MAT140 — 第16講ハンドアウト
線形代数学

前回の講義では、行列と行列式を導入しました。行列は、もともと連立一次方程式の係数を整理するための便利な記法として現れ、行列式はその正方行列から1つの数を取り出す方法として導入されました。また、行列式が単なる「覚えるべき代数公式」ではなく、面積のような幾何学量を表すことも見ました。

この講義では、ここ3回でやってきた連立一次方程式の議論をひとまず振り返り、全体像を見ます。実のところ、この3回のあいだ私たちはずっと線形代数という分野に触れてきました。線形代数は、ベクトル、ベクトル空間、行列、線形変換、連立一次方程式などを扱う学問です。今日は、その話を本格的に導入する最初の一歩として、これまで見てきたものを線形代数的な物語として結び直します。一般に、私たちはその背後にある幾何学的な筋書きに重点を置きます。

今日は次のことを扱います。

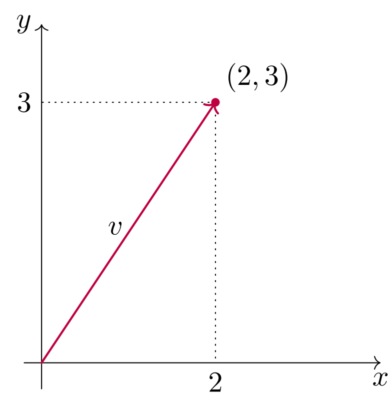
1. ベクトルという新しい対象を定義し、その計算方法を説明する。
2. 張る空間と線形結合を説明し、標準基底ベクトルを導入する。
3. 行列の加法と乗法を定義し、なぜ行列の掛け算が少し変わっているのかを説明する。
4. 線形変換を導入し、すべてのそのような変換が行列によって表されることを示す。
5. 行列式を面積の拡大率として再解釈し、行列を連立方程式の解集合と結びつける。

この講義は補足的な性格をもつものだと思ってください。これらの話題を深く掘り下げるのではなく、アイデアを紹介し、これまでの直感とつなぐことが目的です。より専門的な分野に進みたい学生にとっては、ここで紹介する考え方は後に本格的に学ぶべき内容への健全な入口になります。逆に、これ以上深い数学を学ぶ予定のない学生にとっては、この講義はコース全体の数学的な頂点、ここ数回登ってきた山の頂上のようなものだと考えてよいでしょう。もちろん、この2つの見方は両立します。

1 ベクトル

1.1 ベクトルとは何か

ベクトルとは、大きさと向きをもつ数学的対象です。2次元平面では、ふつう原点を始点とする矢印として表します。この小さな矢印の先端はどこかの点に必ず着地するので、点とベクトルは自然に対応していると考えられます。たとえば、点$(2,3)$ は、$(0,0)$ から$(2,3)$ へ向かう矢印としてベクトルv を定めます。



つまり、ベクトルv は原点から始まって点$(2,3)$ に至る一意な矢印です。情報としては「$x = 2$」「$y = 3$」の2つがわかれば十分なので、ベクトルをこの2つの数で表すのが自然です。今後の便宜のため、ベクトルは横ではなく縦に書きます。この例では

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

と書きます。

点とベクトルの対応

2次元では、点とベクトルのあいだに自然な対応がある。点(x, y) は

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

というベクトルに対応する。ここでv は、原点から点(x, y) に向かう矢印として解釈できる。

ベクトル空間とは、ベクトルの集まりであって、そこで次の2つの基本操作が意味をもつものです。

1. ベクトルどうしを足せること。
2. ベクトルを実数倍できること。この実数はスカラーと呼ばれる。

この講義では主に、実数でスカラー倍する2次元および3次元のベクトルに集中します。数学的には、これらは$\mathbb{R}^2$ と$\mathbb{R}^3$ に対応するベクトル空間です。以下では、加法とスカラー倍がどのようなものかを見ていきます。

1.2 ベクトルの計算

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

という2つのベクトルがあるとき、その和は成分ごとに足して

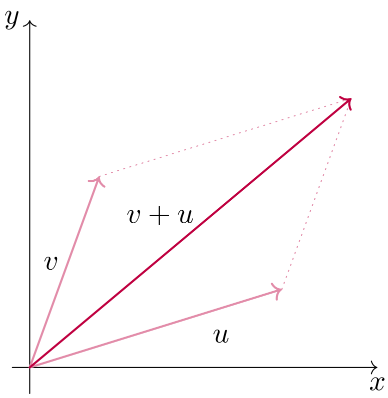
$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

と定義します。同様に、a を実数とするとスカラー倍は

$$au = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \end{pmatrix}.$$

です。

幾何学的には、ベクトルの加法は矢印を先端につなげることに対応します。そうすると平行四辺形ができ、その対角線がベクトルの和になります。

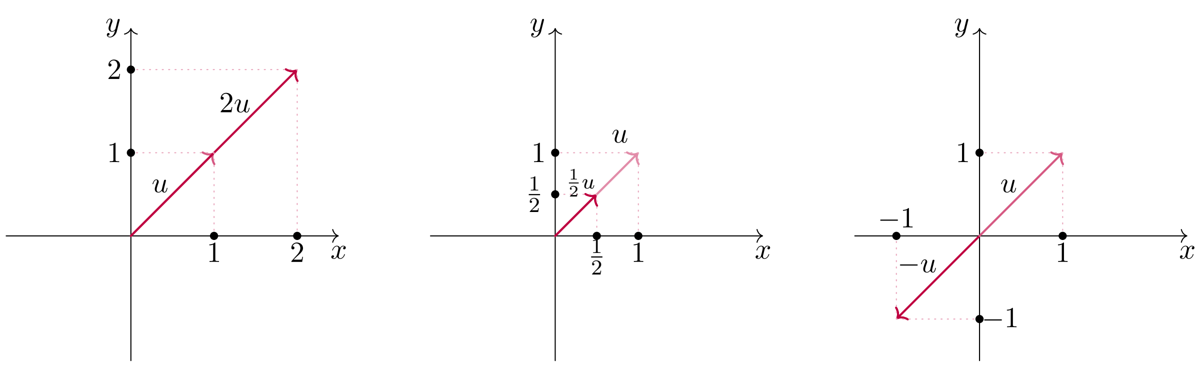


図からわかるように、u をv の先につないでも、v をu の先につないでも、平行四辺形の反対側の同じ頂点に到達します。したがってベクトルの加法は可換、すなわち$v+u=u+v$ です。

スカラー倍は、ベクトルを伸ばしたり縮めたり、向きを反転させたりする操作です。たとえば

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、$2u$, $\frac{1}{2}u$, $-u$ は次のようになります。



見ての通り、2 倍すると長さが2倍になり、$\frac{1}{2}$ 倍すると長さが半分になり、-1 倍すると長さは同じで向きだけが反転します。

では加法の例を1つ見ましょう。

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

このとき$u+v$, $v-u$, $3u-v$ は成分ごとに計算して

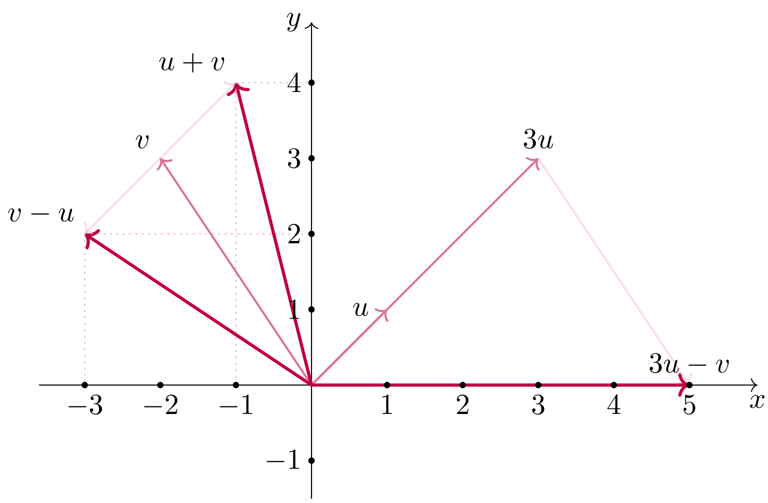
$$u+v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},$$

$$v-u=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix},$$

$$3u-v=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}.$$

となります。

図で表すと次のようになります。



1.3 ベクトルの基本性質

ベクトルの計算規則は、ベクトル空間の形式的な定義の中にまとめられます。ここでは抽象論には深入りしませんが、次の性質は覚えておく価値があります。

ベクトルの基本性質

ベクトルu, v, w とスカラーa, b に対して、次が成り立つ：

1. 零ベクトル0 が存在する。
2. 加法は可換：$u+v=v+u$。
3. 加法は結合的：$(u+v)+w=u+(v+w)$。
4. 加法逆元がある：$u+(-u)=0$。
5. 分配法則：$a(u+v)=au+av$。
6. 分配法則：$(a+b)u=au+bu$。
7. スカラー倍は結合的：$(ab)u=a(bu)$。
8. スカラーの単位元：$1u=u$。

もちろん、これらは幾何学的にも確認できます。たとえば、2つのベクトルを足すと平行四辺形の対角線になる、という話から、足す順番を入れ替えても同じ頂点に行くことがわかります。

したがって$u+v=v+u$ です。代数的には、ベクトルの加法は成分ごとの実数の加法であることから、

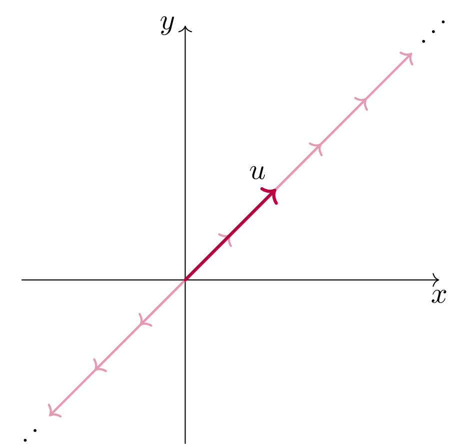
$$u+v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\begin{pmatrix}v_1+u_1\\v_2+u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=v+u,$$

となります。ここで(*) では、実数の加法が可換であることを使っています。

1.4 張る空間と線形結合

v を零でないベクトルとすると、そのすべてのスカラー倍は原点を通る1本の直線を作ります。この集合をv の張る空間といいます。

$$\mathrm{span}(v)=\{v\text{ のすべてのスカラー倍}\}.$$



より一般に、2つのベクトルu とv に対して、

$$au+bv$$

の形のベクトルを線形結合といいます。そうしたもの全体の集合は

$$\mathrm{span}(u,v)=\{au+bv:a,b\in\mathbb{R}\}.$$

です。

もしu とv が互いにスカラー倍であるなら、$\mathrm{span}(u,v)$ はやはり1本の直線にすぎません。しかし、本当に異なる向きを向いていれば、それらの張る空間は平面全体になります。

張る空間

$\mathbb{R}^2$ において、零でない1本のベクトルが張る空間は原点を通る1本の直線である。互いに平行でない2本のベクトルが張る空間は平面全体である。

1.5　基底ベクトルと座標

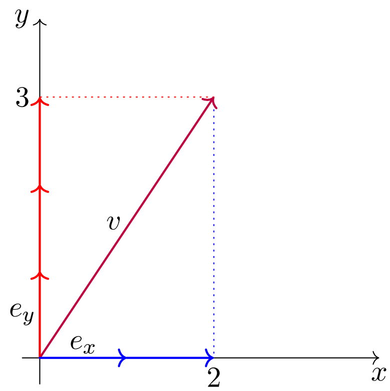
平面では、特に重要な2本のベクトル

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

があります。これらを標準基底ベクトルといいます。実際、$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルはこの2本の線形結合で書けます。たとえば

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_x + 3e_y.$$

図で見ると、これは点を座標平面上に表す操作とほとんど同じです。



この2本の特別なベクトルを使うと、任意のベクトルの成分は次のように解釈できます。

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

x 方向への移動量（左右）

y 方向への移動量（上下）

Exercise 1

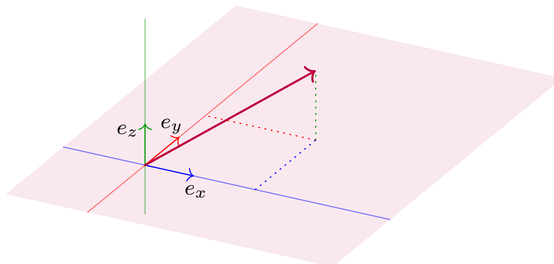
$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

として、次を計算しなさい。

1. $u + v$
2. $2u$
3. $3u - v$

1.6　高次元を理解する

2本のベクトルe_x, e_y があれば、2次元の平面を作れます。ここで、その平面から垂直に長さ1 の新しいベクトルを1本付け加えることを想像してみましょう。



この新しいベクトルをe_z と書きます。図からわかるように、この新しいベクトルの張る方向は、e_x とe_y の両方に対して垂直です。つまり、e_z はベクトルが向かえるもう1つの次元を与えています。このとき、e_x とe_y が張る2次元平面は、z 方向成分が0 である特別な場合だと理解できます。一般には、e_z をどれだけ含めるかを変えることで、この平面を3次元の中で上下に動かせます。この追加情報を記録するために、3次元ベクトルは2つではなく3つの数で書きます。標準基底ベクトルは

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

であり、任意のベクトル

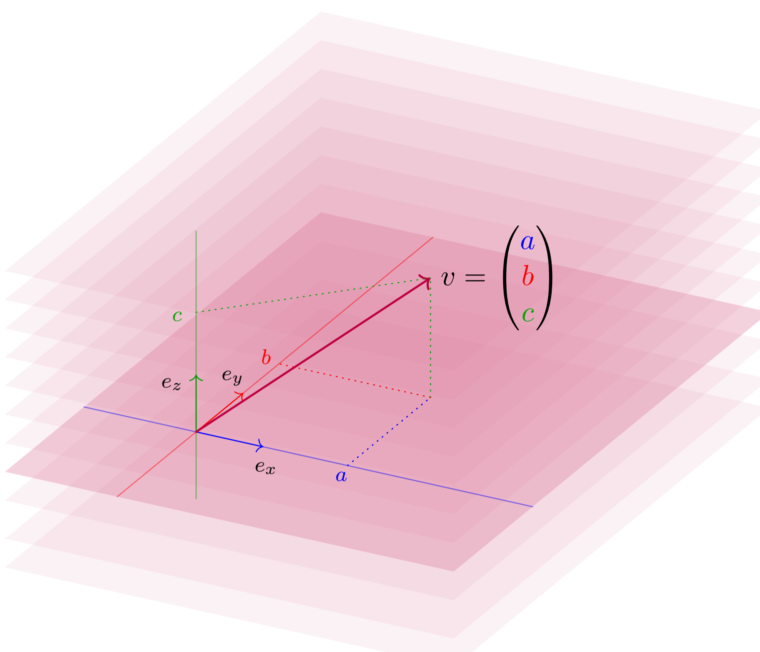
$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

は

$$v = ae_x + be_y + ce_z.$$

と書けます。

ある意味で、3次元空間はspan(e_x, e_y) のコピーが無数に積み重なったものだと考えられます。



直線が無数の点の連続的な積み重なりでできているのと同じように、3次元空間も、2次元平面が無数に連続的に積み重なったものとして理解できます。

もちろん、この考え方はさらに高次元にも続きますが、幾何学的直感はすぐに難しくなります。そのため、高次元では代数的な記述に頼ることになります。n 次元のベクトルは一般に

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

という形をしており、標準基底ベクトルは

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

です。これらはn 本の互いに垂直な基底ベクトルです。このn 次元ベクトル空間を$\mathbb{R}^n$ と書きます。

Exercise 2

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を$ae_x + be_y$ の形で書きなさい。
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ を$ae_x + be_y + ce_z$ の形で書きなさい。
3. $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ を幾何学的に説明しなさい。

2　行列

これまで見てきたように、行列とは実数を長方形状に並べたものです。行がm、列がn のとき、その行列を$m \times n$ 行列、あるいはサイズが$m \times n$ の行列といいます。

ここでは、行列にも独自の「計算」があることを示します。

2.1　行列の加法

同じサイズの2つの行列は、対応する成分どうしを足すことで加えられます。2×2 行列なら

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

たとえば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

です。これを段階的に書くと次のようになります。

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 2+2\\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 2+2\\ 3+2 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 2+2\\ 3+2 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

強調しておくと、行列の加法ができるのは2つの行列のサイズが同じときだけです。そうでないと対応する成分が「並ばず」、足す相手がありません。

2.2 行列の乗法

条件が合えば、2つの行列を掛けることもできます。しかし、行列の掛け算は加法とは違って、成分どうしを単純に掛けるわけではありません。少し微妙な操作です。2×2 行列については

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}.$$

となります。つまり、左側の行列の行と、右側の行列の列を組み合わせて計算します。たとえば左上の成分は、左の行列の上の行と、右の行列の左の列から作られます。行と列を掛けるときには、対応の順序を正しく守る必要があります。

例として

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1\\ 3\cdot 0+3\cdot 2 & 3\cdot 2+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 6 & 9\end{pmatrix}.$$

これを段階的に表すと次のようになります。

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1\\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1\\ 3\cdot 0+3\cdot 2 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 6 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1\\ 3\cdot 0+3\cdot 2 & 3\cdot 2+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 6 & 9\end{pmatrix}$$

行列の加法と違って、乗法はサイズの異なる行列どうしでもできることがあります。必要なのは、左の行列の列数と右の行列の行数が一致していることだけです。

行列の掛け算のサイズ条件

$m \times n$ 行列は、$n \times \ell$ 行列と掛けることができ、その結果は$m \times \ell$ 行列になる。

2.3　零行列と単位行列

数に0 や1 があるように、行列にも特別な役割をもつ行列があります。2×2 行列の場合、零行列は

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

であり、任意の2×2 行列A に対して$A + 0 = A$ を満たします。また、サイズ2×2 の乗法単位元は

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

であり、

$$AI = IA = A$$

を満たします。

2.4　行列の計算の性質

このコースを通じて、私たちはいくつかの種類の「計算」を見てきました。最初の方では実数の計算を扱い、そのずっと後に多項式の計算を扱いました。多項式については、それらが整数$\mathbb{Z}$によく似ている、という語り方をしました。つまり、多項式は数そのものではないけれど、数と「韻を踏んでいる」と言えるのです。

しかし行列は、多項式のように数と「韻を踏む」わけではありません。まず、そもそもどんな2つの行列でも足したり掛けたりできるわけではなく、サイズに特定の条件が必要です。さらに、たとえ2×2 正方行列だけに限ったとしても、行列の計算には数にはない奇妙な振る舞いがあります。

行列の計算の少し変わった性質

行列A, B に対して：

1. 掛け算は一般に可換ではない。したがって$AB \neq BA$ のことがある。
2. すべての行列が乗法逆元をもつわけではない。つまり、ある行列A について$AA^{-1} = I$ を満たすA^{-1} が存在しないことがある。

行列の掛け算が一般に可換でないことを見るために、次の2×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えます。すると

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

となって$AB \neq BA$ です。

Exercise 3

次を計算しなさい。

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

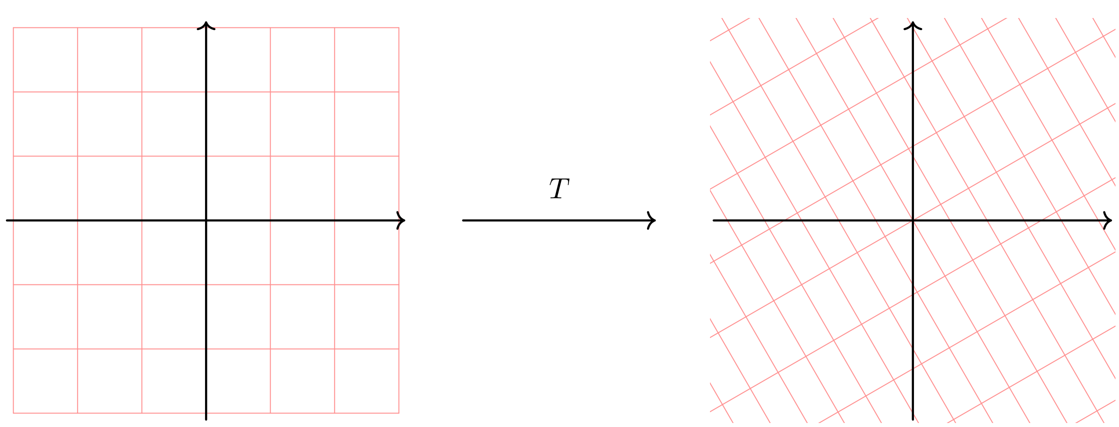
Exercise 4

1. 2×3 行列と3×4 行列の積は定義されるか。定義されるなら結果のサイズは何か。
2. 2×3 行列と2×2 行列の積は定義されるか。
3. 単位行列は、掛けられた他の行列に何をするかを言葉で説明しなさい。

3 線形変換

3.1 幾何学的な考え方

線形変換とは、ベクトルを入力として受け取り、ベクトルを出力する関数です。幾何学的には、空間の「まっすぐさ」を保つ写像です。直線は直線のまま移り、座標平面の方眼は別のまっすぐな方眼に移り、原点は原点に固定されます。たとえば、次の図は線形変換を表しています。

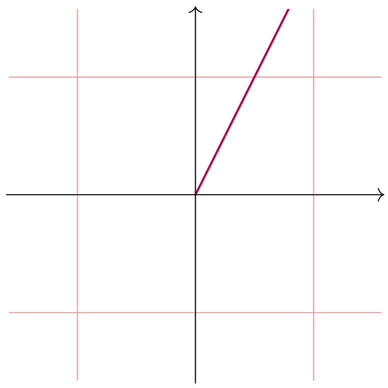


典型例としては

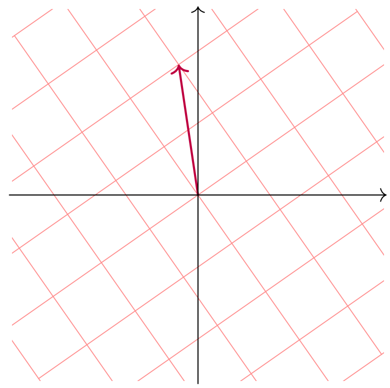
- 拡大・縮小、
- 回転、
- 反射、
- 射影、
- せん断

があります。

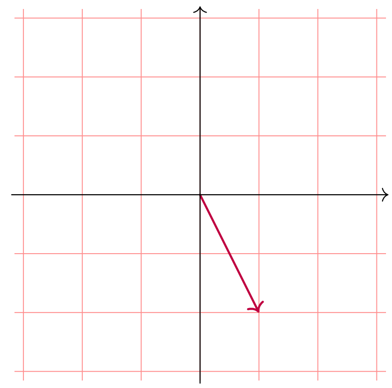
直線を曲線に曲げてしまう写像は線形ではありません。



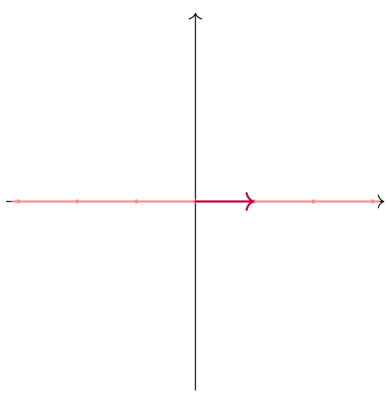
(i) 2倍の拡大



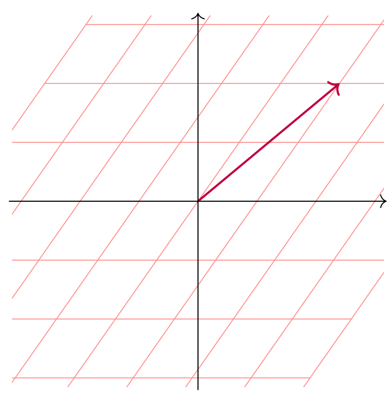
(ii) 回転



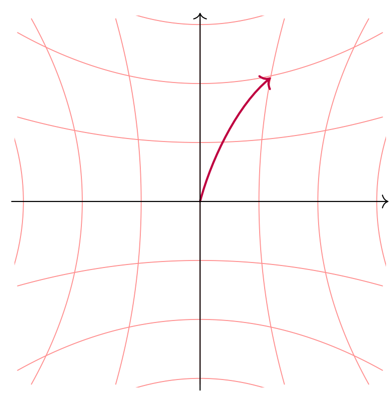
(iii) x 軸に関する反射



(iv) x 軸への射影



(v) せん断



(vi) 非線形変換の例

3.2　形式的定義

ここでは、平面内のベクトルを平面内のベクトルへ写す変換、すなわち$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の写像に集中します。変換T が線形であるとは、ベクトルの加法とスカラー倍を保つこと、すなわち

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \qquad T(av) = aT(v).$$

を満たすことです。

線形変換の定義

ベクトル空間のあいだの関数T が線形であるとは、任意のベクトルu, v と任意のスカラーa に対して

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad \text{かつ} \qquad T(av) = aT(v)$$

が成り立つことである。

この2つの規則こそが、線形変換が平面の方眼構造を保つ代数的理由です。

3.3 線形変換と行列

$\mathbb{R}^2$ における非常に便利な事実は、線形変換は標準基底ベクトル

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に何をするかがわかれば完全に決まる、ということです。

実際、任意のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_x + ye_y$$

と書けるので、線形性を使うと

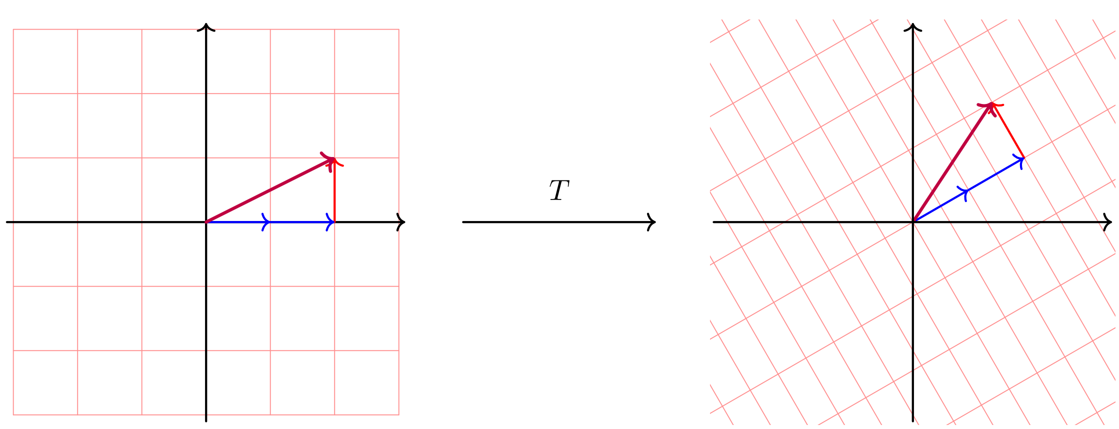
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(xe_x + ye_y) = xT(e_x) + yT(e_y).$$

となります。幾何学的には、線形変換は座標の方眼を別の方眼へ移します。移った先でも格子線は直線なので、そこでもスカラー倍と加法によって移動できます。基底ベクトルe_x とe_y は、それぞれ$T(e_x), T(e_y)$ に移り、それらを使って新しい方眼の中を「歩く」ことで、他の任意のベクトル$T(v)$ の位置を決められるのです。

たとえば

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

があるとき、その像$T(v)$ を知りたければ、変換後の格子の上で、変換されたe_x 方向へ2回、変換されたe_y 方向へ1回進めばよいのです。その終点が$T(v)$ です。



一般に、線形変換T が標準基底ベクトルを

$$T(e_x) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad T(e_y) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

に移すとします。ここでa, b, c, d は実数です。任意のベクトル

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_x + ye_y$$

に対して、

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(xe_x + ye_y\right) = xT(e_x) + yT(e_y) = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

ここで重要な観察があります。ベクトルv を2×1 行列とみなすと、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix},$$

であり、これはちょうど$T(v)$ と一致します。したがってT は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

という行列で表され、その列ベクトルはe_x, e_y の像そのものになります。

平面上の線形変換はすべて行列で表せる

もし

$$T(e_x) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad T(e_y) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

ならば

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

3.4 変換行列の例

3.1節に描いた5つの線形変換の変換行列は次の通りです。

(i) 2倍の拡大:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) 角θ の回転:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(iii) x 軸に関する反射:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv) x 軸への射影:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(v) せん断:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

具体的に計算すると、たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

に対して

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3.5 変換の合成

線形変換はベクトル空間からベクトル空間への写像です。したがって、2つの線形変換を連続して行う、すなわち合成することができます。2つの線形変換T, S の合成を$S \circ T$ と書きます。これは「まずT を行い、そのあとでS を行う」と読むべき記号です。T が行列A、S が行列B で表されるなら、合成$S \circ T$ は右から順に作用するので、行列としてはBA で表されます。行列の掛け算は可換ではないので、順序が重要です。

これを具体的に見てみましょう。まず

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

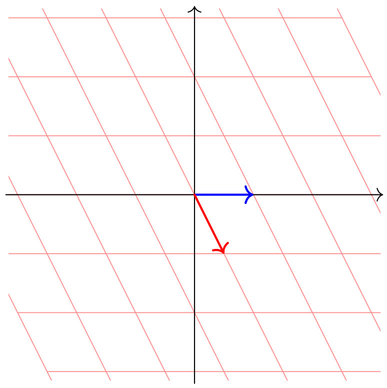
をx 軸に関する反射とし、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

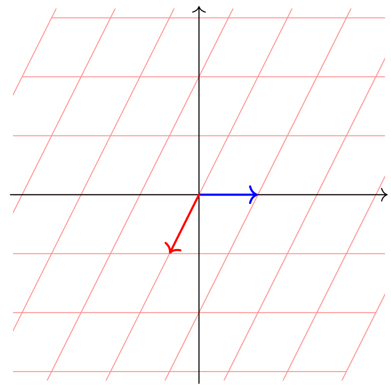
をせん断とします。これらを異なる順序で掛けると

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

となり、$AB \neq BA$ です。A は反射、B はせん断なので、BA は「まず反射し、そのあとせん断する」ことを意味し、AB は「まずせん断し、そのあと反射する」ことを意味します。$AB \neq BA$ という事実は、この2つの操作の順番を変えると結果が変わることを表しています。図で見るとそれは非常にはっきりしています。



線形変換AB の出力



線形変換BA の出力

Exercise 5

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

として、次を計算しなさい。

1. $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercise 6

線形変換T が

$$T(e_x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T(e_y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。

1. T の行列を書きなさい。
2. $T\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ を求めなさい。

4　行列式再訪

4.1　行列式を面積として見る

前回の講義で見たように、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して、行列式は

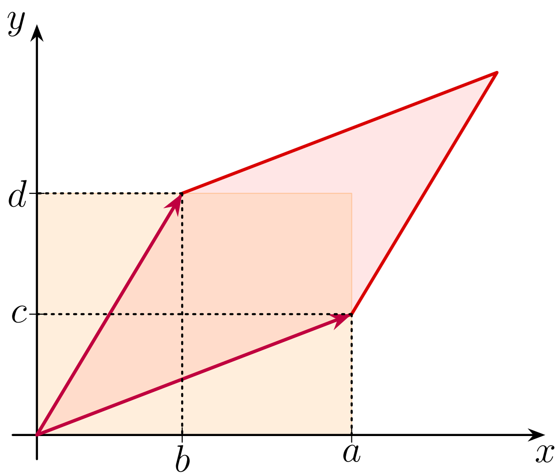
$$\det(A) = ad - bc.$$

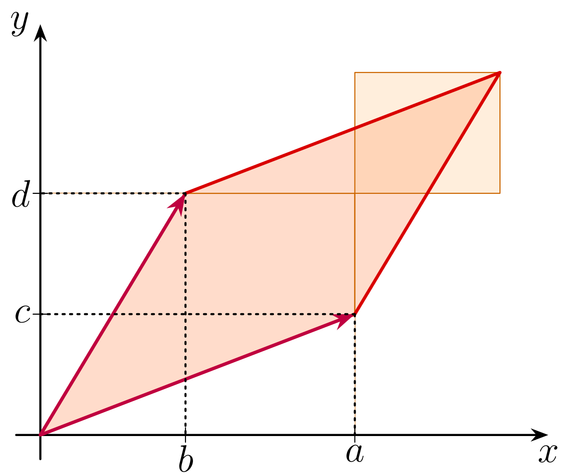
です。

この列をベクトル

$$u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とみなすと、$\det(A)$ はu とv が張る平行四辺形の面積と密接に関係しています。図の配置では、面積ad の長方形の中に平行四辺形が入り、その余分な部分の面積がbc になります。これは、面積ad の部分を平行四辺形のまわりに移し替えることで見て取れます。





より正確には、

$$\text{Area of the parallelogram} = \left|\det(A)\right|.$$

です。

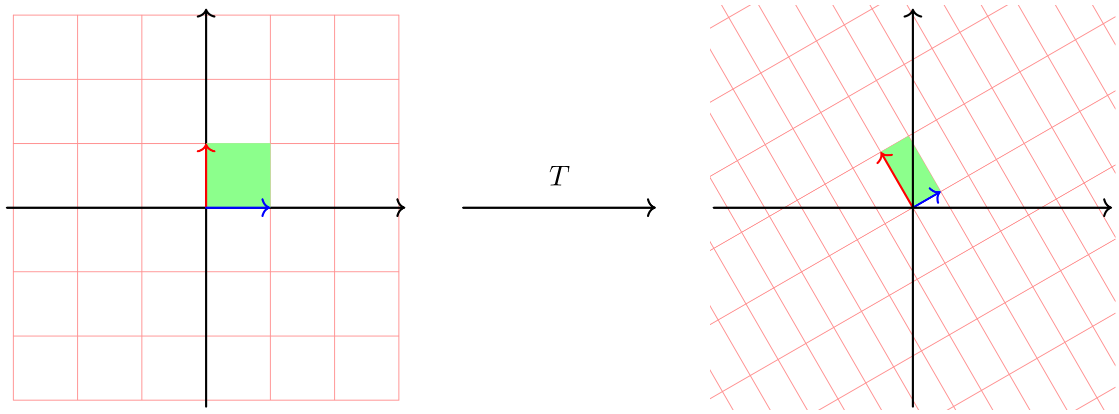
したがって2×2 行列の行列式は幾何学的意味をもちます。すなわち、それは2本のベクトルが張る平行四辺形の面積を表すのです。

4.2　拡大率としての行列式

線形代数においてさらに重要なのは次の解釈です。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は線形変換を表します。この変換のもとで、単位正方形はA の列ベクトルが張る平行四辺形に移ります。したがって$\det(A)$ は面積がどれだけ変わるかを教えてくれます。



面積の拡大率としての行列式

線形変換が行列A で表されるとき、

$$|\det(A)|$$

は面積が何倍に拡大・縮小されるかを表す。

たとえば：

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   なら

   $$\det(A) = 4.$$

   したがって面積は4 倍になる。

2. $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   なら

   $$\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

   したがって回転は面積を保つ。

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   なら

   $$\det(A) = 0.$$

   したがって面積はすべて0 につぶれる。これは直線への射影で予想される通りである。

4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   なら

   $$\det(A) = -1.$$

   絶対値は1 なので面積自体は保たれるが、負号は向きが反転することを示している。

4.3　3×3 行列式の幾何学的意味

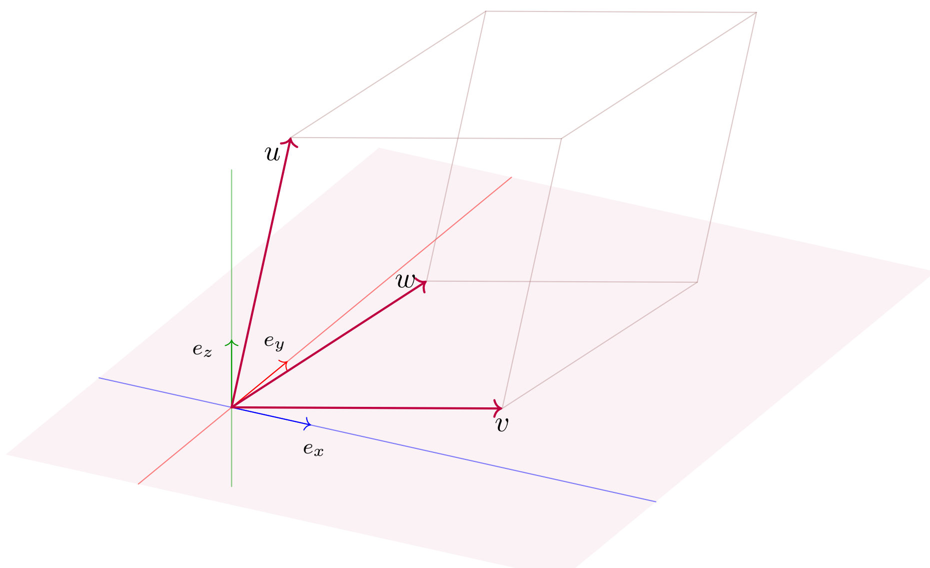
3×3 行列については、前回の講義で見たように小行列式を使って展開できます。たとえば第3行に沿えば

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2次元の場合と同様に、3×3 行列の行列式は、その列ベクトルが張る平行六面体の符号付き体積を表します。絶対値をとれば通常の体積になります。列ベクトルを

$$u = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad w = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},$$

とすると、その平行六面体の一例は次のように描けます。



第3行に沿って展開するということは、この平行六面体をいくつかの2×2 の面積に分け、それに長さを掛けて柱体の体積として足し合わせていると解釈できます。実際、第3行に沿う展開では、$\{u, v, w\}$ から2本を選んでできる平行四辺形をxy 平面へ射影し、その面積を2×2 行列式として数え、それに対応するz 成分を掛けています。図式的には次のようになります。

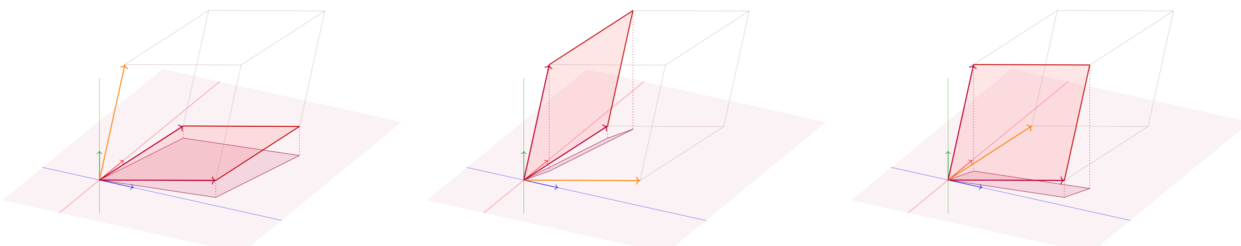
a_{31} は第1列ベクトルの z 座標

a_{33} は第3列ベクトルの z 座標

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{31}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}^{\text{第2列と第3列が作る平行四辺形を}xy\text{平面に射影したときの符号付き面積}} - a_{32}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\text{第1列と第3列が作る平行四辺形を}xy\text{平面に射影したときの符号付き面積}} + a_{33}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}^{\text{第1列と第2列が作る平行四辺形を}xy\text{平面に射影したときの符号付き面積}}.$$

a_{32} は第2列ベクトルの z 座標

これら3つの射影された平行四辺形を図示すると次のようになります。



これらの平行四辺形の柱体をうまく組み替えると、ちょうど平行六面体の体積になることが示せます。ただし、その幾何学的証明はやや長く、この講義の範囲を超えます。

Exercise 7

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい。それは面積の拡大率について何を意味するか。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい。面積はどうなるか。
3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ を第1行に沿って展開して計算しなさい。

5　行列と解集合

線形代数は連立方程式と深く結びついています。たとえば

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + 2z = -3, \\ -2x - y = 4 \end{cases}$$

という連立方程式は、行列の積

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書き直せます。この意味で、私たちは「係数行列という変換を加えると、どの入力ベクトルが右辺の出力ベクトルになるか」を問うているのです。

このコンパクトな記法は、行列が有用である大きな理由の1つです。いくつもの方程式を縦に並べる代わりに、全体を1つの行列方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

として書けます。

一般には、解集合という言い方をする方が適切です。つまり、この方程式を満たすすべてのベクトル$\mathbf{x}$ の集合です。これまで見てきたように、可能性は3つしかありません。

1. 解が1つ、
2. 解が無数にある、
3. 解がない。

正方な系については、行列式が1つ目のケースをすばやく見分ける助けになります。第15講で扱ったクラメルの公式と同様に、次が成り立ちます。

行列式と一意性

A を正方の係数行列とする。もし$\det(A) \neq 0$ なら、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

は一意な解をもつ。
一方$\det(A) = 0$ なら、その系は一意な解をもたない。その場合、解が無数にあるか、あるいは解がないかのどちらかである。

Exercise 8

行列式または簡単な観察を用いて、各連立方程式が一意な解をもつかどうか判定しなさい。

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \quad x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \quad x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

練習問題の解答

Exercise 1

$$u + v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$2u = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$3u - v = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Exercise 2

1.
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4e_x - 2e_y.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 1e_x + 0e_y + 5e_z = e_x + 5e_z.$$

3.
$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   は、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の向きに沿う原点を通る直線である。

Exercise 3

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 4

1. はい。2×3 行列と3×4 行列の積は定義され、結果は2×4 行列である。
2. いいえ。内側のサイズが一致しないので、$3 \neq 2$ で定義されない。
3. 単位行列を掛けると、その行列は変わらない。

Exercise 5

1.
$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$
2.
$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}.$$
3.
$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3 \cdot 2 + (-1)(-1)\\2 \cdot 2 + 4(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercise 6

1. 列が$T(e_x), T(e_y)$ なので、行列は
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.$$
2.
$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}8-2\\4+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercise 7

1.
$$\det\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6.$$
したがって面積は6 倍される。
2.
$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = 1(-1) - 0 = -1.$$
絶対値は1 なので面積は保存されるが、平面の向きは反転する。

3.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}0 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}$$
$$= 1(3) - 2(0-2) + 0$$
$$= 3 + 4 = 7.$$

Exercise 8

1. 係数行列は
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \qquad \det = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$
したがって、この系は一意な解をもつ。
2. 係数行列は
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}, \qquad \det = 2 - 2 = 0.$$
2本目は1本目を2倍したものなので、無数に解がある。
3. 係数行列は再び
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}, \qquad \det = 0.$$
しかし今度は不整合である。なぜなら、1本目を2倍すると$2x + 2y = 2$ であり、$2x + 2y = 3$ にはならないからである。したがって解はない。