MAT140 — 第18讲讲义
复数

上节课我们学习了根式、有理指数、共轭，以及涉及平方根的方程。特别地，我们看到根式是幂运算的逆运算，而共轭在化简某些表达式时非常有用。本节课将从这些思想出发，并追问：如果把它们稍微推进到实数所允许的范围之外，会发生什么？

第一个问题立刻就出现了。在实数范围内，像$\sqrt{-4}$ 这样的表达式并不存在。然而，某些代数问题却会自然地把我们引向这样的量。从历史上看，这件事发生在十六世纪杰罗拉莫·卡尔达诺的工作中。他在求解三次方程时，被迫面对负数的平方根。最初看起来不可能的东西，最终却引出了数系最有用的一种扩张。

在这节课中，我们将引入虚数与复数，说明如何对它们进行运算，然后在平面上对它们作出几何解释。从这个意义上说，这节课处在代数与几何之间。一方面，复数是具有自身运算规则的新代数对象。另一方面，它们也可以被看作平面上的点或向量，因此许多熟悉的几何思想会以新的形式再次出现。

今天我们将：

1. 简要复习根式、共轭与根式方程。
2. 说明卡尔达诺的三次公式如何引出负数平方根。
3. 定义虚数单位i，并把负平方根改写成i-形式。
4. 定义复数$a + bi$，并说明其相等、加法、减法、乘法与除法。
5. 引入复共轭与阿尔冈平面，并从几何上解释$|a + bi|$。

1 根式简要回顾

上节课中，我们反复使用了三个基本思想：

1. 根式是幂的逆运算，
2. 根式可以写成有理指数的形式，
3. 共轭有助于化简根式分式。

例如，

$$(\sqrt{x})^2 = x, \qquad \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \sqrt{x} = x^{1/2},$$

并且

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

只要两边都是实数即可成立。

我们还看到，分母中含有平方根时，往往可以通过乘以共轭来化简。例如，

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4},$$

以及

$$\frac{4}{2-\sqrt{3}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

最后，由于根式可以"消去"幂，根式方程通常可以通过先把根式孤立出来，再把两边提升到相应的幂来求解。例如，

$$\sqrt{2x-8}=4$$

可得

$$2x-8=16 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x=24 \qquad \Longrightarrow \qquad x=12.$$

提醒

符号$\sqrt{a}$ 表示a 的主平方根。在实数范围内，只有当$a \geq 0$ 时，$\sqrt{a}$ 才存在。

练习1

求值或化简下列各式。

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{5}{3-\sqrt{5}}$
3. 解方程$\sqrt{3x+1}=5$

2 卡尔达诺与"不可能之物"的出现

引入复数的一个重要历史原因，来自于对三次方程的求解尝试。卡尔达诺研究了形如

$$x^3=3px+2q,$$

的方程，其中p 和q 是实数。他发现其中一个解可以写成

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

这里我们不推导这个公式。对我们来说，重要的是它带来的后果。

2.1 一个较为温和的例子

若$p=1$ 且$q=1$，则方程变为

$$x^3=3x+2.$$

卡尔达诺公式给出

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{1^2-1^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1^2-1^3}}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=2.$$

的确，

$$2^3=8 \qquad 且 \qquad 3(2)+2=8.$$

2.2 一个更奇怪的例子

现在取$p = 5$ 且$q = 2$。则方程变为

$$x^3 = 15x + 4.$$

卡尔达诺公式给出

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 - 5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 - 5^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

乍一看，这在实数范围内似乎是不可能的，因为$\sqrt{-121}$ 不是实数。然而原来的方程显然确实有实数解。事实上，可以检验

$$x = 4, \qquad x = -2 + \sqrt{3}, \qquad x = -2 - \sqrt{3}$$

都满足

$$x^3 = 15x + 4.$$

于是，一个值得注意的现象发生了：一个实系数方程的公式，竟然把我们带入了负数的平方根。这正是数学家不得不扩展数系的时刻。

历史动机

卡尔达诺公式表明，即使一个多项式方程具有实数解，代数运算中的中间步骤也可能需要用到负数的平方根。这是引入复数的主要历史原因之一。

练习2

1. 直接验证$x = -2$ 是$x^3 = 3x - 2$ 的一个解。
2. 直接验证$x = 3$ 是$x^3 = 6x + 9$ 的一个解。
3. 说明为什么如果我们只允许实数，那么$\sqrt{-16}$ 就会成为一个问题。

3 虚数

3.1 虚数单位

为了处理负数的平方根，我们引入一个新符号：

$$i = \sqrt{-1}.$$

这称为虚数单位。它的定义性质是

$$i^2 = -1.$$

一旦引入了这个符号，任何负实数的平方根都可以改写成i-形式。若$c > 0$，则

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c(-1)} = \sqrt{c}\sqrt{-1} = \sqrt{c}\,i.$$

例如，

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11i,$$

$$\sqrt{-16} = 4i,$$

以及

$$\sqrt{-54} = \sqrt{54}\sqrt{-1} = 3\sqrt{6}\,i.$$

把负平方根写成i-形式

如果$c > 0$，那么

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\,i.$$

当把答案写成标准i-形式时，i 应该写在根号外面。

3.2 虚数的运算

一旦所有东西都被写成i-形式，运算就变得很直接。对于实数a 和b，

$$ai + bi = (a+b)i,$$

$$ai - bi = (a-b)i,$$

以及

$$(ai)(bi) = ab\,i^2 = -ab.$$

因此，例如，

$$\sqrt{-9} + \sqrt{-49} = 3i + 7i = 10i,$$

并且

$$\sqrt{-32} - 2\sqrt{-2} = 4\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,i.$$

练习3

把每个数写成i-形式。

1. $\sqrt{-36}$
2. $\sqrt{-\dfrac{16}{25}}$
3. $\sqrt{-80}$
4. $\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}}$

练习4

完成下列运算。

1. $\sqrt{-4} + \sqrt{-64}$
2. $\sqrt{-18} - \sqrt{-8}$
3. $\sqrt{-16} + \sqrt{-25}$
4. $\sqrt{-75} - 5\sqrt{-3}$

4 复数

4.1 定义

一个复数是形如

$$a + bi,$$

的数，其中a 和b 都是实数。数a 称为实部，而数bi 称为虚部。如果$b = 0$，那么这个复数其实就是一个实数。如果$a = 0$ 且$b \neq 0$，那么这个复数称为纯虚数。

> 复数的定义
>
> 如果$a, b \in \mathbb{R}$，那么
>
> $$z = a + bi$$
>
> 就是一个复数。我们通常称这为复数的标准形式。

复数全体记作$\mathbb{C}$。它包含实数$\mathbb{R}$，而实数又包含有理数$\mathbb{Q}$、整数$\mathbb{Z}$ 和自然数$\mathbb{N}$：

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

4.2 复数的相等

两个复数相等，当且仅当它们的实部相等且虚部相等。用符号表示为

$$a + bi = c + di \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ 且} b = d.$$

例如，

$$2^2 + 3i = 4 - (2 - 5)i$$

因为$2^2 = 4$，并且$3 = -(2 - 5) = 3$。

同样地，

$$(3 - 2) - i = i + 3 - (4 + 2i) + 2$$

因为左边等于

$$1 - i,$$

而右边等于

$$3 + i - 4 - 2i + 2 = 1 - i.$$

但是

$$7 - i^2 \neq 6,$$

因为

$$7 - i^2 = 7 - (-1) = 8.$$

练习5

判断下列各对数是否相等。

1. $1 + 4i$ 和$3 - (2 - 4i)$
2. $(4 + i) - (1 - 3i)$ 和$3 + 4i$
3. $5 - 2i^2$ 和3

5 复数的运算

5.1 加法与减法

要对复数进行加法或减法，只需把实部分别合并，把虚部分别合并：

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

这与代数中合并同类项非常相似。

例如，

$$(3-i)+(-2+4i)=1+3i,$$
$$3i+(5-3i)=5,$$

以及

$$4-(-1+5i)+(7+2i)=12-3i.$$

5.2 乘法

复数相乘时，我们照常展开，并使用$i^2=-1$ 这一规则：

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2.$$

由于$i^2=-1$，这就变成

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

例如，

$$(2+3i)(1-4i)=2-8i+3i-12i^2=14-5i.$$

复数的运算

对于复数$a+bi$ 和$c+di$，

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

练习6

化简下列各式。

1. $(2+5i)+(-1-3i)$
2. $4i+(7-4i)$
3. $6-(-2+3i)+(1-5i)$
4. $(6+3i)+(2-\sqrt{-8})-\sqrt{-4}$
5. $(1+2i)(3-i)$

6 复共轭与除法

6.1 复共轭

若

$$z = a + bi,$$

则它的复共轭是

$$\overline{z} = a - bi.$$

这与我们上节课学过的根式共轭是直接对应的。当一个复数乘以它的共轭时，虚部会相互抵消：

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

因此，一个复数与其共轭的乘积总是一个非负实数。

例如，

$$(3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25.$$

与共轭的乘积

若$z = a + bi$，则

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

6.2 复数除法

共轭使我们能够对复数作除法。若$c + di \neq 0$，则

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}.$$

分母变为

$$(c + di)(c - di) = c^2 + d^2,$$

这是一个实数。展开后得到

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

例如，

$$\frac{4 + 7i}{2 - 3i} = \frac{4 + 7i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{(4 + 7i)(2 + 3i)}{2^2 + 3^2}.$$

展开分子得到

$$(4 + 7i)(2 + 3i) = 8 + 12i + 14i + 21i^2 = -13 + 26i,$$

因此

$$\frac{4 + 7i}{2 - 3i} = -1 + 2i.$$

同样地，

$$\frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + i + 2i + 2i^2}{2} = \frac{-1 + 3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

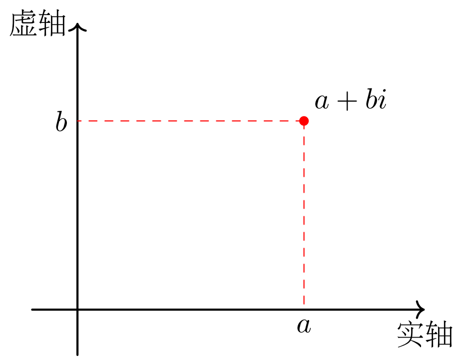
练习7

1. 求$2+5i$ 的共轭，然后把这个数与它的共轭相乘。
2. 化简$\dfrac{3+5i}{1-2i}$。
3. 化简$\dfrac{2-i}{2+i}$。

7 复数的几何

7.1 阿尔冈平面

复数$a+bi$ 可以画成平面上的点(a,b)。横轴记录实部，纵轴记录虚部。这个图像称为阿尔冈平面。

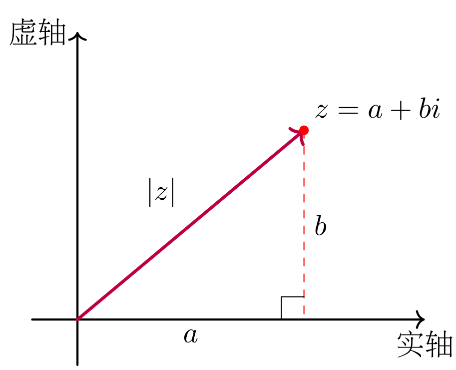


从这个角度看，复数其实并不神秘。它只是一个实数有序对，再配上一条特别有用的乘法规则而已。

7.2 模

如果$z=a+bi$，那么从原点到点(a,b) 的距离称为z 的模或绝对值，记作$|z|$。根据勾股定理，

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$



例如，如果

$$z = 3 - 4i,$$

那么

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

7.3 几个几何事实

复共轭

$$a + bi \longmapsto a - bi$$

表示把一个点关于实轴作对称。由于这不会改变它到原点的距离，所以共轭保持模不变：

$$|a + bi| = |a - bi|.$$

另外，把一个复数乘以i，就相当于在平面上把它旋转四分之一周。特别地，乘以i、$-i$ 或-1 都不会改变它的模。

最后，由于复数可以相加，也可以乘以实数标量，因此所有通常关于向量的语言都同样适用于它们。从这个意义上说，$\mathbb{C}$ 可以被看作是$\mathbb{R}$ 上的一个二维向量空间，只不过它还额外内建了一种乘法运算。

模

若$z = a + bi$，则

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

并且，

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

练习8

设$z = -1 + 2i$。

1. 写出z 的实部与虚部。
2. 求z 的复共轭。
3. 求$|z|$。
4. 计算$z\bar{z}$，并把答案与$|z|^2$ 比较。

练习解答

练习1

1.

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

2.

$$\frac{5}{3-\sqrt{5}} = \frac{5}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{15+5\sqrt{5}}{4}.$$

3.
$$\sqrt{3x+1}=5 \quad \Longrightarrow \quad 3x+1=25 \quad \Longrightarrow \quad 3x=24 \quad \Longrightarrow \quad x=8.$$

练习2

1.
$$(-2)^3=-8 \qquad \text{且} \qquad 3(-2)-2=-8.$$
因此$x=-2$ 是一个解。

2.
$$3^3=27 \qquad \text{且} \qquad 6(3)+9=18+9=27.$$
因此$x=3$ 是一个解。

3. 在实数范围内，$\sqrt{a}$ 只有在$a\geq 0$ 时才存在。由于$-16<0$，所以$\sqrt{-16}$ 不是实数。

练习3

1.
$$\sqrt{-36}=\sqrt{36}\sqrt{-1}=6i.$$
2.
$$\sqrt{-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}\sqrt{-1}=\frac{4}{5}i.$$
3.
$$\sqrt{-80}=\sqrt{80}\sqrt{-1}=4\sqrt{5}\,i.$$
4.
$$\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}}=\frac{4\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i}=4.$$

练习4

1.
$$\sqrt{-4}+\sqrt{-64}=2i+8i=10i.$$
2.
$$\sqrt{-18}-\sqrt{-8}=3\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i=\sqrt{2}\,i.$$
3.
$$\sqrt{-16}+\sqrt{-25}=4i+5i=9i.$$
4.
$$\sqrt{-75}-5\sqrt{-3}=5\sqrt{3}\,i-5\sqrt{3}\,i=0.$$

练习5

1. 是，因为
$$3-(2-4i)=3-2+4i=1+4i.$$
2. 是，因为
$$(4+i)-(1-3i)=4+i-1+3i=3+4i.$$
3. 否，因为
$$5-2i^2=5-2(-1)=7\neq 3.$$

练习6

1. $$(2+5i)+(-1-3i)=1+2i.$$

2. $$4i+(7-4i)=7.$$

3. $$6-(-2+3i)+(1-5i)=6+2-3i+1-5i=9-8i.$$

4. 先把根式写成i-形式:
$$\sqrt{-8}=2\sqrt{2}\,i, \qquad \sqrt{-4}=2i.$$
因此
$$(6+3i)+(2-\sqrt{-8})-\sqrt{-4}=(6+3i)+(2-2\sqrt{2}\,i)-2i=8+(1-2\sqrt{2})i.$$

5. $$(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i.$$

练习7

1. $2+5i$ 的共轭是$2-5i$，并且
$$(2+5i)(2-5i)=2^2+5^2=29.$$

2. $$\frac{3+5i}{1-2i}=\frac{3+5i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{(3+5i)(1+2i)}{1^2+2^2}.$$
展开可得
$$(3+5i)(1+2i)=3+6i+5i+10i^2=-7+11i.$$
因此
$$\frac{3+5i}{1-2i}=\frac{-7+11i}{5}=-\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i.$$

3. $$\frac{2-i}{2+i}=\frac{2-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{(2-i)(2-i)}{2^2+1^2}.$$
展开可得
$$(2-i)(2-i)=4-4i+i^2=3-4i.$$
因而
$$\frac{2-i}{2+i}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i.$$

练习8

设$z = -1 + 2i$。

1. 实部是-1，虚部是$2i$。
2. 复共轭为
$$\overline{z} = -1 - 2i.$$
3.
$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$
4.
$$z\overline{z} = (-1 + 2i)(-1 - 2i) = 1 + 4 = 5.$$
   另外，
$$|z|^2 = (\sqrt{5})^2 = 5.$$
   因而确实有
$$z\overline{z} = |z|^2.$$