MAT140 — 第18講ハンドアウト
複素数

Last lecture we studied radicals, rational exponents, conjugates, and equations involving square roots. In particular, we saw that radicals are the inverse operation to powers, and that conjugates are useful for simplifying certain expressions. This lecture begins from those ideas and asks what happens when they are pushed slightly further than the real numbers allow.

A first problem appears immediately. Over the real numbers, expressions such as $\sqrt{-4}$ do not exist. However, certain algebraic problems naturally lead us towards such quantities anyway. Historically, this happened in the sixteenth century in the work of Gerolamo Cardano, whose attempts to solve cubic equations forced mathematicians to confront square roots of negative numbers. What first looked impossible eventually led to one of the most useful extensions of the number system.

In this lecture we will introduce imaginary numbers and complex numbers, explain how to perform arithmetic with them, and then interpret them geometrically in the plane. In this sense, the lecture sits somewhere between algebra and geometry. On the one hand, complex numbers are new algebraic objects with their own arithmetic. On the other hand, they can also be pictured as points or vectors in a plane, so many familiar geometric ideas reappear in a new form.

Today we will:

1. 根号，共役，根号方程式を簡単に復習する。
2. Cardano の三次方程式の公式が，どのように負の数の平方根を動機づけるのかを説明する。
3. 虚数単位i を定義し，負の平方根をi-form で書き直す。
4. 複素数$a+bi$ を定義し，等しさ，加法，減法，乗法，除法を述べる。
5. 複素共役とアルガン平面を導入し，$|a+bi|$ を幾何学的に解釈する。

1 根号の簡単な復習

前回の講義では，次の3つの基本的な考え方を繰り返し用いました。

1. 根号は累乗の逆演算である，
2. 根号は有理指数で書くことができる，
3. 共役は根号を含む分数を簡単にするのに役立つ。

例えば，

$$(\sqrt{x})^2 = x, \qquad \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \sqrt{x} = x^{1/2},$$

であり，

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

も，両辺が実数である限り成り立ちます。

また，分母に平方根を含む式は，共役を掛けることでしばしば簡単にできることも見ました。例えば，

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4},$$

および

$$\frac{4}{2-\sqrt{3}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 8+4\sqrt{3}.$$

最後に，根号は累乗を打ち消すので，根号方程式は，根号を孤立させてから両辺を適切な累乗にすることで解けることが多いです。例えば，

$$\sqrt{2x-8} = 4$$

なら，

$$2x-8=16 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x=24 \qquad \Longrightarrow \qquad x=12.$$

確認

記号$\sqrt{a}$ はa の主平方根を表す。実数の範囲では，$\sqrt{a}$ が存在するのは$a \geq 0$ のときに限る。

Exercise 1

各式を計算または簡単にせよ。

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{5}{3-\sqrt{5}}$
3. $\sqrt{3x+1} = 5$ を解け。

2　Cardano と「不可能なもの」の出現

複素数を導入する歴史的な大きな理由の1つは，三次方程式を解こうとする試みから来ています。Cardano は

$$x^3 = 3px + 2q,$$

という形の方程式を研究しました。ここでp とq は実数です。彼は，1つの解が

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

と書けることを見出しました。

ここではこの公式を導出しません。重要なのは，この公式が何を意味するかです。

2.1　やさしい例

$p=1$，$q=1$ とすると，方程式は

$$x^3 = 3x+2.$$

になります。Cardano の公式を使うと，

$$x = \sqrt[3]{1+\sqrt{1^2-1^3}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{1^2-1^3}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2.$$

実際，

$$2^3 = 8 \qquad \text{and} \qquad 3(2) + 2 = 8.$$

2.2　もっと奇妙な例

今度は$p = 5$，$q = 2$ としてみます。このとき方程式は

$$x^3 = 15x + 4.$$

になります。Cardano の公式は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 - 5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 - 5^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

を与えます。

一見すると，これは実数の範囲では不可能に見えます。というのも，$\sqrt{-121}$ は実数ではないからです。しかし，もとの方程式そのものは確かに実数解をもちます。実際，

$$x = 4, \qquad x = -2 + \sqrt{3}, \qquad x = -2 - \sqrt{3}$$

はいずれも

$$x^3 = 15x + 4.$$

を満たします。

ここで驚くべきことが起きています。つまり，実数係数の方程式に対する公式が，途中計算で負の数の平方根を通るのです。これこそが，数学者たちが数の体系を拡張せざるをえなかった理由でした。

歴史的動機

Cardano の公式は，多項式方程式が実数解をもつ場合であっても，計算の途中で負の数の平方根が必要になることを示した。これは，複素数を導入する歴史的理由の主要な1つである。

Exercise 2

1. $x = -2$ が$x^3 = 3x - 2$ を満たすことを直接確かめよ。
2. $x = 3$ が$x^3 = 6x + 9$ を満たすことを直接確かめよ。
3. 実数しか認めないなら，$\sqrt{-16}$ がなぜ問題になるのかを説明せよ。

3　虚数

3.1　虚数単位

負の数の平方根を扱うために，新しい記号

$$i = \sqrt{-1}.$$

を導入します。これを虚数単位と呼びます。その定義的性質は

$$i^2 = -1.$$

です。

この記号を導入すると，負の実数の平方根はすべてi-form で書き直せます。$c > 0$ なら，

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c(-1)} = \sqrt{c}\sqrt{-1} = \sqrt{c}\,i.$$

例えば，

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11i,$$
$$\sqrt{-16} = 4i,$$

および

$$\sqrt{-54} = \sqrt{54}\sqrt{-1} = 3\sqrt{6}\,i.$$

負の平方根をi-form で書く

$c > 0$ のとき，

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\,i.$$

標準的なi-form で答えを書くときは，i は根号の外に書く。

3.2　虚数の計算

すべてをi-form に書き直してしまえば，計算は簡単です。実数a，b に対して，

$$ai + bi = (a + b)i,$$

$$ai - bi = (a - b)i,$$

および

$$(ai)(bi) = ab\,i^2 = -ab.$$

したがって，例えば

$$\sqrt{-9} + \sqrt{-49} = 3i + 7i = 10i,$$

また

$$\sqrt{-32} - 2\sqrt{-2} = 4\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,i.$$

Exercise 3

各数をi-form で書け。

1. $\sqrt{-36}$
2. $\sqrt{-\dfrac{16}{25}}$
3. $\sqrt{-80}$
4. $\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}}$

Exercise 4

各計算を行え。

1. $\sqrt{-4} + \sqrt{-64}$
2. $\sqrt{-18} - \sqrt{-8}$
3. $\sqrt{-16} + \sqrt{-25}$
4. $\sqrt{-75} - 5\sqrt{-3}$

4 複素数

4.1 定義

複素数とは

$$a + bi,$$

の形の数のことです。ここでa とb は実数です。数a を実部，bi を虚部と呼びます。もし$b = 0$ なら，その複素数は単なる実数です。もし$a = 0$ かつ$b \neq 0$ なら，その複素数を純虚数と呼びます。

> **複素数の定義**
>
> $a, b \in \mathbb{R}$ のとき，
>
> $$z = a + bi$$
>
> を複素数という。通常，これを複素数の標準形という。

複素数全体は$\mathbb{C}$ と書きます。これは実数全体$\mathbb{R}$ を含み，さらに$\mathbb{R}$ は有理数全体$\mathbb{Q}$，整数全体$\mathbb{Z}$，自然数全体$\mathbb{N}$ を含みます。

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

4.2 複素数の等しさ

2つの複素数が等しいのは，実部どうしが等しく，かつ虚部どうしが等しいときに限ります。記号で書けば，

$$a + bi = c + di \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \text{ and } b = d.$$

例えば，

$$2^2 + 3i = 4 - (2 - 5)i$$

です。なぜなら$2^2 = 4$ であり，また$3 = -(2 - 5) = 3$ だからです。

同様に，

$$(3 - 2) - i = i + 3 - (4 + 2i) + 2$$

です。左辺は

$$1 - i,$$

であり，右辺は

$$3 + i - 4 - 2i + 2 = 1 - i.$$

となるからです。

しかし，

$$7 - i^2 \neq 6,$$

です。というのも，

$$7 - i^2 = 7 - (-1) = 8.$$

だからです。

Exercise 5

次の組が等しいかどうかを判定せよ。

1. $1 + 4i$ and $3 - (2 - 4i)$
2. $(4 + i) - (1 - 3i)$ and $3 + 4i$
3. $5 - 2i^2$ and 3

5　複素数の四則演算

5.1　加法と減法

複素数を足したり引いたりするときは，実部どうしと虚部どうしを別々にまとめます。

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

これは，代数で同類項をまとめるのとよく似ています。

例えば，

$$(3 - i) + (-2 + 4i) = 1 + 3i,$$
$$3i + (5 - 3i) = 5,$$

および

$$4 - (-1 + 5i) + (7 + 2i) = 12 - 3i.$$

5.2　乗法

複素数を掛けるときは普通どおり展開し，$i^2 = -1$ を使います。

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

$i^2 = -1$ なので，

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

例えば，

$$(2 + 3i)(1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 14 - 5i.$$

複素数の演算

複素数$a+bi$ と$c+di$ に対して，

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Exercise 6

各式を簡単にせよ。

1. $(2+5i)+(-1-3i)$
2. $4i+(7-4i)$
3. $6-(-2+3i)+(1-5i)$
4. $(6+3i)+(2-\sqrt{-8})-\sqrt{-4}$
5. $(1+2i)(3-i)$

6　複素共役と除法

6.1　複素共役

もし

$$z=a+bi,$$

なら，その複素共役は

$$\overline{z}=a-bi.$$

です。

これは，前回学んだ根号の共役とまったく同じ発想です。複素数にその共役を掛けると，虚数部分が打ち消し合います。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

したがって，複素数とその共役の積は，常に非負の実数になります。

例えば，

$$(3-4i)(3+4i)=9+16=25.$$

共役との積

$z=a+bi$ なら，

$$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

6.2 複素数による除法

共役を使うと，複素数で割ることができます。$c + di \neq 0$ とすると，

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}.$$

分母は

$$(c+di)(c-di) = c^2 + d^2,$$

となって実数になります。展開すると，

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

例として，

$$\frac{4+7i}{2-3i} = \frac{4+7i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(4+7i)(2+3i)}{2^2+3^2}.$$

分子を展開すると，

$$(4+7i)(2+3i) = 8 + 12i + 14i + 21i^2 = -13 + 26i,$$

したがって

$$\frac{4+7i}{2-3i} = -1 + 2i.$$

同様に，

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1+i+2i+2i^2}{2} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

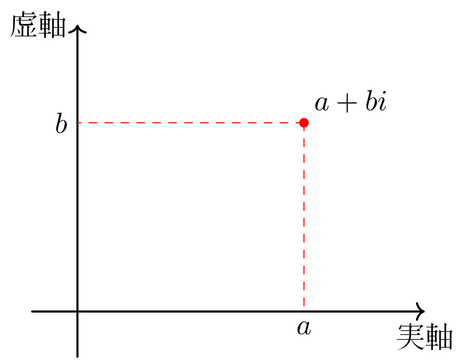
Exercise 7

1. $2 + 5i$ の共役を求め，その数と共役との積を求めよ。
2. $\dfrac{3+5i}{1-2i}$ を簡単にせよ。
3. $\dfrac{2-i}{2+i}$ を簡単にせよ。

7 複素数の幾何

7.1 アルガン平面

複素数$a + bi$ は，平面上の点(a, b) として表すことができます。横軸は実部を表し，縦軸は虚部を表します。この図をアルガン平面と呼びます。

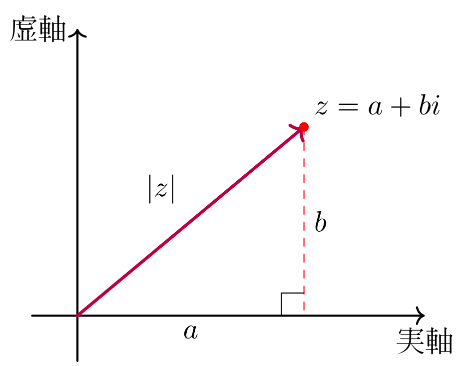


この見方をすると，複素数はそれほど神秘的なものではありません。それは単に実数の順序対であり，そこに特に便利な乗法規則が加わっているだけです。

7.2　大きさ

$z = a + bi$ のとき，原点から点(a, b) までの距離をz の大きさまたは絶対値と呼び，$|z|$ と書きます。ピタゴラスの定理により，

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



例えば，

$$z = 3 - 4i,$$

なら，

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

7.3　いくつかの幾何学的事実

複素共役

$$a + bi \longmapsto a - bi$$

は，点を実軸に関して反転させます。これは原点からの距離を変えないので，共役は大きさを保ちます。

$$|a + bi| = |a - bi|.$$

また，複素数にi を掛けることは，平面で4分の1回転させることに対応します。特に，i，$-i$，または-1 を掛けても，大きさは変わりません。

さらに，複素数は加法と実数倍をもつので，通常のベクトルの言葉もそのまま使えます。この意味で，$\mathbb{C}$ は$\mathbb{R}$ 上の2次元ベクトル空間と見ることができます。ただし，それに加えて乗法という演算も備わっています。

大きさ

$z = a + bi$ なら，

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

また，

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Exercise 8

$z = -1 + 2i$ とする。

1. z の実部と虚部を述べよ。
2. z の複素共役を求めよ。
3. $|z|$ を求めよ。
4. $z\overline{z}$ を計算し，$|z|^2$ と比較せよ。

練習問題の解答

Exercise 1

1. $$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$
2. $$\frac{5}{3-\sqrt{5}} = \frac{5}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{15+5\sqrt{5}}{4}.$$
3. $$\sqrt{3x+1} = 5 \quad\Longrightarrow\quad 3x+1 = 25 \quad\Longrightarrow\quad 3x = 24 \quad\Longrightarrow\quad x = 8.$$

Exercise 2

1. $$(-2)^3 = -8 \qquad \text{and} \qquad 3(-2) - 2 = -8.$$
   したがって$x = -2$ は解である。
2. $$3^3 = 27 \qquad \text{and} \qquad 6(3) + 9 = 18 + 9 = 27.$$
   したがって$x = 3$ は解である。

3. 実数の範囲では，$\sqrt{a}$ が存在するのは$a \geq 0$ のときに限る。$-16 < 0$ なので，$\sqrt{-16}$ は実数ではない。

Exercise 3

1. $$\sqrt{-36} = \sqrt{36}\sqrt{-1} = 6i.$$

2. $$\sqrt{-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}}\sqrt{-1} = \frac{4}{5}i.$$

3. $$\sqrt{-80} = \sqrt{80}\sqrt{-1} = 4\sqrt{5}\,i.$$

4. $$\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}} = \frac{4\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i} = 4.$$

Exercise 4

1. $$\sqrt{-4} + \sqrt{-64} = 2i + 8i = 10i.$$

2. $$\sqrt{-18} - \sqrt{-8} = 3\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\,i.$$

3. $$\sqrt{-16} + \sqrt{-25} = 4i + 5i = 9i.$$

4. $$\sqrt{-75} - 5\sqrt{-3} = 5\sqrt{3}\,i - 5\sqrt{3}\,i = 0.$$

Exercise 5

1. はい。なぜなら
$$3 - (2 - 4i) = 3 - 2 + 4i = 1 + 4i.$$

2. はい。なぜなら
$$(4 + i) - (1 - 3i) = 4 + i - 1 + 3i = 3 + 4i.$$

3. いいえ。なぜなら
$$5 - 2i^2 = 5 - 2(-1) = 7 \neq 3.$$

Exercise 6

1. $$(2 + 5i) + (-1 - 3i) = 1 + 2i.$$

2. $$4i + (7 - 4i) = 7.$$

3. $$6 - (-2 + 3i) + (1 - 5i) = 6 + 2 - 3i + 1 - 5i = 9 - 8i.$$

4. まず根号をi-form に直す：

$$\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}\,i, \qquad \sqrt{-4} = 2i.$$

したがって

$$(6+3i) + (2-\sqrt{-8}) - \sqrt{-4} = (6+3i) + (2-2\sqrt{2}\,i) - 2i = 8 + (1-2\sqrt{2})i.$$

5.

$$(1+2i)(3-i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i.$$

Exercise 7

1. $2+5i$ の共役は$2-5i$ であり，

$$(2+5i)(2-5i) = 2^2 + 5^2 = 29.$$

2.

$$\frac{3+5i}{1-2i} = \frac{3+5i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(3+5i)(1+2i)}{1^2+2^2}.$$

展開すると，

$$(3+5i)(1+2i) = 3 + 6i + 5i + 10i^2 = -7 + 11i.$$

よって

$$\frac{3+5i}{1-2i} = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i.$$

3.

$$\frac{2-i}{2+i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(2-i)(2-i)}{2^2+1^2}.$$

展開すると，

$$(2-i)(2-i) = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i.$$

したがって

$$\frac{2-i}{2+i} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Exercise 8

$z = -1 + 2i$ とする。

1. 実部は-1，虚部は$2i$ である。
2. 複素共役は

$$\overline{z} = -1 - 2i.$$

3.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

4.

$$z\overline{z} = (-1+2i)(-1-2i) = 1 + 4 = 5.$$

また，

$$|z|^2 = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

したがって，たしかに

$$z\overline{z} = |z|^2.$$