

上节课中，我们完成了对矩阵、行列式和线性代数的讨论。现在我们将进入本课程的最后一个主题，更深入地讨论多项式及其根。

在这节课中，我们首先引入根式，它是乘方运算的逆运算。乍一看，根式似乎很熟悉，从概念上说也并不奇怪。然而，这些最初看似熟悉的步骤，随着时间推移，可能会把我们带向一个非常不同寻常的方向。

今天我们将：

1. 定义 $n$ 次根与主值根，并说明根式在什么时候是实数。
2. 将根式与有理指数联系起来，并说明幂与根之间的逆运算性质。
3. 通过提出完全幂因子来化简根式，包括含有字母的表达式。
4. 对根式进行加、减、乘、除运算，并引入共轭的用法。
5. 将根式应用到直角三角形中，并简要预告根式方程。

## 1 根与根式

### 1.1 基本思想

根式是表示根的一种记号，例如平方根。如果 $b^n = a$ ，那么 $b$ 称为 $a$ 的一个 $n$ 次根。当主 $n$ 次根存在时，我们记作 $\sqrt[n]{a}$ 。因此：

$$b^n = a \quad \implies \quad b \text{ 是 } a \text{ 的一个 } n \text{ 次根。}$$

当 $n = 2$ 时，我们通常写作 $\sqrt{a}$ ，而不是 $\sqrt[2]{a}$ ，这称为 $a$ 的平方根。当 $n = 3$ 时，我们把 $\sqrt[3]{a}$ 称为 $a$ 的立方根。对于任意 $n > 3$ ，我们就直接称 $\sqrt[n]{a}$ 为 $a$ 的 $n$ 次根。

#### $n$ 次根的定义

设 $n \geq 2$ 是一个整数。若 $b^n = a$ ，则称 $b$ 为 $a$ 的一个 $n$ 次根。这里， $n$ 称为根式的指数， $a$ 称为被开方数。

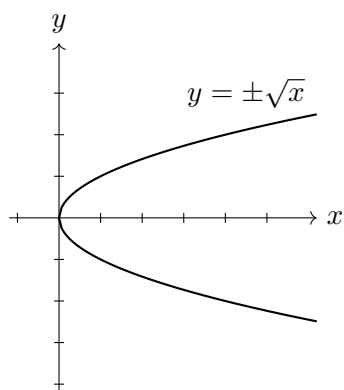
例如， $2^2 = 4$ ，所以2是4的一个平方根；而 $3^4 = 81$ ，所以3是81的一个四次根。

### 1.2 主值根以及偶数次根与奇数次根的区别

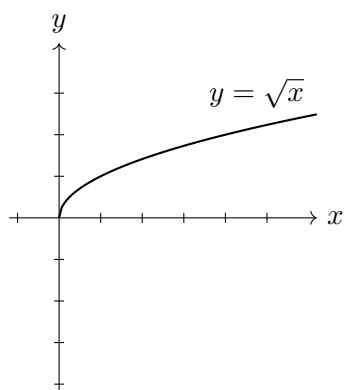
现在我们需要约定一个细微但重要的惯例。符号 $\sqrt{a}$ 表示的是主平方根，也就是说， $a$ 的非负平方根。例如，6和-6的平方都是36，但按照约定

$$\sqrt{36} = 6,$$

而不是-6。归根结底，我们这样做是因为我们希望把 $\sqrt{\cdot}$ 看成一个函数，这样它就可以较方便地参与各种代数运算。然而，如果我们把负根也包括进去，写成诸如 $\sqrt{36} = \pm 6$ 这样的形式，那么它就不再是一个函数了，因为一个输入（这里是36）会对应两个不同的输出（+6和-6）。选定主值根就使我们能够把平方根真正看成一个函数：



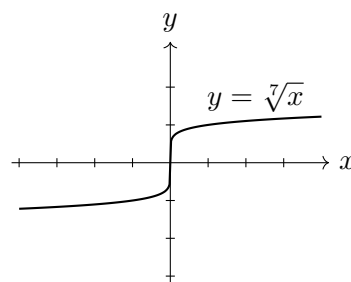
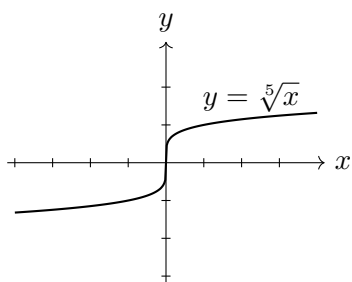
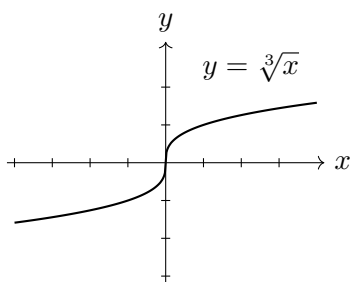
“朴素的”平方根



选取主值根

正如你所看到的，“朴素的”平方根不满足竖线检验。因此，为了修正这一点，我们把平方根图像中的负半部分“切掉”，这样就可以把 $\sqrt{x}$ 解释为一个真正的函数。再观察上面的图像，你会发现负数并没有平方根的真实数值。这是因为两个负数相乘会得到正数，例如 $-3 \cdot -3 = 9$ ，但没有任何实数自己乘自己会等于 $-9$ 。因此，当把 $\sqrt{x}$ 视为一个实值函数时，它只在 $x \geq 0$ 时有定义。像 $\sqrt{-9}$ 这样的情形，根本不存在对应的实数。

有趣的是，我们只需要对含有偶数次根的根式作出“选取主值根”的约定。对于含有奇数次根的根式， $\sqrt[n]{x}$ 本身就已经是一个真正的函数：



归根结底，这是因为两个负数相乘总会得到正数。回忆一下，乘方其实只是重复乘法的一种简写：

$$b^n = a \Leftrightarrow b \cdot b \cdot \dots \cdot b = a.$$

所以，当我们写 $b = \sqrt[n]{a}$ 时，我们其实是在说：“ $b$ 连续乘自己 $n$ 次，结果等于 $a$ 。”如果 $n$ 是偶数，那么 $b^n = (-b)^n$ ，因为负号会成对抵消。如果 $n$ 是奇数，那么这些负号就不会全部抵消，最后会剩下一个。这意味着：

$$\text{若 } a = b^n, \text{ 那么: } (-b)^n = (-b) \cdot (-b) \cdot \dots \cdot (-b) = \begin{cases} a & \text{若 } n \text{ 为偶数} \\ -a & \text{若 } n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

这是偶数次根与奇数次根第一次出现明显不同行为的地方：只有当 $n$ 是奇数时，我们才能对负数取 $n$ 次根。

## 偶数次根与奇数次根

1. 如果 $n$  是奇数, 那么每个实数 $a$  都恰好有一个实数 $n$  次根。
2. 如果 $n$  是偶数且 $a > 0$ , 那么 $a$  有两个实数 $n$  次根, 即 $\pm \sqrt[n]{a}$ 。
3. 如果 $n$  是偶数且 $a = 0$ , 那么 $a$  恰好有一个实数 $n$  次根, 即 $0$ 。
4. 如果 $n$  是偶数且 $a < 0$ , 那么 $a$  没有实数 $n$  次根。
5. 符号 $\sqrt[n]{a}$  表示主值根。

### 练习1

求出下列各根, 如果它是实数的话。

1.  $\sqrt{36}$
2.  $-\sqrt{36}$
3.  $\sqrt{-4}$
4.  $\sqrt[3]{8}$
5.  $\sqrt[3]{-8}$

## 2 逆运算性质与有理指数

### 2.1 幂与根互为逆运算

根式是指数运算的逆运算, 但我们必须小心符号问题。如果指数 $n$  是奇数, 那么

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

如果指数 $n$  是偶数, 那么主值根必须是非负的, 所以

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

例如, 取 $a = -2$  且 $n = 2$ :

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|.$$

另一方面, 如果 $a$  已经有主 $n$  次根, 那么把这个根再提升到 $n$  次幂就会回到 $a$ :

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

### 逆运算性质

对于实数 $a$  和整数 $n \geq 2$ :

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

只要主 $n$  次根存在即可。另外,

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ |a|, & \text{若 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

例如,

$$(\sqrt{4})^2 = 4, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[5]{-243} = -3.$$

## 练习2

求下列表达式的值。

1.  $(\sqrt{81})^2$
2.  $\sqrt[3]{64}$
3.  $\sqrt[5]{32}$
4.  $\sqrt[3]{-8}$

## 2.2 有理指数

根式也可以写成分数指数的形式。规则是：

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

这自然来自于幂与根之间的逆关系。注意到：

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

所以，把一个数提升到 $\frac{1}{n}$ 次幂，正是把它提升到 $n$ 次幂的逆运算。由于逆运算必须是唯一的，因此 $\sqrt[n]{a}$ 与 $a^{\frac{1}{n}}$ 必须是同一个东西。

更一般地，我们有：

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

这个观点非常有帮助，因为它使我们能够在化简根式时使用通常的指数运算律。

### 有理指数

如果相关的根是实数，那么

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

例如，

$$8^{4/3} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16,$$

并且

$$25^{-3/2} = \frac{1}{25^{3/2}} = \frac{1}{(\sqrt{25})^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

注意，运算顺序仍然很重要。特别地，乘方发生在乘法之前，因此负号与指数的关系是：

$$-16^{1/2} = -(16^{1/2}) = -4,$$

但括号优先，所以：

$$(-16)^{1/2} = \sqrt{-16},$$

它不是一个实数。

### 练习3

在实数范围内，求下列表达式的值。

1.  $8^{4/3}$
2.  $(4^2)^{3/2}$
3.  $25^{-3/2}$
4.  $\left(\frac{64}{125}\right)^{2/3}$
5.  $-16^{1/2}$
6.  $(-16)^{1/2}$

## 3 化简根式

### 3.1 提出因子

当我们尽可能多地把因子从被开方数中提出时，一个根式表达式就变得更简单了。为了做到这一点，我们可以使用下面的等式之一。

#### 根式的乘法与除法法则

只要涉及的根式是实数，就有

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

事实上，这些等式直接来自于指数运算律。对于第一个等式，我们可以把 $n$ 次根改写成有理指数 $\frac{1}{n}$ ，得到：

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n} \cdot n} \cdot b^{\frac{1}{n} \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

上面提到的除法法则同样来自指数运算律。我们有：

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

于是，如果 $a$ （或 $b$ ）本身是某个数的 $n$ 次幂，那么形如 $\sqrt[n]{ab}$ 的根式就可以进一步化简。例如，如果 $a = c^n$ ，那么我们可以这样化简根式：

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{c^n \cdot b} = \sqrt[n]{c^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \begin{cases} c \sqrt[n]{b}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ |c| \sqrt[n]{b}, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

这里我们用到了逆运算性质：当 $n$ 为奇数时， $\sqrt[n]{c^n} = c$ ；当 $n$ 为偶数时， $\sqrt[n]{c^n} = |c|$ 。

因此，我们化简根式的策略就是问：“这个数能不能拆成一个乘积，其中某一部分是某个数的 $n$ 次幂？”例如，考虑 $\sqrt{75}$ 。这里我们注意到 $75 = 25 \times 3$ ，而恰好 $25 = 5^2$ 。因此，我们可以利用乘法法

则把 $\sqrt{75}$  化简为:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2},$$

并且

$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

记住下面这些数会很有帮助:

- 平方数: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...
- 立方数: 1, 8, 27, 64, 125, ...
- 四次幂: 1, 16, 81, 256, ...

### 3.2 根号中的字母

当平方根中含有字母时, 绝对值问题就变得重要了。例如,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

而不能简单写成 $x$ 。这是因为 $x$  是一个变量, 它可能取负值。因此, 当我们化简含有变量的根式时, 必须小心追踪变量的符号。例如:

$$\sqrt{25x^2} = 5\sqrt{x^2} = 5|x|.$$

值得一提的是, 有时候表达式本身已经迫使某个变量必须为正。在这种情况下, 再写绝对值符号就显得多余了。为了说明这一点, 考虑根式 $\sqrt{12x^3}$ 。我们像往常一样化简:

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{4x^2 \cdot 3x} = 2\sqrt{x^2} \sqrt{3x} = 2|x| \sqrt{3x}.$$

如果我们只在实数范围内讨论, 那么表达式 $\sqrt{12x^3}$  本身已经迫使  $x \geq 0$ , 因为我们不能对负数取平方根。由于正数的绝对值等于它本身, 所以我们可以进一步写成

$$\sqrt{12x^3} = 2x\sqrt{3x}.$$

类似地,

$$\sqrt{144x^4} = 12\sqrt{x^4} = 12x^2,$$

因为 $x^2 \geq 0$ 。

#### 最简根式形式

通常认为, 一个根式表达式处于最简形式, 当且仅当:

1. 根号内不再含有完全 $n$  次幂因子;
2. 分母中不含根式;
3. 所有同类根式都已经合并。

## 练习4

尽可能化简下列表达式。

1.  $\sqrt{75}$
2.  $\sqrt{72}$
3.  $\sqrt{162}$
4.  $\sqrt{25x^2}$
5.  $\sqrt{12x^3}$
6.  $\sqrt{144x^4}$
7.  $\sqrt{72x^3y^2}$

### 3.3 分母有理化

如果一个分数的分母中仍然含有根式，那么通常不认为它已经被完全化简。把分母中的根式去掉的过程称为分母有理化。这里的策略是使用实数的三个熟悉性质：

1. 乘法单位元：对于所有实数 $a$ ，有 $a \cdot 1 = a$
2. 乘法逆元：对于所有非零实数 $a$ ，有 $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ 。
3. 等值分数：分子和分母同时乘以同一个非零量，不会改变分数的值。

为了去掉分母中的根式，我们可以按照如下过程：

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a},$$

这里 $a > 0$ 。不过，需要注意的是，这种方法之所以成立，是因为分母中只有一个单独的根式。更复杂的情形我们稍后再处理。作为分母有理化的一个例子，我们来化简：

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

这个过程对于更高次根式也同样适用。例如：

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}.$$

并且，

$$\frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{8}{9\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{18} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

## 练习5

将每个分母有理化并化简。

1.  $\sqrt{\frac{2}{7}}$
2.  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

$$3. \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

## 4 根式的加、减、乘、除

### 4.1 同类根式

如果两个根式具有相同的指数和相同的被开方数，那么它们称为同类根式。这时我们可以像代数中的同类项那样，通过相加或相减它们的系数来合并。

例如，

$$\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (1 + 5 - 2)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

但是

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

不能通过加法进一步化简，因为这两个根式不是同类根式。

#### 根式的加法

$$a \sqrt[n]{m} + b \sqrt[n]{m} = (a + b) \sqrt[n]{m}.$$

只有当两个根式具有相同的指数和相同的被开方数时，这个法则才成立。

例如，

$$6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4} = (6 - 5)\sqrt{x} + (-1 + 2)\sqrt[3]{4} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{4},$$

并且

$$3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x} = (3 + 2)\sqrt[3]{x} + (1 - 8)\sqrt{x} = 5\sqrt[3]{x} - 7\sqrt{x}.$$

### 练习6

化简下列表达式。

$$1. \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$$

$$2. 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4}$$

$$3. 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x}$$

4. 一个三角形的三边长分别为 $\sqrt{x}$ 、 $3\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{10x}$ 。写出并化简它的周长表达式。

### 4.2 乘法与共轭

乘法通常比加法更容易，因为我们可以利用第三节中的乘法法则，直接把被开方数相乘。例如：

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

类似地：

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8 \cdot 10} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{10}.$$

一个特别重要的概念是根式的共轭。

## 共轭

如果两个表达式只在中间符号上不同，那么它们就是共轭：

$$a + \sqrt{b} \quad \text{和} \quad a - \sqrt{b}.$$

它们的乘积是

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 + a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b.$$

注意，当我们把一个表达式  $a + \sqrt{b}$  与它的共轭相乘时，结果是不含根式的表达式。这使得共轭在分母有理化中极其有用。例如：

$$\frac{3}{1 - \sqrt{5}} = \frac{3}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{3 + 3\sqrt{5}}{4},$$

并且

$$\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

## 练习7

计算并化简下列表达式。

1.  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$
2.  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16}$
3. 写出  $2 - \sqrt{5}$  的共轭，并把这两个共轭相乘。
4. 将  $\frac{3}{1 - \sqrt{5}}$  的分母有理化。
5. 将  $\frac{4}{2 - \sqrt{3}}$  的分母有理化。

## 5 勾股定理

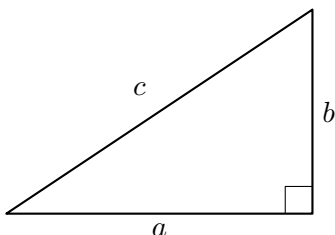
### 5.1 直角三角形与勾股定理

根式在几何中会自然出现。如果一个直角三角形的两条直角边长分别为  $a$  和  $b$ ，斜边长为  $c$ ，那么勾股定理告诉我们：

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

因此：

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



例如, 如果 $a = 6$  且 $b = 9$ , 那么

$$c = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

### 练习8

1. 求一个直角三角形的斜边, 其中两条直角边长分别为6 和9。
2. 解根式方程

$$\sqrt{x+5} = 4.$$

并检验你的答案。

## 练习解答

### 练习1

1.  $\sqrt{36} = 6$ 。
2.  $-\sqrt{36} = -6$ 。
3.  $\sqrt{-4}$  不是实数。
4.  $\sqrt[3]{8} = 2$ 。
5.  $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。

### 练习2

1.  $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$ 。
2.  $\sqrt[3]{64} = 4$ 。
3.  $\sqrt[5]{32} = 2$ 。
4.  $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。

### 练习3

1.

$$8^{4/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

2.

$$(4^2)^{3/2} = 4^{2 \cdot 3/2} = 4^3 = 64.$$

3.

$$25^{-3/2} = \frac{1}{25^{3/2}} = \frac{1}{(\sqrt{25})^3} = \frac{1}{125}.$$

4.

$$\left(\frac{64}{125}\right)^{2/3} = \frac{64^{2/3}}{125^{2/3}} = \frac{(\sqrt[3]{64})^2}{(\sqrt[3]{125})^2} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}.$$

5.

$$-16^{1/2} = -(16^{1/2}) = -4.$$

6.

$$(-16)^{1/2} = \sqrt{-16},$$

它不是实数。

#### 练习4

1.

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

2.

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

3.

$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

4.

$$\sqrt{25x^2} = 5\sqrt{x^2} = 5|x|.$$

5.

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{4x^2 \cdot 3x} = 2\sqrt{x^2}\sqrt{3x} = 2|x|\sqrt{3x}.$$

在实数范围内，这也可以写成 $2x\sqrt{3x}$ ，因为 $x \geq 0$ 。

6.

$$\sqrt{144x^4} = 12\sqrt{x^4} = 12x^2.$$

7.

$$\sqrt{72x^3y^2} = \sqrt{36x^2y^2 \cdot 2x} = 6\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{2x} = 6|x||y|\sqrt{2x}.$$

在常见的情形 $x \geq 0$ 下，这也可以写成 $6x|y|\sqrt{2x}$ 。

#### 练习5

1.

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

2.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}.$$

3.

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

#### 练习6

1.

$$\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (1 + 5 - 2)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

2.

$$6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4} = (6 - 5)\sqrt{x} + (-1 + 2)\sqrt[3]{4} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{4}.$$

3.

$$3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x} = (3 + 2)\sqrt[3]{x} + (1 - 8)\sqrt{x} = 5\sqrt[3]{x} - 7\sqrt{x}.$$

4.

$$P = \sqrt{x} + 3\sqrt{x} + \sqrt{10x} = (1 + 3)\sqrt{x} + \sqrt{10}\sqrt{x} = (4 + \sqrt{10})\sqrt{x}.$$

### 练习7

1.

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

2.

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8 \cdot 10} = 2\sqrt[3]{10}.$$

3.  $2 - \sqrt{5}$  的共轭是  $2 + \sqrt{5}$ , 并且

$$(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1.$$

4.

$$\frac{3}{1 - \sqrt{5}} = \frac{3}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{3 + 3\sqrt{5}}{4}.$$

5.

$$\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

### 练习8

1.

$$c = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

2.

$$\sqrt{x + 5} = 4.$$

两边平方:

$$x + 5 = 16,$$

所以

$$x = 11.$$

检验:

$$\sqrt{11 + 5} = \sqrt{16} = 4,$$

所以  $x = 11$  正确。