1(\beta))}_{\text{これは}c_1} + \underbrace{(a_2(\alpha) + b_2(\beta))}_{\text{これは}c_2} = c_1 + c_2.$$

となるからです。

幾何学的には、この新しい一次方程式は一般には元の2本とは異なる別の直線を表します。しかし、上の代数から、その新しい直線も(α, β) で元の2本と交わることがわかります。したがって、直線の式自体は変わっても、**解そのものは変わらない**のです。

具体例として、次の系を考えます。

$$\begin{cases} 4x + 4y = 16, & (1) \\ -2x + 2y = 4. & (2) \end{cases}$$

この系の解は$x = 1$, $y = 3$ です。つまり、2本の直線は点$(1, 3)$ で交わります。ここで(1) と(2) を足すと、新しい直線の方程式

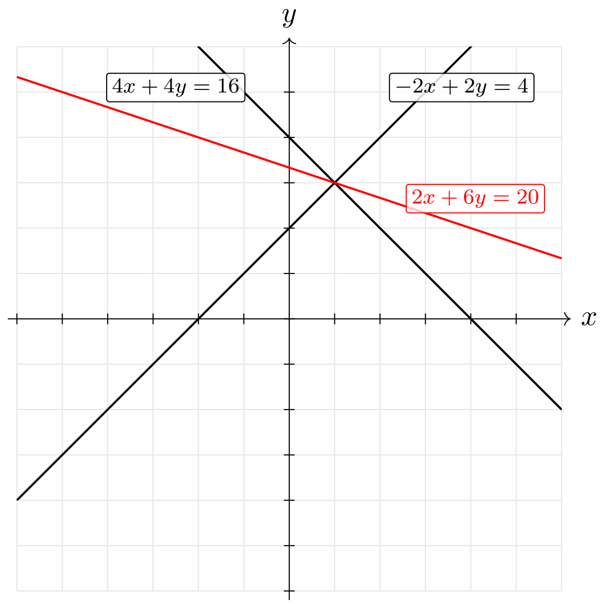
$$(4x + 4y) + (-2x + 2y) = 16 + 4 \quad \Rightarrow \quad 2x + 6y = 20.$$

を得ます。

この新しい方程式は、最初の2本とは異なる直線を表します。しかし、3本の直線を同時に描いてみると次のようになります。

[1] 2本の方程式からなる系は、「これかつこれが同時に真である」と言っているのと同じです。しかし「and」は対称です。A かつB と言うのも、B かつA と言うのも同じです。

[2] この新しい式もx とy に関して1次であることに注目すれば、依然として一次方程式であることがわかります。



図を見ると、2本の直線の和でできた3本目の直線（赤）も、やはり$(1,3)$ でほかの2本と交わっています。つまり、元の2本のうち1本をこの3本目で置き換えても、解は変わりません。すなわち、

$$\begin{cases} 4x+4y=16, & (1) \\ -2x+2y=4, & (2) \end{cases} \quad \text{は} \quad \begin{cases} 4x+4y=16, & (1) \\ 2x+6y=20. & (2) \end{cases}$$

と同値です。ここでは、(2) を(1) と(2) の和で置き換えたわけです。

2.2 3つの行基本変形

一般に、ここで述べた3つの方法を使えば、解を保ったまま系を変形できます。

3つの行基本変形

基本的な**行基本変形**は次の3つである：

(O1) 行の交換： 2つの方程式の順序を入れ替える。

(O2) 行の定数倍： ある式を非零定数倍する。

(O3) 行の置き換え： ある式に、別の式の定数倍を足して置き換える。

この講義の範囲を少し超えますが、これら3つはある意味で「これだけ」で十分です。すなわち、連立一次方程式の解集合を保つあらゆる操作は、実はこの3つの組合せとして書けることが示せます。

では、3つの行基本変形の簡単な例を見ましょう。系

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

を考えます。**(O1)** の例として、第1行と第2行を交換すると、

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{cases} -x+3y=-4 \\ x-2y+2z=9 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

となります。

(O2) の例として、第1行を3 倍すると、

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1\to 3R_1} \begin{cases} 3x-6y+6z=27 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

(O3) の例として、第1行を第1行と第2行の和で置き換えると、

$$\begin{cases} x-2y+2z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases} \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{cases} y+2z=5 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+z=10 \end{cases}$$

2.3 ガウス消去法の例

行基本変形が実際にどう動くかを見るために、次の系を考えます。

$$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ -x+3y+0z=-4, \\ 2x-5y+z=10. \end{cases}$$

この系を行階段形に変形してから後退代入で解きます。まず、第2行と第3行のx を消去したいので、それぞれのx の係数と第1行のx の係数を比べます。核心となる問いは次です。

> 「他の行のx の項を、行を足したときにちょうど打ち消すには、第1行を何倍すればよいか？」

x の消去にはこの問いに2回答え、そのあと最後に第3行のy を消去する必要があります。順にやっていきます。

- 第2行については、そのx の項は$-x$、第1行のx はx です。したがって2行を足せばx は消えます。この「x を消した行」を第2行に入れたいので、(O3) を使って$R_2 \to R_2+R_1$ とします。

  $$(-x+3y)+(x-2y+2z)=-4+9 \quad\Rightarrow\quad y+2z=5.$$

  これで新しい系は

  $$\begin{cases} x-2y+2z=9, \\ y+2z=5, \\ 2x-5y+z=10. \end{cases}$$

  となり、第2行のx をうまく消去できました。

- 第3行については、x の項は$2x$、第1行はx です。問いは「第1行を何倍すれば、足したときに$2x$ を消せるか」です。第1行のx を$-2x$ にしたいので、(O3) によって$R_3 \to R_3 - 2R_1$ とします。計算すると

  $$(2x - 5y + z) - 2(x - 2y + 2z) = 10 - 18 \quad \Rightarrow \quad -y - 3z = -8.$$

  これを第3行に入れると

  $$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \quad\quad y + 2z = 5, \\ \quad -y - 3z = -8. \end{cases}$$

  となります。
- 最後に、第3行のy を消します。ここで第1行を使うと、消えたはずのx がまた現れてしまうので、第2行を使わなければなりません。第2行と第3行のy の係数を見ると、それぞれ1と-1 なので、すでに逆符号になっています。したがって、$R_3 \to R_3 + R_2$ とすればよいです。

  $$(-y - 3z) + (y + 2z) = -8 + 5 \quad \Rightarrow \quad -z = -3.$$

  よって、行階段形

  $$\begin{cases} x - 2y + 2z = 9, \\ \quad\quad y + 2z = 5, \\ \quad\quad\quad -z = -3. \end{cases}$$

  が得られます。

これは第1節で扱ったのと同じ系であり、後退代入によって$x = 1, y = -1, z = 3$ が得られます。

2.4 不整合な系

ガウス消去法によって偽の式が現れることがあります。そのとき、その系には解がありません。これは2本の方程式のときに見た不整合な系とまったく同じ概念です。正しい論理操作を進めていくと、最後に常に偽となる式に到達するのです。

例として、次の系を考えます。

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

ある行基本変形の列によって、これと同値な

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ \quad 5y - 4z = 0, \\ \quad 5y - 4z = -2. \end{cases}$$

が得られるとします。このとき、2本目を3本目から引くと$0 = -2$ となり、これは偽です。別の見方をすれば、この3本の中にはすでに不整合な2本の部分系が含まれています。

$$
\begin{cases}
x - 3y + z = 1, \\
\quad 5y - 4z = 0, \\
\quad 5y - 4z = -2.
\end{cases}
$$

幾何学的には、これら2本はyz 平面内の平行な直線に対応します。

一般に、連立一次方程式の解の個数については、可能性は次の3つしかありません。

解の個数（ガウス消去法の結論）

連立一次方程式について、次のちょうど1つが成り立つ：

1. 解がただ1つある。
2. 解が無数にある。
3. 解がない。

3　行列と拡大行列

連立一次方程式を行基本変形で解くとき、実のところ私たちが本当に見ているのは変数そのものではなく、その係数です。変数を打ち消そうとするとき、2つの行にある係数を見比べて、(O3) によってそれを0 にする方法を考えています。実は、文字そのものを書かずに係数と行基本変形だけを書いても十分なのです。単純な例を見てみましょう。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \arrow[r, "\text{(R2)} \to 2\cdot\text{(R2)}", "\text{(O2)}"'] \arrow[d, "\substack{\text{文字を省いて} \\ \text{数だけ書く}}"] & \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 4x + 4y = 2 \end{cases} \arrow[r, "\text{(R2)} \to \text{(R2)} - \text{(R1)}", "\text{(O3)}"'] \arrow[d, "\substack{\text{文字を省いて} \\ \text{数だけ書く}}"] & \begin{cases} 4x + y = 2 \\ \quad 3y = 0 \end{cases} \arrow[d, "\substack{\text{文字を省いて} \\ \text{数だけ書く}}"] \\
\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \arrow[r, "\text{(R2)} \to 2\cdot\text{(R2)}", "\text{(O2)}"'] & \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \arrow[r, "\text{(R2)} \to \text{(R2)} - \text{(R1)}", "\text{(O3)}"'] & \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right]
\end{tikzcd}
$$

このように、数を格子状に並べたものは、より単純な記法でありながら同じ情報を表しています。重要なのは、

- 行の並び方が見えること、
- 等号が見えること（ここでは縦棒で表している）、
- 各変数に対応する係数を識別できること、
- 行基本変形を行って行階段形を作れること、

です。つまり、係数だけを書き出しても本質的な情報は失われません。したがって、より簡潔

な記法で系を解くことができます。

このような格子状の数の並びは非常に有用で、行列と呼ばれます。

行列とそのサイズ

行列とは、数を長方形状に並べたものである。m 行n 列の行列は次のように書く：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行がm、列がn なら、そのサイズは$m \times n$ であるという。

Exercise 3

次の各行列のサイズを答えなさい。

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3.1 係数行列と拡大行列

右辺が定数である連立一次方程式には、**係数行列**と**拡大行列**があります。

3本の方程式からなる系の係数行列と拡大行列

3変数3本の連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

を考える。
このとき**係数行列**とは、左辺の係数だけを取り出して作る3×3 行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

のことである。
拡大行列とは、この係数行列に右辺の定数を1列追加した

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

である。拡大行列は通常の行列と区別するために角括弧で書く。

例として、

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + 0y + 2z = -3, \\ -2x - y + 0z = 4. \end{cases}$$

を考えます。変数に掛かっている数を並べると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これを係数行列と呼びます。右辺の定数も1列として加えると、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

これが拡大行列です。

なお、ここでは3本の方程式について拡大行列を定義しましたが、もちろん一般の連立一次方程式にも同じことができます。たとえば第3節の冒頭に出てきた2本の系に対する拡大行列は2×3行列になります。

Exercise 4

各系について、係数行列と拡大行列を作りなさい。

1. $\begin{cases} -x+5y=2 \\ 7x-2y=-6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+0y+2z=-3 \\ -2x-y+0z=4 \end{cases}$

4　行列に対する行基本変形

行基本変形は、拡大行列に対してもそのまま行えます。

Exercise 5

次の各行基本変形を行いなさい。

1. 第1行と第2行を入れ替える：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

2. 第1行を$\frac{1}{2}$ 倍する：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

3. 第1行の-2 倍を第3行に加える：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

4. 第1行の6 倍を第2行に加える：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ -6 & -11 & 3 & 18 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Exercise 6

次の行列が行階段形かどうかを判定しなさい。

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5　拡大行列を使って連立方程式を解く

拡大行列を使って連立一次方程式を解くには、次の手順をとります。

拡大行列による解法

拡大行列を使って系を解くには：

1. **拡大行列**を書く。
2. 行基本変形によって**行階段形**にする。
3. 必要なら方程式に戻し、**後退代入**で解く。

例として、次の簡単な連立方程式を行列で解いてみましょう。

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 13. \end{cases}$$

まず対応する拡大行列を書くと

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right].$$

これに3つの行基本変形を施します。

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 2 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & -7 & -28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

こうして行階段形が得られたので、これを方程式に戻すと

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 13, \\ \quad\;\; y = 4 \end{cases}$$

となります。後退代入により$y = 4$ がすぐにわかるので、

$$x + 2(4) = 13 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

したがって、解は$(5, 4)$ です。

Exercise 7

次の連立方程式を解きなさい（拡大行列を使ってよい）。

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ 3x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

練習問題の解答

Exercise 1: $3c = 6$ から$c = 2$。これを$3b - 2c = 5$ に代入すると

$$3b - 2(2) = 5 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3.$$

さらに$b = 3,\ c = 2$ を$4a + b + c = 9$ に代入すると

$$4a + 3 + 2 = 9 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1.$$

よって$(a, b, c) = (1, 3, 2)$。

Exercise 3: (a) 2×3
(b) 2×2
(c) 3×2

Exercise 4: (a) 係数行列：

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{拡大行列：} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

(b) 係数行列：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{拡大行列：} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Exercise 5: (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(c) $R_3 \to R_3 - 2R_1$：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{array}\right]$$

(d) $R_2 \to R_2 + 6R_1$：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 15 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Exercise 6: (a) 行階段形ではない　(b) 行階段形である　(c) 行階段形である。

Exercise 7:

$$(2x + 3y + z) - 2(x + y + z) = 11 - 12 \Rightarrow y - z = -1.$$

$$(3x + 3y + 2z) - 3(x + y + z) = 16 - 18 \Rightarrow -z = -2 \Rightarrow z = 2.$$

すると$y - z = -1$ より$y - 2 = -1$、したがって$y = 1$。最後に$x + y + z = 6$ より$x + 1 + 2 = 6$、したがって$x = 3$。よって$(x, y, z) = (3, 1, 2)$。