MAT140 — 第15講ハンドアウト
行列式

前回の講義では、ガウス消去法を使ってより大きな連立一次方程式を解く方法を学びました。基本戦略は単純で、難しい系に行基本変形を施してより簡単な系にし、それを後退代入で解く、というものでした。また、ガウス消去法を行うときに本当に重要なのは係数だけであり、したがってそれらの数だけを書いたより簡潔な記法でも同じことができる、ということも見ました。そこから、行列が単なる実数の配列として導入されました。

この講義では、行列の話を続けて、行列式という特別な操作を導入します。一見すると、行列式は正方行列に付随する代数的な公式に見えます。しかし実はそれは幾何学的意味をもち、面積や体積のような量を符号付きで表します。これは線形代数に潜むより深い構造を垣間見る最初の場面の1つです。

今日は次のことを扱います。

1. 2×2 行列の行列式を定義し、いくつか例を計算する。
2. 余因子展開を使って3×3 行列の行列式を計算する。
3. クラメルの公式を使って、2×2 の連立方程式が一意な解をもつかどうかを判定する。
4. 行列式を面積として幾何学的に解釈し、それを使って三角形の面積を求める。

1　行列式とは何か

これまでのところ、行列は主として連立一次方程式を解くときに係数を整理するための便利な記法でした。行列式は、正方行列から*1*つの数を取り出す最初の例です。この数は驚くほど多くの情報を含み、しかも美しい幾何学的意味をもっています。

重要な制限

行列式が定義されるのは**正方行列**、すなわち行数と列数が同じ行列に対してだけである。

1.1　2×2 行列の行列式

もし

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ならば、A の行列式は

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

と定義されます。

2 × 2 行列の行列式

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$\det(A) = ad - bc.$$

言葉で言えば、一方の対角線の積から、もう一方の対角線の積を引いたものである。

これは覚えやすい言い方ですが、順序が大事です。行列式は2つの対角線の積の和ではなく、その差です。

1.2　2つの簡単な例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3) - (2)(1) = 9 - 2 = 7.$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (7)(1) - (3)(0) = 7 - 0 = 7.$$

Exercise 1

各行列の行列式を求めなさい。

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.3　3 × 3 行列の行列式

2 × 2 の行列式は非常に簡単です。しかし3 × 3 の場合は公式が少し複雑になるので、問題をより小さい部分に分けて考えます。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とします。第1行に沿って展開するには、選んだ成分を含む行と列を削除し、残った2 × 2 行列の行列式を計算します。こうしてできる小さな行列式を小行列式と呼びます。符号のパターンは

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

です。

したがって、第1行に沿う展開は

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

行または列に沿った3 × 3 行列式の展開

3×3 行列式を計算するには：

1. 行または列を1つ選ぶ。
2. チェッカーボード状の符号パターン$+,-,+\ /\ -,+,-\ /\ +,-,+$ を使う。
3. 選んだ各成分について、その行と列を削除して2×2 の小行列式を作る。
4. 各成分に、その小行列式の行列式を掛け、正しい符号を付けて足し合わせる。

例として、次の行列式を計算します。

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

これを第1行に沿って展開すると、3つの2×2 行列ができます。

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad -4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad +2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

あとはこれらの小行列式を計算すればよく、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(3\cdot 1 - 2\cdot 0) - 4(3\cdot 1 - 2\cdot 2) + 2(3\cdot 0 - 3\cdot 2) \\ &= 1(3) - 4(-1) + 2(-6) \\ &= 3 + 4 - 12 = -5. \end{aligned}$$

もう1つ例を見ましょう。次の行列式を計算します。

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

第1行に沿う展開の図式は次のようになります。

$$\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}0 & 2\\7 & 4\end{vmatrix}\qquad 0\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}\qquad +1\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 7\end{vmatrix}$$

これも小行列式を計算すればよく、

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\3 & 7 & 4\end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix}0 & 2\\7 & 4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 7\end{vmatrix}\\ &= 4(0\cdot 4 - 2\cdot 7) - 0(1\cdot 4 - 2\cdot 3) + 1(1\cdot 7 - 0\cdot 3)\\ &= 4(-14) - 0 + 7 = -49.\end{aligned}$$

Exercise 2

各行列式を計算しなさい。

1. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\2 & a & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$

2　クラメルの公式

ここで、連立方程式に戻ります。これまで、グラフ・代入法・消去法・行基本変形によって系を解いてきました。今度は、行列式がこれらの方程式を解くための道具になることを示します。まず、もっとも単純な2 本の方程式と2 個の未知数からなる場合から始めます。

2.1　2 元1次連立方程式の一般解

一般の系

$$\begin{cases}a_1x + b_1y = c_1,\\ a_2x + b_2y = c_2.\end{cases}$$

を考えます。ここでa_i, b_i, c_i は実数であり、この導出では便宜上$b_2 \neq 0$ と仮定します。

この系は代入法で一般的に解けます。まず1本の式をy について解き、それをもう一方に代入します。ここでは2本目をy について解くことにします。

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

これを1本目に代入すると、

$$a_1x + b_1\left(-\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}\right) = c_1,$$

$$a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x + \frac{b_1c_2}{b_2} = c_1.$$

ここでx を含む項を左辺に、定数を右辺にまとめると

$$a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x + \frac{b_1c_2}{b_2} = c_1 \quad \Rightarrow \quad a_1x - \frac{a_2b_1}{b_2}x = c_1 - \frac{b_1c_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_2}x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{b_2}.$$

したがって

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

同様に、今度はx について解く対称的な議論から

$$y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1}$$

が得られます。ここで

$$b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1), \quad c_1a_2 - a_1c_2 = -(c_2a_1 - a_2c_1),$$

なので

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

と書き直せます。

したがって、

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

であれば、この一般の系の一意な解は

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad \text{および} \qquad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

となります。

これらの式は、2×2 行列の行列式の形によく似ています。実際、その通りで、上の2つは

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}, \qquad \text{および} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}.$$

と書けます。

これが、2 元1次連立方程式に対するクラメルの公式です。

2×2 系に対するクラメルの公式

もし

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば、連立方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

は一意な解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

をもつ。

重要なのは、係数行列の行列式が0 でないことを仮定しなければならない、ということです。さもないと一般解の分母が0 になってしまいます。これはかなり重要な観察です。

解の一意性

2×2 の連立方程式では、係数行列の行列式が**非零**であることと、その系が**一意な解**をもつことは同値である。

ただし、係数行列の行列式が0 であることは、その系に解が**ない**ことを意味するわけではありません。それはただ、その系が一意な解をもたないことを意味するだけです。その場合、解がないか、あるいは無数にあるかのどちらかです。たとえば

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

を考えます。この2本は同じ直線を表しているので、この系には無数に解があります。しかし係数行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2) - (1 \cdot 2) = 0.$$

です。

クラメルの公式の具体例として、次の系を考えます。

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ 3x - 5y = 11. \end{cases}$$

この係数行列は

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

であり、その行列式は

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (4)(-5) - (-2)(3) = -20 - (-6) = -14,$$

となって0 ではないので、この系は一意な解をもちます。クラメルの公式より

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-50+22}{-14} = 2, \qquad \text{および} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{44-30}{-14} = -1.$$

Exercise 3

クラメルの公式を使って、各連立方程式が一意な解をもつかどうかを判定しなさい。

1. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x - y = 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 2 = 7 \end{cases}$

2.2 3 元1次連立方程式の一般解

実は、3 元1次連立方程式に対してもクラメルの公式があります。導出は先ほどと似ていますが、今度は一般の系

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

に対して、ガウス消去法やかなり複雑な代入を行う必要があります。ここではその導出までは行わず、結果だけを述べます。

3 × 3 系に対するクラメルの公式

もし

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば、連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

は一意な解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

をもつ。

Exercise 4

クラメルの公式を使って、次の連立方程式が一意な解をもつかどうかを判定しなさい。

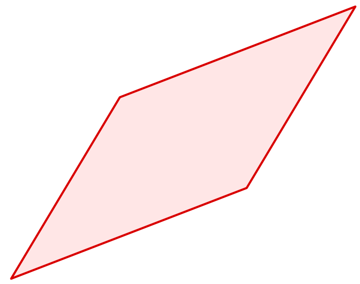
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 2y + 2z = 5, \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

3　行列式の幾何学的意味

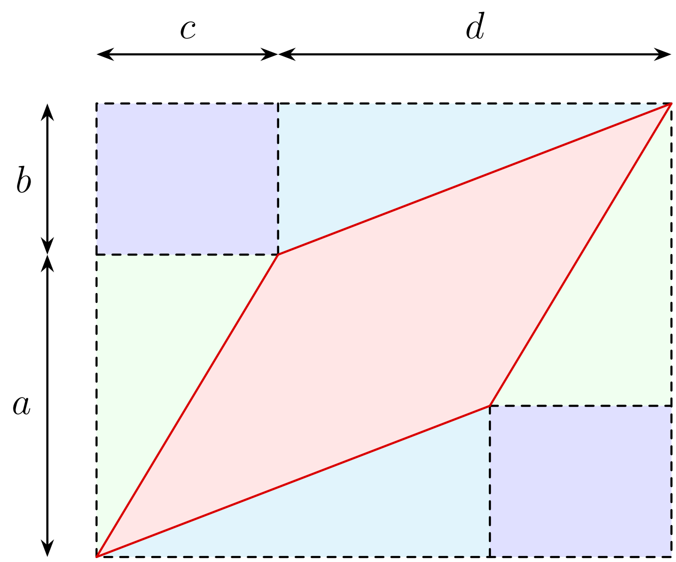
ここまでは、行列式は純粋に代数的な道具として現れていました。数の配列から計算し、その結果を代数公式の中で用いてきただけです。しかし行列式はそれ以上のものであり、はっきりした深い幾何学的意味をもっています。

3.1　行列式と面積

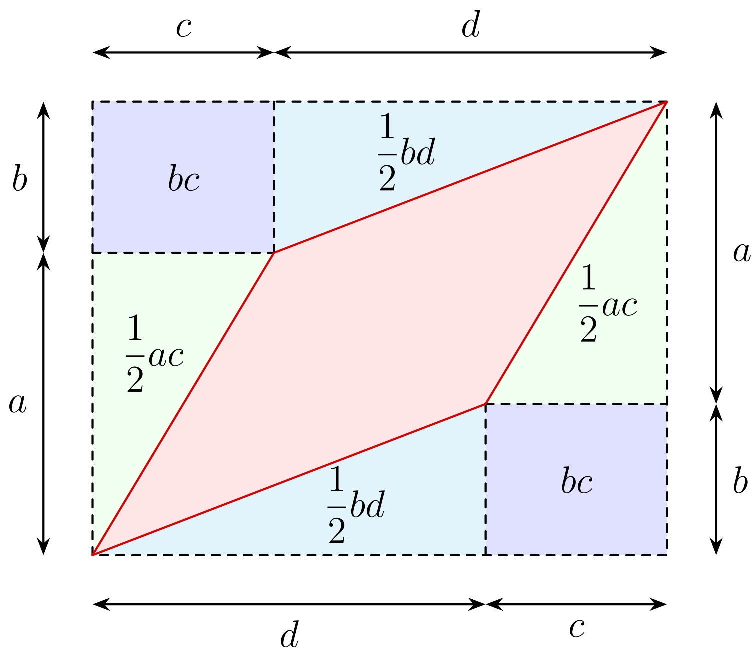
少し傾いた平行四辺形を考えます。たとえば次のような図形です。



この図形の面積はどう求めればよいでしょうか。通常、平行四辺形の面積は底辺×高さで求めます。しかしこの図では少し傾いているため、そのまま底辺や高さをx, y 座標で表すのはかえって面倒です。そこで、周囲に長方形を作り、その中に投影して考える方が簡単です。



すると、平行四辺形の面積は、外側の長方形全体の面積から、その外にある部分、つまり2つの青い長方形と4つの周囲の三角形の面積を引けば求められます。また、平行四辺形の向かい合う辺は平行で長さも等しいので、外側の長方形上の対応する長さも図のようになります。これにより、それぞれの部分の面積は長方形や三角形の公式で表せます。



外側の長方形全体の面積は$(a+b)(c+d)$ です。したがって平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned} Area &= (a+b)(c+d) - 2\left(bc + \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}ac\right) \\ &= (a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac \\ &= ac + ad + bc + bd - 2bc - bd - ac \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

となります。

ここで驚くべきことが起きています。私たちはちょうど2×2 行列の行列式の公式を得ました。つまり、この図のa, b, c, d を用いると、平行四辺形の面積は

$$\pm\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm(ad - bc),$$

で与えられます。ここで$\pm$ は最終的に正の値をとるという意味です。言い換えると、一般に2×2 行列の行列式は、対応する平行四辺形の面積を符号付きで表しています。

面積としての行列式

2×2 行列A に対して、対応する平行四辺形の面積は$\pm\det(A)$ で与えられる。ここで$\pm$ は最終的に正の値を選ぶことを意味する。
したがって：

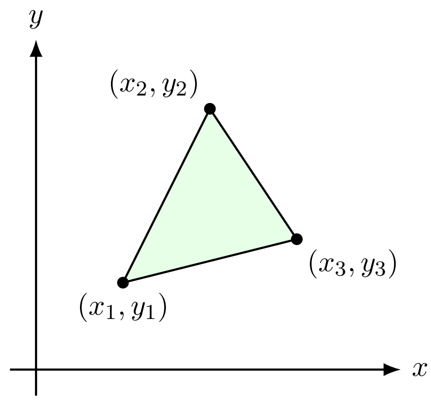
- $\det(A) \neq 0$ なら、その図形は0 でない面積をもつ。
- $\det(A) = 0$ なら、その図形はつぶれて面積が0 である。

3.2 三角形の面積

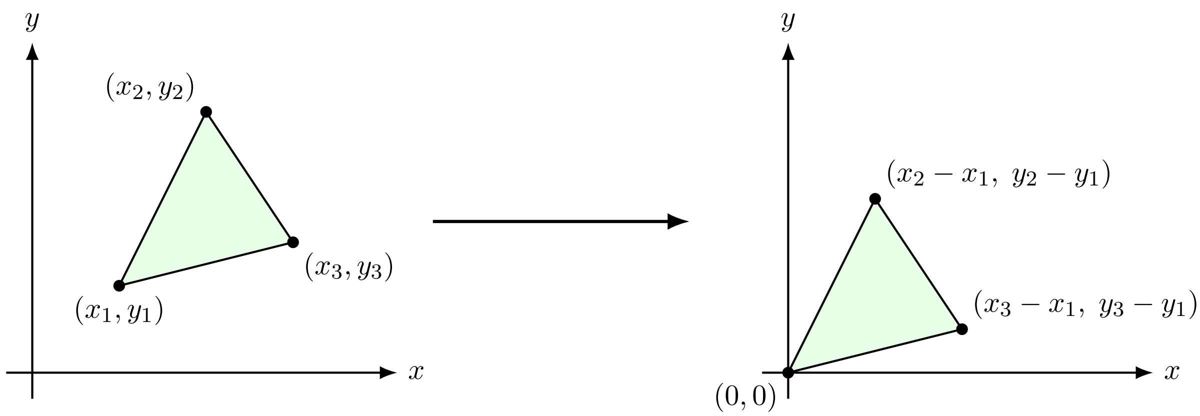
今度は、平面内に頂点

$$(x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2), \qquad (x_3, y_3)$$

をもつ三角形を考えます。図で描くとたとえば次のようになります。



この三角形の面積を求めるには、まず1つの頂点が原点に来るように平行移動すると便利です。



この平行移動のあと、残る2つの頂点は平行四辺形の2本の辺ベクトルを決めます。したがって、前節の記号を使うと

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = x_3 - x_1, \qquad c = y_2 - y_1, \qquad d = y_3 - y_1.$$

とおけます。対応する平行四辺形の面積は

$$\pm \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \pm\big((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\big).$$

です。これを展開すると

$$\pm\big(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2\big)$$

となります。三角形の面積はこの半分なので、

$$\text{Area} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

とも書けます。

実際、この3×3 行列式を第1行に沿って展開すれば、先ほどの式がそのまま出てきます：

$$\text{Area} = \pm\frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2\big).$$

三角形の面積

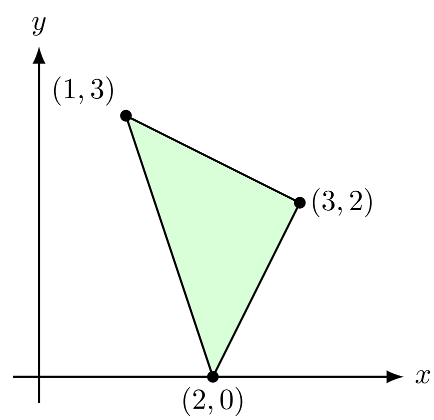
三角形の頂点が(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) であるとき、その面積は

$$\text{Area} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

で与えられる。ここで$\pm$ は、最終的に正の値を選ぶという意味である。

Exercise 5

頂点$(2, 0)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$ をもつ三角形の面積を求めなさい。



3.3 体積についての短い補足

同じ話は3次元でも続きます。行列式は平面の面積だけでなく、空間の体積とも結びついています。特に、四面体の頂点が

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3), \quad (x_4, y_4, z_4)$$

であるとき、その体積は

$$\text{Volume} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

で与えられます。この公式はまだ深くは扱いません。今は、次の対応関係だけ覚えておけば十分です。

$$2\text{次元の行列式} \longleftrightarrow \text{面積}, \qquad 3\text{次元の行列式} \longleftrightarrow \text{体積}.$$

練習問題の解答

Exercise 1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - (-3)(1) = 8 + 3 = 11.$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - (2)(2) = 4 - 4 = 0.$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (3)(2) = 5 - 6 = -1.$$

Exercise 2

1.
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1(4-2) - 2(2-6) + 1(1-6) \\
&= 2 + 8 - 5 = 5.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4(4) - 0 + 1(0) \\
&= 16.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1(4a) - 3(8) + 1(0) \\
&= 4a - 24 = 4(a-6).
\end{aligned}$$

Exercise 3

1. 係数行列は
$$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3-(-3) = 6.$$
行列式は0 でないので、この系は一意な解をもつ。
2. 係数行列は
$$\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -3-(-3) = 0.$$
よってこの系は一意な解をもたない。
3. 2本目を$x+0y=5$ と書き直す。すると係数行列は
$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \det = \begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0-(-3) = 3.$$
行列式は0 でないので、この系は一意な解をもつ。

Exercise 4

係数行列は
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$
第1行に沿って展開すると
$$\begin{aligned}D &= 1\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ &= 1(2\cdot 1-2(-1)) - 1(2\cdot 1 - 2\cdot 1) + 1(2(-1)-2\cdot 1)\\ &= 4-0-4 = 0.\end{aligned}$$
係数行列の行列式が0 なので、この系は一意な解をもたない。

Exercise 5

$$\text{Area} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$
第1行に沿って展開すると
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ &= 2(3\cdot 1 - 1\cdot 2) + 1(1\cdot 2 - 3\cdot 3)\\ &= 2(1) + (-7) = -5.\end{aligned}$$

したがって
$$\text{Area} = \pm\frac{1}{2}(-5) = \frac{5}{2}.$$