

Last lecture we completed our discussion of matrices, determinants, and linear algebra. We will now move on to the final topic of our course, by discussing polynomials and their roots in depth.

In this lecture we start our discussion by introducing *radicals*, which are the inverse operation to exponentiation. At first glance radicals can look familiar, and conceptually they are not so strange. However, these first familiar steps may end up leading to a very unusual direction over time.

Today we will:

1. n 乗根と主値を定義し、いつ根号が実数になるのかを説明する。
2. 根号を有理指数と結びつけ、累乗と根の逆演算としての性質を説明する。
3. 変数を含む式も含めて、完全冪の因子を外に出すことで根号を簡単にする。
4. 共役を用いる場合も含めて、根号の加法、減法、乗法、除法を行う。
5. 根号を直角三角形に応用し、最後に根号方程式を簡単に予告する。

1 累乗根と根号

1.1 基本的な考え方

根号とは、平方根のような根を表す別の記法です。もし $b^n = a$ ならば、 b を a の n 乗根と呼びます。主 n 乗根が存在するとき、それを $\sqrt[n]{a}$ と書きます。したがって、

$$b^n = a \quad \implies \quad b \text{ は } a \text{ の } n \text{ 乗根である。}$$

$n = 2$ のとき、通常は $\sqrt[3]{a}$ の代わりに \sqrt{a} と書き、これを a の平方根と呼びます。 $n = 3$ のとき、 $\sqrt[3]{a}$ を立方根と呼びます。 $n > 3$ のときは、 $\sqrt[n]{a}$ をそのまま n 乗根と呼びます。

n 乗根の定義

$n \geq 2$ を整数とする。もし $b^n = a$ ならば、 b を a の n 乗根という。ここで n を根号の指数と呼び、 a を被開平数と呼ぶ。

例えば、 $2^2 = 4$ なので2は4の平方根であり、また $3^4 = 81$ なので3は81の四乗根です。

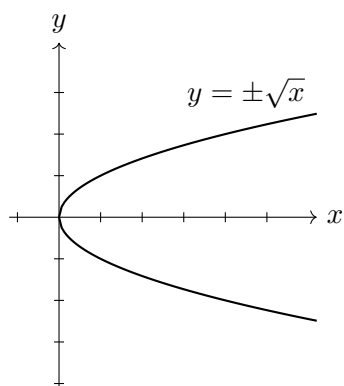
1.2 主値と偶数根・奇数根の違い

ここで、少し繊細ですが重要な約束を導入する必要があります。記号 \sqrt{a} は主平方根を意味します。つまり、 a の非負の平方根です。例えば、6も-6もともに36の平方になりますが、約束として

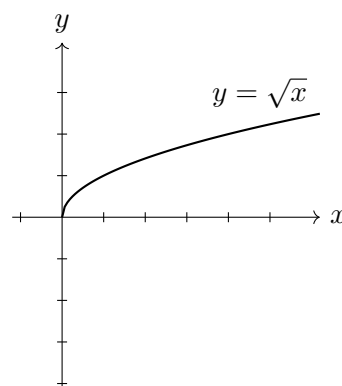
$$\sqrt{36} = 6,$$

であって、-6ではありません。結局のところ、これは $\sqrt{\cdot}$ を関数として扱えるようにしたいからです。そうすれば、代数的操作の中に自然に組み込むことができます。しかし、もし負の根まで含めて $\sqrt{36} = \pm 6$ のように書いてしまうと、これはもはや関数ではなくなります。というの

も、1つの入力（この場合は36）に対して2つの異なる出力（+6 と-6）が対応してしまうからです。主値を選ぶことで、平方根を実際に関数としてみなせるようになります。



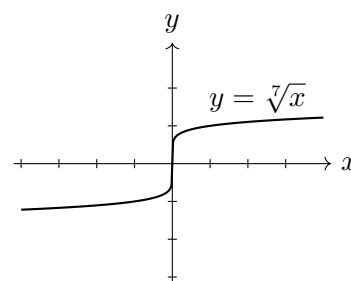
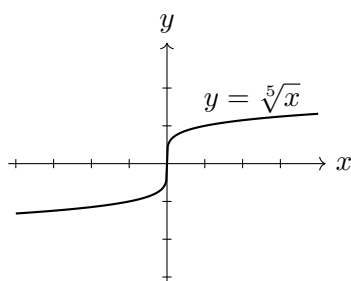
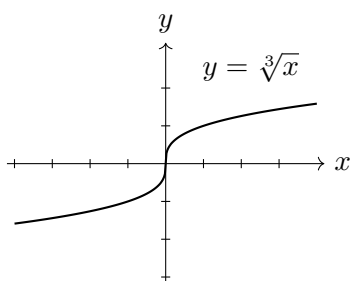
「素朴な」平方根



主値を選ぶ

見てわかるように、素朴な平方根は縦線判定法を満たしません。そこで、これを修正するために平方根の負の部分を「切り落とし」、 \sqrt{x} を本当の関数として解釈できるようにします。また、上のグラフを見ると、負の数の平方根には値がありません。これは、負の数どうしの積が正になるからです。例えば、 $-3 \cdot -3 = 9$ ですが、どんな実数を自分自身に掛けても-9になることはありません。したがって、実数値関数として見ると、 \sqrt{x} は $x \geq 0$ のときにしか定義されません。 $\sqrt{-9}$ のような場合には、それに対応する実数は存在しないのです。

興味深いことに、主値を選ぶという約束が必要なのは偶数根を含む根号だけです。奇数根を含む根号 $\sqrt[n]{x}$ は、もともとすでに関数になっています。



根本的には、これは負の数どうしを掛けると必ず正になるからです。累乗とは、繰り返しの掛け算を簡潔に書いた記法でした。

$$b^n = a \Leftrightarrow b \cdot b \cdot \dots \cdot b = a.$$

したがって、 $b = \sqrt[n]{a}$ と書くとき、実際には「 b を自分自身に n 回続けて掛けると a になる」と言っているのです。もし n が偶数なら、負号が対になって打ち消し合うので $b^n = (-b)^n$ です。もし n が奇数なら、負号はすべて打ち消し合わず、1つ余ります。つまり、

$$\text{if } a = b^n \text{ then: } (-b)^n = (-b) \cdot (-b) \cdot \dots \cdot (-b) = \begin{cases} a & \text{if } n \text{ is even} \\ -a & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}.$$

ここに、偶数根と奇数根が最初にはっきり違う振る舞いを見せる場面があります。負の数の n 乗根を取れるのは、 n が奇数のときだけです。

偶数根と奇数根

1. n が奇数なら, 任意の実数 a はちょうど1つの実 n 乗根をもつ。
2. n が偶数で $a > 0$ なら, a は2つの実 n 乗根, すなわち $\pm \sqrt[n]{a}$ をもつ。
3. n が偶数で $a = 0$ なら, a はちょうど1つの実 n 乗根, すなわち 0 をもつ。
4. n が偶数で $a < 0$ なら, a は実 n 乗根をもたない。
5. 記号 $\sqrt[n]{a}$ は主値を表す。

Exercise 1

各根を求めよ。ただし, 実数である場合に限る。

1. $\sqrt{36}$
2. $-\sqrt{36}$
3. $\sqrt{-4}$
4. $\sqrt[3]{8}$
5. $\sqrt[3]{-8}$

2 逆の性質と有理指数

2.1 累乗と根は互いに逆である

根号は指数の逆演算ですが, 符号には注意が必要です。指数 n が奇数なら,

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

指数 n が偶数なら, 主値は非負でなければならないので,

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

例えば, $a = -2$, $n = 2$ とすると,

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|.$$

一方, a がすでに主 n 乗根をもつなら, その根をもう一度 n 乗すれば元の a に戻ります。

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

逆の性質

実数 a と整数 $n \geq 2$ に対して,

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

が成り立つ。ただし, 主 n 乗根が存在するとする。また,

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ が奇数のとき,} \\ |a|, & n \text{ が偶数のとき.} \end{cases}$$

例えば,

$$(\sqrt{4})^2 = 4, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[5]{-243} = -3.$$

Exercise 2

各式の値を求めよ。

1. $(\sqrt{81})^2$
2. $\sqrt[3]{64}$
3. $\sqrt[5]{32}$
4. $\sqrt[3]{-8}$

2.2 有理指数

根号は分数指数を使って書くこともできます。規則は

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

です。これは累乗との逆関係から自然に現れます。実際、

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

なので、数を $\frac{1}{n}$ 乗することは、 n 乗することの逆演算です。逆演算は一意でなければならないので、 $\sqrt[n]{a}$ と $a^{\frac{1}{n}}$ は同じものだとわかります。

さらに一般に、

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

となります。この見方は非常に便利で、根号式を簡単にするとき、指数法則をそのまま使えるようになります。

有理指数

関係する根が実数であるなら、

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

例えば、

$$8^{4/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16,$$

そして

$$25^{-3/2} = \frac{1}{25^{3/2}} = \frac{1}{(\sqrt{25})^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

演算の順序は依然として重要であることに注意してください。特に、指数計算は掛け算より先に行われるので、負号と指数の関係は

$$-16^{1/2} = -(16^{1/2}) = -4,$$

となります。一方で、かっこは先に処理されるので、

$$(-16)^{1/2} = \sqrt{-16},$$

となり、これは実数ではありません。

Exercise 3

実数の範囲で、各式の値を求めよ。

1. $8^{4/3}$
2. $(4^2)^{3/2}$
3. $25^{-3/2}$
4. $\left(\frac{64}{125}\right)^{2/3}$
5. $-16^{1/2}$
6. $(-16)^{1/2}$

3 根号の簡単化

3.1 因子を外に出す

根号式は、被開平数の中からできるだけ多くの因子を外に出したときに、より簡単になります。そのために、次の等式を用いることができます。

根号の積と商の公式

関係する根号がすべて実数であるとき、

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

実は、これらの等式は指数法則から直接導かれます。最初の等式については、 n 乗根を有理指数 $\frac{1}{n}$ と書き直せば、

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}\right)^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n} \cdot n} \cdot b^{\frac{1}{n} \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

となります。上の商の公式も、同様に指数法則から従います。実際、

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

したがって、 $\sqrt[n]{ab}$ の形の根号では、もし a （あるいは b ）が c^n の形なら簡単化できます。例えば、 $a = c^n$ だとすると、

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{c^n \cdot b} = \sqrt[n]{c^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \begin{cases} c \sqrt[n]{b}, & n \text{ が奇数のとき,} \\ |c| \sqrt[n]{b}, & n \text{ が偶数のとき,} \end{cases}$$

と書けます。ここでは、 n が奇数なら $\sqrt[n]{c^n} = c$ 、 n が偶数なら $\sqrt[n]{c^n} = |c|$ という逆の性質を用いました。

したがって、根号を簡単にする戦略は、「この数は、何かの n 乗を因子にもつ積に分解できるか」と考えることです。例えば、 $\sqrt{75}$ を考えてみましょう。ここで $75 = 25 \times 3$ であり、さらに $25 = 5^2$ です。したがって、積の公式を使えば、

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

となります。同様に、

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2},$$

および

$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

以下の数を覚えておくと便利です。

- 平方数: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...
- 立方数: 1, 8, 27, 64, 125, ...
- 四乗数: 1, 16, 81, 256, ...

3.2 根号の中の変数

変数が平方根の中に現れるときには、絶対値の問題が重要になります。例えば、

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

であって、単に x ではありません。これは x が変数であり、負の値を取ることからです。したがって、変数を含む根号を簡単にするときには、符号に注意して追跡する必要があります。例えば、

$$\sqrt{25x^2} = 5\sqrt{x^2} = 5|x|.$$

ただし、場合によっては、式そのものが変数の正性をすでに強制していることがあります。そのような場合、絶対値を書くのは冗長です。これを示すために、 $\sqrt{12x^3}$ を考えましょう。通常どおり簡単化すると、

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{4x^2 \cdot 3x} = 2\sqrt{x^2}\sqrt{3x} = 2|x|\sqrt{3x}.$$

実数の範囲で考えるなら、 $\sqrt{12x^3}$ という式そのものがすでに $x \geq 0$ を強制しています。というのも、負の数の平方根は取れないからです。正の数の絶対値はその数自身なので、さらに

$$\sqrt{12x^3} = 2x\sqrt{3x}.$$

と簡単にできます。

同様に、

$$\sqrt{144x^4} = 12\sqrt{x^4} = 12x^2,$$

です。ここで $x^2 \geq 0$ だからです。

根号の最簡形

根号式は通常、次の条件を満たすとき最も簡単な形にあると考えられる。

1. 根号の中に完全な n 乗因子が残っていない、
2. 分母に根号が含まれていない、
3. 同類の根号がまとめられている。

Exercise 4

各式をできるだけ簡単にせよ。

1. $\sqrt{75}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt{162}$
4. $\sqrt{25x^2}$
5. $\sqrt{12x^3}$
6. $\sqrt{144x^4}$
7. $\sqrt{72x^3y^2}$

3.3 分母の有理化

分数の分母に根号が残っている場合、その式はまだ完全には簡単になっているとはみなしません。分母から根号を取り除くことを、分母の有理化と呼びます。このとき使う戦略は、実数の3つの基本的な性質に基づいています。

1. 乗法単位元: 任意の実数 a に対して $a \cdot 1 = a$
2. 乗法逆元: 任意の0でない実数 a に対して $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$
3. 同値分数: 分数の分子と分母に同じ0でない量を掛けても、値は変わらない。

分数の分母から根号を取り除くには、次のようにすればよいです。

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a},$$

ただし $a > 0$ とします。ただし、これがうまくいくのは分母に単独の根号しかないからであり、もっと複雑な場合は後で扱います。分母の有理化の例として、

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

と簡単化できます。この方法は、高次の根号にも同様に使えます。例えば、

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}.$$

また、

$$\frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{8}{9\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{18} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Exercise 5

各分母を有理化し、簡単にせよ。

1. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

2. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$
3. $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

4 根号の加法・減法・乗法・除法

4.1 同類の根号

2つの根号が同類の根号であるとは、指数も被開平数も同じであることをいいます。このときは、代数で同類項をまとめるのと同じように、係数を足したり引いたりしてまとめることができます。

例えば、

$$\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (1 + 5 - 2)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

しかし、

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

は根号が同類ではないので、加法によって簡単にはできません。

根号の加法

$$a\sqrt[n]{m} + b\sqrt[n]{m} = (a + b)\sqrt[n]{m}.$$

これは、2つの根号の指数と被開平数がどちらも同じときにのみ成り立つ。

例えば、

$$6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4} = (6 - 5)\sqrt{x} + (-1 + 2)\sqrt[3]{4} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{4},$$

そして

$$3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x} = (3 + 2)\sqrt[3]{x} + (1 - 8)\sqrt{x} = 5\sqrt[3]{x} - 7\sqrt{x}.$$

Exercise 6

各式を簡単にせよ。

1. $\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$
2. $6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4}$
3. $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x}$
4. 辺の長さが \sqrt{x} , $3\sqrt{x}$, $\sqrt{10x}$ の三角形がある。その周の長さを表す式を書き、簡単にせよ。

4.2 乗法と共役

乗法は加法より扱いやすいことが多く、被開平数を積の公式で直接掛ければよいです。例えば、

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

同様に,

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8 \cdot 10} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{10}.$$

特に重要な考え方が, 根号の共役です。

共役

2つの式が真ん中の符号だけ異なるなら, それらは共役である:

$$a + \sqrt{b} \quad \text{and} \quad a - \sqrt{b}.$$

それらの積は

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 + a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b.$$

$a + \sqrt{b}$ にその共役を掛けると, 根号を含まない式になることがわかります。そのため, 共役は分母の有理化で非常に有用です。例えば,

$$\frac{3}{1 - \sqrt{5}} = \frac{3}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{3 + 3\sqrt{5}}{4},$$

そして

$$\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

Exercise 7

各式を計算し, 簡単にせよ。

1. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$
2. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16}$
3. $2 - \sqrt{5}$ の共役を求め, その2つの共役の積を求めよ。
4. $\frac{3}{1 - \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。
5. $\frac{4}{2 - \sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

5 ピタゴラスの定理

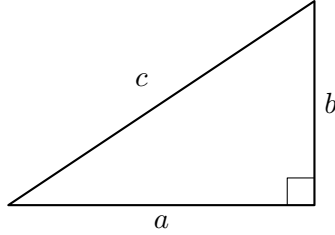
5.1 直角三角形とピタゴラスの定理

根号は幾何にも自然に現れます。直角三角形の2辺の長さが a と b , 斜辺が c であるとき, ピタゴラスの定理により

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

したがって

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



例えば, $a = 6$, $b = 9$ なら,

$$c = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

Exercise 8

- 2辺の長さが6 と9 である直角三角形の斜辺を求めよ。
- 次の根号方程式を解け：

$$\sqrt{x + 5} = 4.$$

答えを確かめよ。

練習問題の解答

Exercise 1

- $\sqrt{36} = 6.$
- $-\sqrt{36} = -6.$
- $\sqrt{-4}$ は実数ではない。
- $\sqrt[3]{8} = 2.$
- $\sqrt[3]{-8} = -2.$

Exercise 2

- $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81.$
- $\sqrt[3]{64} = 4.$
- $\sqrt[5]{32} = 2.$
- $\sqrt[3]{-8} = -2.$

Exercise 3

1.

$$8^{4/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

2.

$$(4^2)^{3/2} = 4^{2 \cdot 3/2} = 4^3 = 64.$$

3.

$$25^{-3/2} = \frac{1}{25^{3/2}} = \frac{1}{(\sqrt{25})^3} = \frac{1}{125}.$$

4.
$$\left(\frac{64}{125}\right)^{2/3} = \frac{64^{2/3}}{125^{2/3}} = \frac{(\sqrt[3]{64})^2}{(\sqrt[3]{125})^2} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}.$$

5.
$$-16^{1/2} = -(16^{1/2}) = -4.$$

6.
$$(-16)^{1/2} = \sqrt{-16},$$

これは実数ではない。

Exercise 4

1.
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

2.
$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

3.
$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}.$$

4.
$$\sqrt{25x^2} = 5\sqrt{x^2} = 5|x|.$$

5.
$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{4x^2 \cdot 3x} = 2\sqrt{x^2}\sqrt{3x} = 2|x|\sqrt{3x}.$$

実数の範囲では、 $x \geq 0$ なので、これは $2x\sqrt{3x}$ と書いてもよい。

6.
$$\sqrt{144x^4} = 12\sqrt{x^4} = 12x^2.$$

7.
$$\sqrt{72x^3y^2} = \sqrt{36x^2y^2 \cdot 2x} = 6\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{2x} = 6|x||y|\sqrt{2x}.$$

よくある場合である $x \geq 0$ では、これは $6x|y|\sqrt{2x}$ と書いてもよい。

Exercise 5

1.
$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

2.
$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}.$$

3.
$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Exercise 6

1.

$$\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (1 + 5 - 2)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

2.

$$6\sqrt{x} - \sqrt[3]{4} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{4} = (6 - 5)\sqrt{x} + (-1 + 2)\sqrt[3]{4} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{4}.$$

3.

$$3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 8\sqrt{x} = (3 + 2)\sqrt[3]{x} + (1 - 8)\sqrt{x} = 5\sqrt[3]{x} - 7\sqrt{x}.$$

4.

$$P = \sqrt{x} + 3\sqrt{x} + \sqrt{10x} = (1 + 3)\sqrt{x} + \sqrt{10}\sqrt{x} = (4 + \sqrt{10})\sqrt{x}.$$

Exercise 7

1.

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

2.

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8 \cdot 10} = 2\sqrt[3]{10}.$$

3. $2 - \sqrt{5}$ の共役は $2 + \sqrt{5}$ であり,

$$(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1.$$

4.

$$\frac{3}{1 - \sqrt{5}} = \frac{3}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{3 + 3\sqrt{5}}{4}.$$

5.

$$\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

Exercise 8

1.

$$c = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

2.

$$\sqrt{x + 5} = 4.$$

両辺を2乗すると,

$$x + 5 = 16,$$

したがって

$$x = 11.$$

確かめると,

$$\sqrt{11 + 5} = \sqrt{16} = 4,$$

となるので, $x = 11$ は正しい。