MAT140 — 第15讲讲义

行列式

上节课中，我们学习了如何用高斯消元法求解较大的线性方程组。基本策略很简单：把一个困难的方程组，通过行变换一步步化成一个更容易的方程组，然后再用回代法求解。我们看到，在进行高斯消元时，所有重要的信息其实都包含在线性方程组的系数里，因此我们也可以用一种更简洁的记号来做消元，只把这些数字写下来。这就引出了矩阵，它可以看作实数构成的简单数表。

在这节课里，我们继续讲述矩阵的故事，并引入一个特殊的运算，称为行列式。乍看之下，行列式似乎只是附着在方阵上的一个代数公式。然而，事实证明它还具有几何意义：行列式编码了面积、体积之类的几何量。这也是我们第一次真正窥见线性代数背后更深层的结构。

今天我们将：

1. 定义2×2 矩阵的行列式，并计算一些例子。
2. 学习如何用余子式展开来计算3×3 矩阵的行列式。
3. 用克莱姆法则判断一个2×2 方程组是否有唯一解。
4. 从几何上把行列式解释为面积，并用它来求三角形的面积。

1 什么是行列式?

到目前为止，矩阵主要还是一种方便的记号，用来记录求解线性方程组时出现的系数。行列式则是我们第一次把一个方阵变成单个数字的例子。这个数字的信息量出人意料地丰富，而且还有一个很好的几何解释。

重要限制

行列式只对**方阵**有定义，也就是说，只对行数与列数相同的矩阵有定义。

1.1 2×2 矩阵的行列式

如果

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

那么A 的行列式定义为

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2×2 矩阵的行列式

对于

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = ad - bc.$$

用文字来说，行列式等于一条对角线上的乘积减去另一条对角线上的乘积。

这是一个很好的记忆方法，但重要的是要记住顺序：行列式不是两条对角线乘积的和，而是它们的差。

1.2 两个快速例子

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3) - (2)(1) = 9 - 2 = 7.$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (7)(1) - (3)(0) = 7 - 0 = 7.$$

练习1

求出每个矩阵的行列式。

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.3 3×3 矩阵的行列式

2×2 行列式非常简单。对于一个3×3 矩阵，公式会复杂一些，因此我们把问题拆成更小的部分来处理。

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

如果沿第一行展开，那么我们对每一个选中的元素，删去它所在的行和列，再计算剩下那个2×2 矩阵的行列式。这些较小的行列式称为余子式。符号模式如下：

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

因此，沿第一行展开可得

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

沿一行展开3×3 行列式

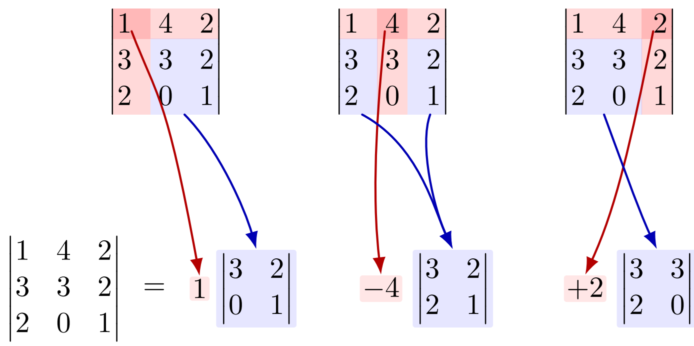
要计算一个3×3 行列式：

1. 选取一行或一列。
2. 使用棋盘式的符号模式$+, -, +$ / $-, +, -$ / $+, -, +$。
3. 对每个选中的元素，删去它所在的行和列，形成一个2×2 余子式。
4. 把每个元素与其余子式的行列式相乘，加上正确的符号，然后相加。

作为例子，我们来计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

为此，我们沿第一行展开，并构造三个2×2 矩阵。



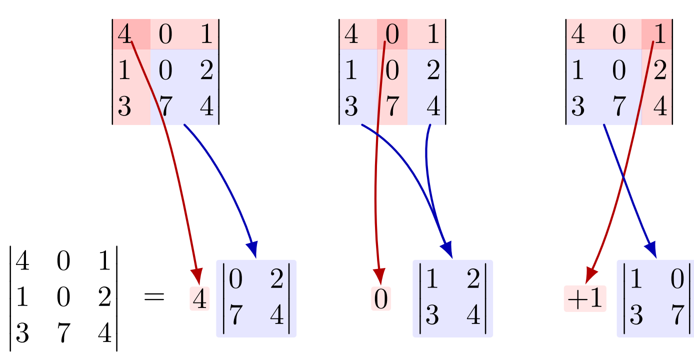
现在我们只要把这些余子式的行列式算出来，就得到：

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0) - 4(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + 2(3 \cdot 0 - 3 \cdot 2) \\
&= 1(3) - 4(-1) + 2(-6) \\
&= 3 + 4 - 12 = -5.
\end{aligned}$$

再看另一个例子，我们来计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

如果沿第一行展开，示意图如下：



同样地，完整的行列式现在可以通过计算这些余子式来得到：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix}0 & 2\\7 & 4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 7\end{vmatrix}\\ &= 4(0\cdot 4 - 2\cdot 7) - 0(1\cdot 4 - 2\cdot 3) + 1(1\cdot 7 - 0\cdot 3)\\ &= 4(-14) - 0 + 7 = -49.\end{aligned}$$

练习2

计算每一个行列式。

1. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\2 & a & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$

2 克莱姆法则

现在我们回到方程组。前面的课程中，我们曾用作图法、代入法、消元法以及行化简来求解方程组。现在我们要说明，行列式也能用来求解这些方程组。我们先从最简单的情形开始，即一个有2 个线性方程和2 个未知数的方程组。

2.1 2 个线性方程组成的方程组的一般解

考虑一般方程组：

$$\begin{cases}a_1x + b_1y = c_1,\\a_2x + b_2y = c_2.\end{cases}$$

这里a_i, b_i 和c_i 都是实数，并且在下面的推导中假设$b_2 \neq 0$。

我们可以用代入法一般地求解这个方程组：先把某一个方程整理成左边只含y 的形式，再把这个值代回另一个方程。没有什么特别原因，这里我们把第二个方程整理成关于y 的形式：

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

如果现在把这个值代入第一个方程，并整理，就得到：

$$a_1x + b_1\left(-\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}\right) = c_1,$$

$$a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x + \frac{b_1c_2}{b_2} = c_1.$$

现在我们把含x 的项收集到左边，把常数项收集到右边：

$$a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x + \frac{b_1c_2}{b_2} = c_1 \quad \Rightarrow \quad a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x = c_1 - \frac{b_1c_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_2}x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{b_2}.$$

现在我们可以通过相除，把左边写成只含x 的形式：

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

同样的思路，如果这次从x 而不是y 开始，也可以得到：

$$y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1}.$$

由于

$$b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) \quad \text{且} \quad c_1a_2 - a_1c_2 = -(c_2a_1 - a_2c_1),$$

这个式子也可以改写为

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

因此，只要

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

这个一般方程组的唯一解就是：

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad \text{且} \qquad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

这些关于x 和y 的一般解公式，看起来非常像2×2 矩阵的行列式公式。事实上，情况正是如此。上面的两个表达式可以改写为：

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}, \qquad \text{且} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}.$$

我们刚刚其实已经推导出了适用于2 个方程、2 个未知数情形的克莱姆法则。

适用于2×2 方程组的克莱姆法则

如果

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

有唯一解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

重要的是，我们必须假设系数矩阵的行列式非零。否则，一般解中的分母就是零，因此表达式无定义。这是一个非常重要的观察。

解的唯一性

对于一个2×2 方程组，当且仅当系数矩阵的行列式**非零**时，这个方程组才有**唯一解**。

还要注意的是，系数矩阵的行列式为零，**并不**意味着方程组无解。它只意味着该方程组没有唯一解。在这种情况下，方程组可能无解，也可能有无穷多个解。举例来说，考虑下面这个方程组：

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

这两个方程描述的是同一条直线，所以这个方程组有无穷多个解。然而，系数矩阵的行列式是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2) - (1 \cdot 2) = 0.$$

再来看一个克莱姆法则实际应用的例子，考虑方程组：

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ 3x - 5y = 11. \end{cases}$$

这个方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵的行列式非零：

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (4)(-5) - (-2)(3) = -20 - (-6) = -14,$$

因此这个方程组有唯一解。于是克莱姆法则给出

$$x=\frac{\begin{vmatrix}10 & -2\\ 11 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{vmatrix}}=\frac{-50+22}{-14}=2,\qquad \text{且}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 10\\ 3 & 11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{vmatrix}}=\frac{44-30}{-14}=-1.$$

练习3

使用克莱姆法则判断每个方程组是否有唯一解。

1. $\begin{cases}x-3y=0\\ x+3y=7\end{cases}$
2. $\begin{cases}3x-3y=0\\ \quad x-y=7\end{cases}$
3. $\begin{cases}2x-3y=0\\ \quad x+2=7\end{cases}$

2.2 3 个线性方程组成的方程组的一般解

事实上，对于3 个线性方程组成的方程组，也有对应的克莱姆法则。它的推导与前面类似，只不过这一次我们要么用高斯消元，要么对一般方程组进行较为繁琐的代入运算：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

为了方便起见，我们这里不具体进行这个推导。最终得到的法则如下。

适用于3×3 方程组的克莱姆法则

如果

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

有唯一解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

练习4

使用克莱姆法则判断下面这个方程组是否有唯一解。

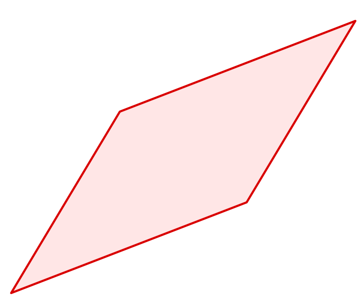
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 2y + 2z = 5, \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

3 行列式的几何意义

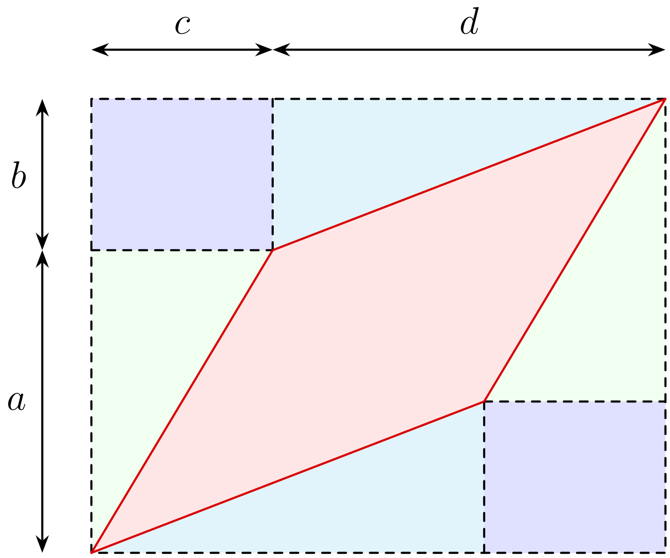
到目前为止，行列式还只是一个纯代数工具，我们从数字表中把它算出来，然后把它放进各种公式中作为代数上的便利。现在我们将看到，行列式远不止如此，它实际上有着清晰而深刻的几何意义。

3.1 行列式与面积

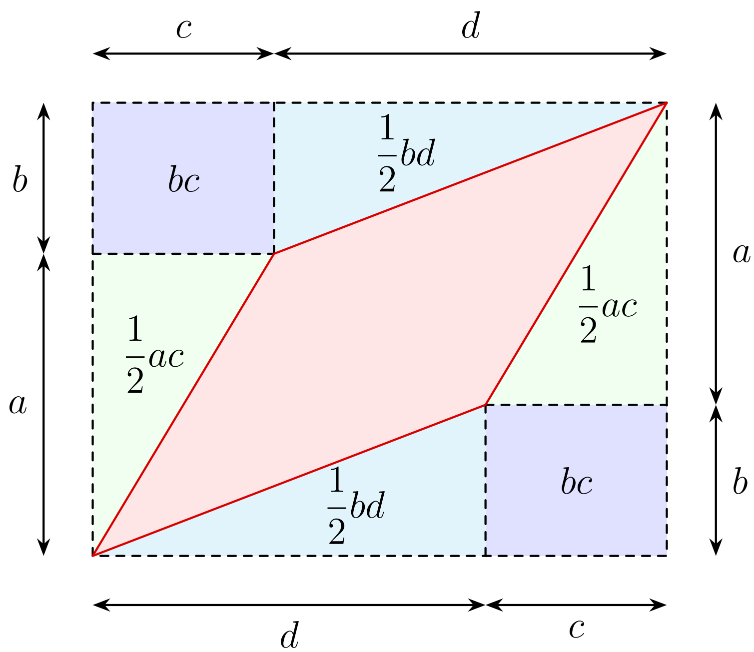
设我们有一个倾斜的平行四边形，大致如下：



我们该如何求这个图形的面积呢？通常，平行四边形的面积等于底乘高。然而在这里，由于这个平行四边形略微倾斜，用坐标x 和y 去精确描述这两条线段的长度并不容易。相反，一种更容易描述这个平行四边形面积的方法，是在它外面画一个矩形框，并把平行四边形的尺寸投影到这个框上：



现在，我们就可以通过先取整个矩形框的面积，再减去所有不属于平行四边形的部分，也就是两个蓝色矩形和周围四个三角形，来描述平行四边形的面积。另一方面，平行四边形的对边互相平行且长度相等，因此外框上对应的边长正如图中所示相匹配。于是我们可以用矩形和三角形的面积公式来描述这个外框中的各部分面积：



现在我们注意到，整个外框的面积等于$(a+b)(c+d)$。因此，这个平行四边形的面积为：

$$
\begin{aligned}
\text{面积} &= (a+b)(c+d) - 2\left(bc + \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}ac\right) \\
&= (a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac \\
&= ac + ad + bc + bd - 2bc - bd - ac \\
&= ad - bc.
\end{aligned}
$$

现在，一个非常惊人的事情发生了：我们刚刚得到了2×2 矩阵行列式的公式。更准确地说，我们刚刚证明了，一个平行四边形的面积由下式给出

$$
\pm \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm(ad - bc),
$$

其中a, b, c, d 就是上图中所标出的那些长度。换句话说，一般而言，2×2 矩阵的行列式给出了对应平行四边形的面积，差一个符号。

行列式作为面积

对于一个2×2 矩阵A，对应平行四边形的面积由$\pm \det(A)$ 给出，这里的$\pm$ 表示我们取正值。因此：

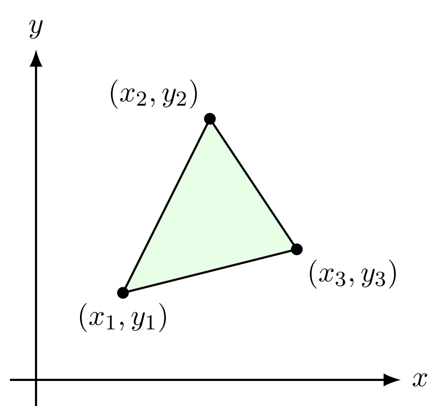
- $\det(A) \neq 0$ 表示这个图形的面积非零，
- $\det(A) = 0$ 表示这个图形已经塌缩，其面积为零。

3.2 三角形的面积

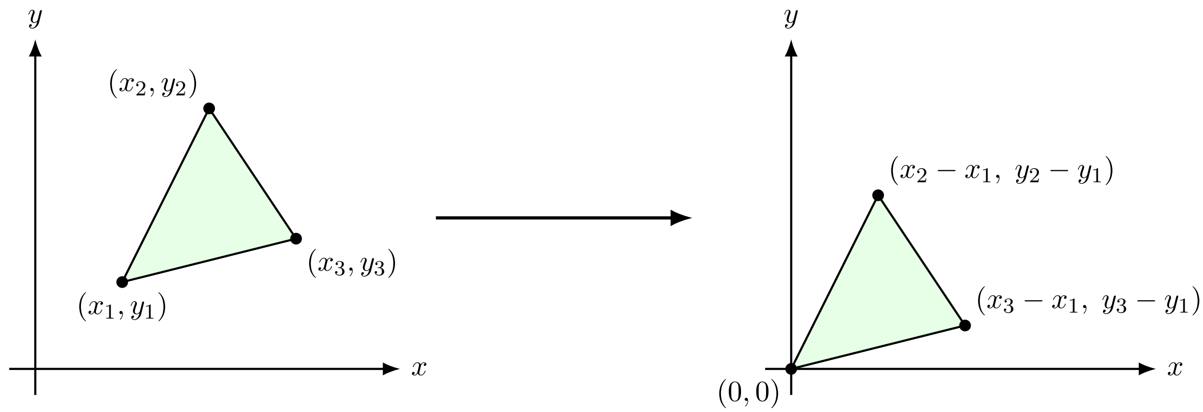
现在设在$2D$ 平面中有一个三角形，它的三个顶点为

$$
(x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2), \qquad (x_3, y_3).
$$

图形上，它可能是这样的：



我们可以先把这个三角形平移，使其中一个顶点落到原点上，然后来计算它的面积：



平移之后，剩下的两个顶点决定了一个平行四边形的两条边向量。因此，按照上一小节中的记号，我们可以取

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = x_3 - x_1, \qquad c = y_2 - y_1, \qquad d = y_3 - y_1.$$

于是，对应平行四边形的面积就是

$$\pm\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \pm\big((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\big).$$

把这个式子展开，得到：

$$\pm\big(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2\big).$$

那么三角形的面积就是这个量的一半。这个量还可以用一个3×3 行列式来表示：

$$\text{面积} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

我们也可以通过沿第一行展开这个行列式来验证这一点。这样做之后，就会回到前面的公式：

$$\text{面积} = \pm\frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2\big).$$

三角形的面积

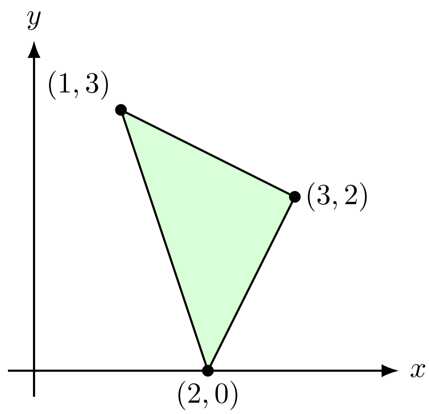
如果一个三角形的顶点是(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和(x_3, y_3)，那么这个三角形的面积由下式给出

$$\text{面积} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

这里的$\pm$ 只是表示我们取结果的正值。

练习5

求顶点为$(2,0)$、$(1,3)$ 和$(3,2)$ 的三角形的面积。



3.3 关于体积的简短说明

同样的故事在三维空间里继续成立。行列式不仅与平面中的面积有关，也与空间中的体积有关。具体来说，如果一个四面体的顶点为

$$(x_1,y_1,z_1),\quad (x_2,y_2,z_2),\quad (x_3,y_3,z_3),\quad (x_4,y_4,z_4),$$

那么它的体积由下式给出

$$\text{体积} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

我们暂时不会深入研究这个公式。现在最重要的是下面这个类比:

$$\text{二维中的行列式} \longleftrightarrow \text{面积}, \qquad \text{三维中的行列式} \longleftrightarrow \text{体积}.$$

练习解答

练习1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - (-3)(1) = 8 + 3 = 11.$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - (2)(2) = 4 - 4 = 0.$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (3)(2) = 5 - 6 = -1.$$

练习2

1.
$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&2\\3&1&2\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}$$
$$= 1(4-2) - 2(2-6) + 1(1-6)$$
$$= 2 + 8 - 5 = 5.$$

2.
$$\begin{vmatrix}4&0&1\\0&1&2\\0&0&4\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1&2\\0&4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0&2\\0&4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$$
$$= 4(4) - 0 + 1(0)$$
$$= 16.$$

3.
$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&a&2\\0&0&4\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}a&2\\0&4\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2&a\\0&0\end{vmatrix}$$
$$= 1(4a) - 3(8) + 1(0)$$
$$= 4a - 24 = 4(a-6).$$

练习3

1. 系数矩阵为
$$\begin{pmatrix}1&-3\\1&3\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}1&-3\\1&3\end{vmatrix} = 3-(-3) = 6.$$
由于行列式非零，所以这个方程组有唯一解。
2. 系数矩阵为
$$\begin{pmatrix}3&-3\\1&-1\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}3&-3\\1&-1\end{vmatrix} = -3-(-3) = 0.$$
因此这个方程组没有唯一解。
3. 把第二个方程改写为$x + 0y = 5$。那么系数矩阵为
$$\begin{pmatrix}2&-3\\1&0\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}2&-3\\1&0\end{vmatrix} = 0-(-3) = 3.$$
由于行列式非零，所以这个方程组有唯一解。

练习4

系数矩阵为
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&-1&1\end{vmatrix}.$$

沿第一行展开可得

$$
\begin{aligned}
D &= 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1(2\cdot 1 - 2(-1)) - 1(2\cdot 1 - 2\cdot 1) + 1(2(-1) - 2\cdot 1) \\
&= 4 - 0 - 4 = 0.
\end{aligned}
$$

由于系数矩阵的行列式为零，所以这个方程组没有唯一解。

练习5

使用

$$
\text{面积} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.
$$

沿第一行展开：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2(3\cdot 1 - 1\cdot 2) + 1(1\cdot 2 - 3\cdot 3) \\
&= 2(1) + (-7) = -5.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\text{面积} = \pm\frac{1}{2}(-5) = \frac{5}{2}.
$$