MAT140 — 第19讲讲义
二次方程

上节课我们引入了根式和复数。在课程更早的时候，我们还学习了因式分解、方程的图像，以及函数的基本语言。在本节课中，我们将把这些零散的线索联系起来。二次方程处在本课程若干主题的中心，因为它们可以通过两种互补的方式来研究：代数地，即通过符号运算使方程显露其解；以及几何地，即把这些解解释为图像的某些特征。

今天我们将从这两个角度完成对二次问题的讨论。在代数方面，我们会回顾几种求解二次方程的方法，解释配方法的思想，推导求根公式，并利用判别式来预测解的类型。在几何方面，我们将研究二次函数的图像，确定它们的顶点和对称轴，并学习如何由方程描绘抛物线。从这个意义上说，这一讲也可以看作是本课程若干主题的一个小结：因式分解、根式、复数，以及代数与几何之间的对应关系。

今天我们将：

1. 回顾求解二次方程的主要代数方法。
2. 引入二次形式方程，并通过代换来求解。
3. 从代数和几何两个角度解释配方法。
4. 推导并应用求根公式，并解释判别式。
5. 研究二次函数的图像，包括顶点式、对称轴以及基本作图。
6. 根据几何信息写出抛物线的方程。

和之前的讲义一样，我们的目标并不仅仅是记住公式。我们希望理解公式从何而来，为什么不同的方法有效，以及代数实际上在说明图像的哪些几何信息。

1 二次方程及其解

回忆一下，二次方程是指变量的最高次数为2 的方程。其一般形式为

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

其中a、b 和c 都是实数，并且$a \neq 0$。例如：

$$x^2 + 5x - 24 = 0, \qquad 3x^2 + 11x - 4 = 0, \qquad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

为了解一个二次方程，我们希望找出所有能使方程成立的x 的取值。根据具体方程的不同，它可能有两个不同的解，一个重根，或者根本没有实数解。现在我们来讨论三种初步的二次方程求解方法。

1.1 方法1：因式分解

当一个二次多项式可以因式分解时，最简单的方法通常就是利用零因子性质。例如，

$$x^2 + 5x = 24$$

先写成一般形式：

$$x^2 + 5x - 24 = 0.$$

这个多项式可以分解为

$$(x+8)(x-3)=0.$$

因此，

$$x+8=0 \quad \text{或} \quad x-3=0,$$

所以解为$x=-8$ 和$x=3$。支撑这一方法的正是所谓的零因子性质，我们在第10 讲中已经见过它。

零因子性质

如果$ab=0$，那么至少有一个因子必须为零。换句话说，

$$ab=0 \quad \Longrightarrow \quad a=0 \text{ 或} b=0.$$

这个性质只在方程右边等于零时适用。因此，若要用这种方法解二次方程，有时必须先对方程进行整理。为了说明这一点，考虑方程$3x^2+11x=4$。它可以通过因式分解求解，但我们必须先整理：

$$3x^2+11x-4=0 \qquad \Rightarrow \qquad (3x-1)(x+4)=0,$$

所以其解为

$$x=\frac{1}{3} \qquad \text{和} \qquad x=-4.$$

此时应当注意，因式分解并不总是进行得很顺利。有些二次式无法在整数范围内分解，有些甚至根本不能在实数范围内分解。因此，我们有时需要使用其他方法。

练习1

解下列各方程。

1. $x^2+2x=15$
2. $2x^2=7-5x$
3. $x^4-10x^2+9=0$

1.2 方法2：平方根性质

第二种有用的方法出现在二次方程能够写成如下形式时：

$$(\text{某个式子})^2=k.$$

在这种情况下，我们可以应用平方根性质来一般地求解。在第17 讲讨论平方根时，我们强调过取主平方根，例如我们会写$\sqrt{4}=2$，而不是写成$\sqrt{4}=\pm 2$。但是，当我们求解含有变量的方程时，情况就不同了。若我们写出

$$x^2=4,$$

那么我们注意到现在有两个实数能使这个等式成立，即$x=2$ 以及 $x=-2$。因此，解为$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$。

例如，考虑方程$3x^2=15$。两边同时除以3 得到

$$x^2=5 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm\sqrt{5}.$$

这种方法也自然地与第18 讲中的复数联系起来。例如，考虑方程$x^2+8=0$。注意到这个方程无法因式分解，并且改写为$x^2=-8$ 后，我们可以看出它没有实数解。然而，如果我们将其整理为$x^2=-8$，再使用平方根性质，就可以得到该方程的复数解：

$$x^2+8=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=-8 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}\,i=\pm2\sqrt{2}\,i.$$

平方根性质

给定一个代数式u，若$u^2=k$，则

$$u=\pm\sqrt{k}.$$

当$k>0$ 时，这给出两个实数解。当$k=0$ 时，这给出一个重根。当$k<0$ 时，解为非实复数。

应当指出，这种方法适用于代数式，而不只是单独的变量。例如，考虑方程$(x-2)^2=10$。我们可以先开平方，得到：

$$x-2=\pm\sqrt{10}.$$

整理后得到一对解：

$$x=2\pm\sqrt{10}.$$

练习2

利用平方根性质解下列方程。

1. $5x^2=45$
2. $(x+1)^2=7$
3. $(3x-6)^2-8=0$
4. $x^2+12=0$
5. $(x-4)^2=-3$

1.3 方法3：二次形式方程

有时，一个方程并不是关于x 的真正二次方程，但经过代换后会变成二次方程。例如，

$$x^4-13x^2+36=0$$

并不是关于x 的二次方程，但若令$u=x^2$，则方程化为：

$$u^2-13u+36=0,$$

这就是一个二次方程。这个方程可以通过因式分解来求解：

$$(u-4)(u-9)=0 \qquad\Rightarrow\qquad u=4 \quad\text{或}\quad u=9.$$

现在，我们利用$x^2=u$，把这些解代回去，求出关于x 的解：

$$x^2=4 \quad\Longrightarrow\quad x=\pm2,$$

以及

$$x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3.$$

所以，原方程有四个解：

$$x = -3, \, -2, \, 2, \, 3.$$

这种技巧适用于许多指数呈重复模式的方程，例如x^4 和x^2，或者x 和$\sqrt{x}$，或者$x^{2/3}$ 和$x^{1/3}$。不过，在某些情形下，代回之后还必须检查定义域限制。

通过代换求解二次形式方程

如果一个方程可以通过代换

$$u = \text{（某个关于}x\text{ 的表达式）},$$

改写为

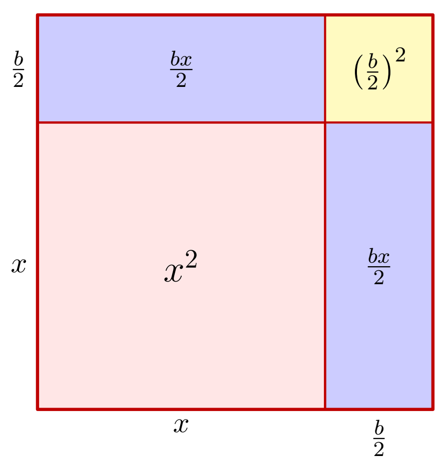
$$au^2 + bu + c = 0,$$

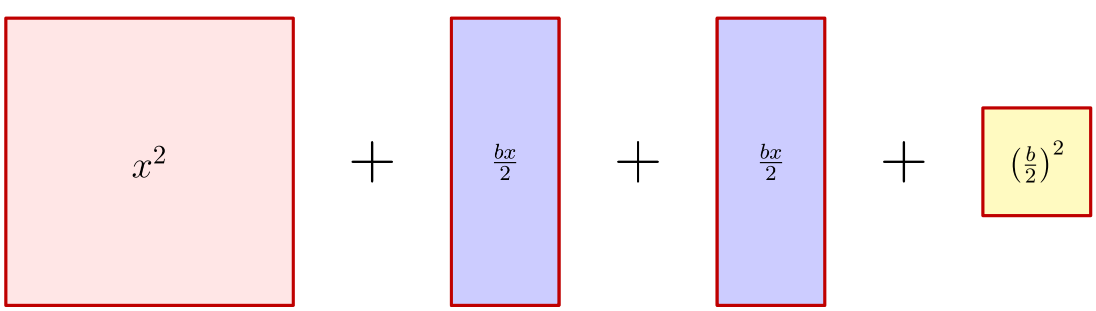
那么我们可以先解u，然后再回到x。

2 配方法

2.1 几何思想

考虑一个边长为$x + \frac{b}{2}$ 的正方形。我们可以把这条边分成一段长度为x 和一段长度为$\frac{b}{2}$，因此整个正方形的面积可以表示为若干部分的和：





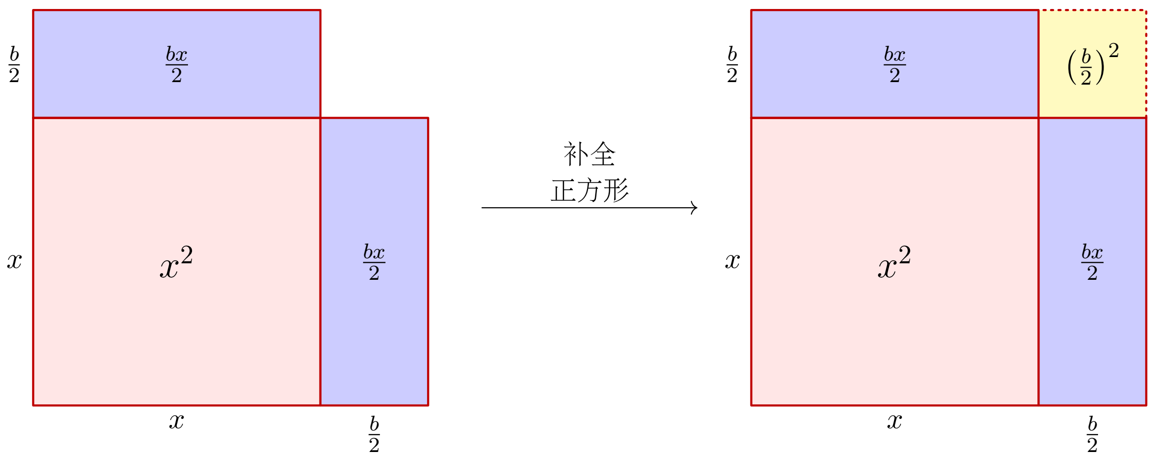
由于整个正方形的面积等于$(x+\frac{b}{2})^2$，因此上图可以理解为FOIL 展开的一个几何实现：

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

现在设我们有表达式

$$x^2+bx.$$

我们注意到它不能直接写成一个完全平方。但是，它非常接近。如果我们加上额外的一项$(\frac{b}{2})^2$，那么就能得到一个可以写成$(x+\frac{b}{2})^2$ 的表达式。这个过程称为配方法，因为从几何上看，我们是在"补全一个正方形"：



配方法

要把表达式

$$x^2+bx,$$

配成完全平方，需要加上x 的系数一半的平方：

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2.$$

例如，如果我们想对

$$x^2-8x$$

进行配方，那么x 的系数是-8，所以我们加上$(\frac{-8}{2})^2=16$：

$$x^2-8x+16=(x-4)^2.$$

2.2 用配方法解方程

配方法也可以用来解二次方程。不过在这样做时，必须记住：配方实际上改变了原来的表达式，因为我们在表达式上增加了一项。因此，如果只对一边配方，是有风险的：若我们在方程一边加了某个量，那么为了保持等式成立，就必须在另一边也加上同样的量。

利用配方法解方程

用配方法解二次方程时：

1. 把常数项移到方程另一边。
2. 如有必要，将方程两边同时除以一个数，使x^2 的系数变为1。
3. 在方程两边同时加上x 的系数一半的平方。
4. 将左边改写成一个平方。
5. 使用平方根性质。

作为第一个例子，考虑方程：

$$x^2 + 12x = 0.$$

事实上，凭观察我们已经知道$x = 0$ 或$x = -12$ 都是这个方程的解。不过现在我们将用配方法来证明这一点。这里我们看到$b = 12$，所以配方得到

$$x^2 + 12x \longrightarrow x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2.$$

如果我们想在原方程中这样做，就必须在两边同时加上36：

$$x^2 + 12x + 36 = 36.$$

由于左边现在已经是一个平方，我们可以开平方：

$$(x+6)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x + 6 = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

因此$x = -6 \pm 6$，这给出两个解：$x = 0$ 和$x = -12$，正如预期。

作为一个更复杂的例子，考虑方程$2x^2 - x - 2 = 0$。为了解它，我们先把常数项移到等号右边，再除以2：

$$2x^2 - x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{1}{2}x = 1.$$

这里我们注意到，方程左边可以配成一个平方，此时$b = -\frac{1}{2}$。所以我们在两边同时加上

$$\left(\frac{-1/2}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

得到：

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}.$$

完成这一步后，我们就可以利用恒等式$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$，并取$b = -\frac{1}{2}$，从而得到：

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}.$$

对两边开平方可得

$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4},$$

因此：

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

练习3

把下列表达式改写成配方后的形式。

1. x^2+4x
2. x^2+12x
3. x^2-6x
4. $2x^2-12x$

练习4

利用配方法解下列方程。

1. $x^2-8x+3=0$
2. $3x^2+6x-9=0$

3 求根公式与判别式

3.1 推导求根公式

在前面的例子中，我们通过把方程$2x^2-x-2=0$ 整理成左边为x^2+bx 的形式，从而利用配方法求得它的解。从某种意义上说，我们也可以对一般的二次方程采取同样的思路。设我们有方程

$$ax^2+bx+c=0,$$

其中$a\neq 0$。先把c 移到等号右边，再除以a，可得：

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

接着，我们对左边进行配方：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

由于左边现在已经是一个平方，我们就可以因式分解并开平方：

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}. \qquad (*)$$

根号里面的式子可以利用指数运算规则以及通分来化简：

$$-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

对这个式子开平方，有：

$$\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

因此，方程(∗) 可化简为：

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

上面的等式给出了求解一般二次方程的一个通用方法：只需把a、b 和c 的值代入公式，所得结果就会给出原二次方程的解。这当然就是著名的求根公式。

求根公式

若

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0,$$

则其解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这个公式是最可靠的一般方法，因为它适用于每一个二次方程，并会根据情况给出实数解或复数解。

例如，考虑方程：

$$x^2+6x=16.$$

写成一般形式为

$$x^2+6x-16=0 \qquad\Longrightarrow\qquad a=1, b=6,\ 且 c=-16.$$

利用求根公式，我们有：

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-16)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm 10}{2}.$$

因此，

$$x=2 \qquad 或 \qquad x=-8.$$

练习5

利用求根公式解方程

$$x^2+4x=5.$$

3.2 判别式

在求根公式内部，出现了量

$$b^2-4ac.$$

这称为判别式。它非常重要，因为它告诉我们二次方程的解是什么类型。

判别式

对于二次方程

$$ax^2+bx+c=0,$$

其判别式为

$$\Delta=b^2-4ac.$$

它的符号决定了解的性质。当a、b 和c 都是有理数时，我们还可以更精确地说：

1. 如果Δ 是正的完全平方数，则有两个不同的有理解。
2. 如果$\Delta>0$ 但不是完全平方数，则有两个不同的无理实数解。
3. 如果$\Delta=0$，则有一个重实根。
4. 如果$\Delta<0$，则有两个不同的虚数解。

下面我们通过三个例子来判断二次方程解的类型。

- 方程$x^2-x+2=0$ 中$a=1$、$b=-1$、$c=2$，所以其判别式为：

$$(-1)^2-4(1)(2)=1-8=-7<0.$$

  这里判别式小于零，所以这个方程有两个非实复数解。
- 方程$2x^2-3x-2=0$ 中$a=2$、$b=-3$、$c=-2$，所以其判别式为：

$$(-3)^2-4(2)(-2)=9+16=25.$$

  这是一个正的完全平方数，因此它有两个不同的有理解。
- 方程$x^2-2x+1=0$ 中$a=1$、$b=-2$、$c=1$，所以其判别式为：

$$(-2)^2-4(1)(1)=4-4.$$

  这等于零，因此该方程有一个重实根。

练习6

利用判别式判断下列各方程解的类型。

1. $x^2+4x+7=0$
2. $3x^2-x-2=0$
3. $x^2+6x+9=0$
4. $x^2-2x-1=9$

4 二次函数的图像

4.1 抛物线、顶点式与对称性

二次函数的一般形式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,\qquad a\neq 0.$$

它的图像称为抛物线。对于作图来说，最有用的形式是配方后的形式

$$f(x) = a(x-h)^2 + k.$$

这通常称为顶点式。从这个形式中，我们可以立刻读出关键的几何信息。

抛物线的顶点式

对于

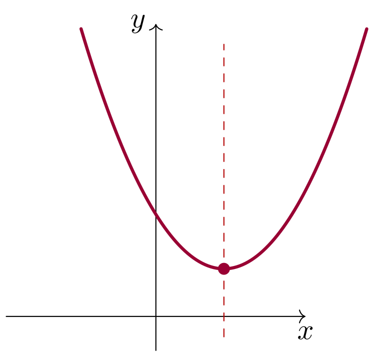
$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

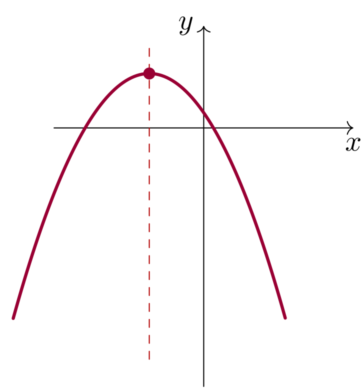
其中$a \neq 0$:

- 图像是一条抛物线，
- 顶点是(h, k)，
- 对称轴是$x = h$。

因为$(x-h)^2 \geq 0$，所以当$a > 0$ 时，顶点的y 坐标k 是最小值；当$a < 0$ 时，k 是最大值。

每一条抛物线都关于其对称轴对称。这意味着，如果沿着对称轴把图像折叠起来，那么两边会完全重合。





4.2 通过配方法求顶点

如果一个二次函数没有以顶点式给出，那么我们可以通过配方来找出它的顶点。例如，考虑函数

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

对前两项配方，得到：

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4.$$

因此，顶点是

$$(3, -4).$$

由于平方项的系数为正，抛物线开口向上，因此-4 是函数的最小值。

4.3 一般的顶点公式

更一般地，我们也可以通过配方法求出形如

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

的函数的顶点。若先从前两项中提取a，则得到

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

在括号内配方可得：

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

因此

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

从这个形式中我们可以读出，对称轴为

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

对称轴公式

对于二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

其对称轴为

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

这通常是确定顶点x 坐标的最快方法。

4.4 描绘抛物线

要描绘一条抛物线，最有效的策略通常是：

1. 通过配方法或利用$x = -\frac{b}{2a}$ 确定顶点和对称轴；
2. 标出顶点、对称轴、y-截距，以及存在时的x-截距；
3. 利用对称性得到更多点；
4. 根据a 的符号判断图像开口向上还是向下。

考虑

$$y = x^2 + 6x + 8.$$

配方得到

$$y = x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 = (x+3)^2 - 1.$$

因此顶点是

$$(-3, -1),$$

对称轴是

$$x = -3.$$

令$x = 0$ 可求得y-截距：

$$y = 8,$$

所以图像经过点$(0, 8)$。

x-截距可通过解方程

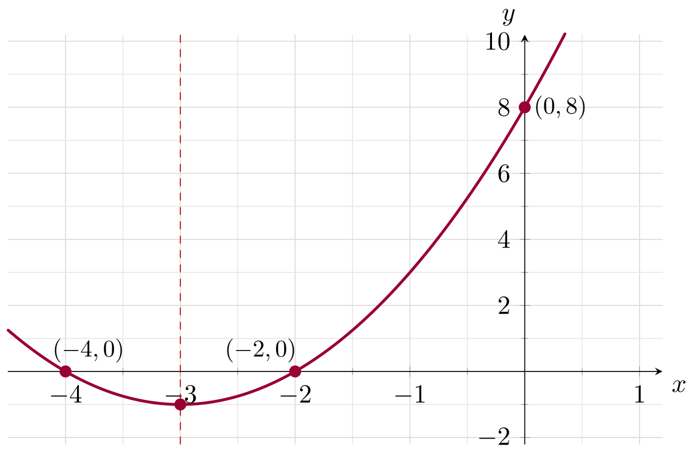
$$x^2 + 6x + 8 = 0 = (x+4)(x+2)$$

得到。因此

$$x = -4 \qquad \text{或} \qquad x = -2,$$

所以图像与x-轴交于

$$(-4, 0) \qquad \text{和} \qquad (-2, 0).$$



由于首项系数为正，抛物线开口向上。实际上，这条图像也可以看作是$y = x^2$ 的图像向左平移3 个单位，再向下平移1 个单位得到的。

练习7

对于二次函数

$$f(x) = x^2 + 4x + 1,$$

求：

1. 顶点，
2. 对称轴，
3. 函数的最小值或最大值。

练习8

描绘抛物线

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

求它的顶点、对称轴、x-截距和y-截距。

5 写出抛物线的方程

如果一条抛物线的对称轴垂直于x-轴，且顶点为(h, k)，那么它的方程具有形式

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

唯一未知的是参数a，它决定抛物线是如何伸缩的，以及它是开口向上还是向下。

假设已知一条抛物线的顶点是$(-2,1)$，且y-截距是$(0,-3)$。由于顶点为$(h,k)=(-2,1)$，其方程必为

$$y=a(x+2)^2+1.$$

现在利用点$(0,-3)$ 在图像上这一事实：

$$-3=a(0+2)^2+1.$$

所以

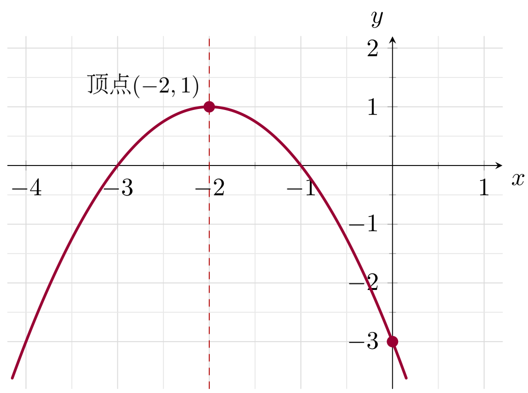
$$-3=4a+1,$$

这说明

$$-4=4a \qquad \Longrightarrow \qquad a=-1.$$

因此方程为

$$y=-(x+2)^2+1.$$



由顶点写方程

如果抛物线的顶点为(h,k)，那么先写成

$$y=a(x-h)^2+k.$$

然后再代入一个已知点的坐标，以确定a 的值。

练习9

写出顶点为$(1,-2)$，且y-截距为$(0,1)$ 的抛物线方程。

练习解答

练习1

1.

$$x^2+2x=15 \quad \Longrightarrow \quad x^2+2x-15=0 \quad \Longrightarrow \quad (x+5)(x-3)=0.$$

因此

$$x = -5 \qquad 或 \qquad x = 3.$$

2.

$$2x^2 = 7 - 5x \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2x+7)(x-1) = 0.$$

因此

$$x = -\frac{7}{2} \qquad 或 \qquad x = 1.$$

3. 令$u = x^2$。则

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^2 - 10u + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (u-1)(u-9) = 0.$$

所以$u = 1$ 或$u = 9$。因此

$$x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1, \qquad x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3.$$

解为

$$x = -3, \, -1, \, 1, \, 3.$$

练习2

1.

$$5x^2 = 45 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3.$$

2.

$$(x+1)^2 = 7 \quad \Longrightarrow \quad x + 1 = \pm\sqrt{7} \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{7}.$$

3.

$$(3x-6)^2 - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3x-6)^2 = 8.$$

因此

$$3x - 6 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2},$$

所以

$$3x = 6 \pm 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

4.

$$x^2 + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -12 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-12} = \pm 2\sqrt{3}\, i.$$

5.

$$(x-4)^2 = -3 \quad \Longrightarrow \quad x - 4 = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\, i.$$

因此

$$x = 4 \pm \sqrt{3}\, i.$$

练习3

1.
$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x+2)^2 - 4.$$

2.
$$x^2 + 12x = x^2 + 12x + 36 - 36 = (x+6)^2 - 36.$$

3.
$$x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9.$$

4. 先提取出2:
$$2x^2 - 12x = 2(x^2 - 6x) = 2\big((x-3)^2 - 9\big) = 2(x-3)^2 - 18.$$

练习4

1.
$$x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x = -3.$$
两边同时加上16:
$$x^2 - 8x + 16 = 13.$$
所以
$$(x-4)^2 = 13,$$
从而
$$x - 4 = \pm\sqrt{13}.$$
因此
$$x = 4 \pm \sqrt{13}.$$

2.
$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 6x = 9 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x = 3.$$
两边同时加上1:
$$x^2 + 2x + 1 = 4.$$
所以
$$(x+1)^2 = 4,$$
从而
$$x + 1 = \pm 2.$$
因此
$$x = 1 \qquad \text{或} \qquad x = -3.$$

练习5

$$x^2 + 4x = 5 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4x - 5 = 0.$$
在$a = 1$、$b = 4$、$c = -5$ 的情况下使用求根公式，得到
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}.$$
因此
$$x = 1 \qquad \text{或} \qquad x = -5.$$

练习6

1. 对于$x^2+4x+7=0$，
$$\Delta = 4^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12.$$
因为$\Delta < 0$，所以有两个不同的非实复数解。
2. 对于$3x^2-x-2=0$，
$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25.$$
因为25 是正的完全平方数，所以有两个不同的有理解。
3. 对于$x^2+6x+9=0$，
$$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0.$$
因此有一个重实根。
4. 先把
$$x^2 - 2x - 1 = 9$$
改写为
$$x^2 - 2x - 10 = 0.$$
然后
$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44.$$
因为$44 > 0$ 但不是完全平方数，所以有两个不同的无理实数解。

练习7

我们先配方：
$$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3.$$
因此：

1. 顶点是$(-2,-3)$，
2. 对称轴是$x=-2$，
3. 因为抛物线开口向上，所以最小值是-3。

练习8

我们把
$$y = x^2 - 4x + 3$$
改写成配方形式：
$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1.$$
因此：

1. 顶点是$(2,-1)$，
2. 对称轴是$x=2$，
3. y-截距是$(0,3)$，
4. x-截距满足
$$x^2 - 4x + 3 = 0 = (x-1)(x-3),$$
所以截距点为$(1,0)$ 和$(3,0)$。

由于首项系数为正，抛物线开口向上。

练习9

从顶点式开始：

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

顶点为$(1,-2)$ 时，这变成

$$y = a(x-1)^2 - 2.$$

现在利用点$(0,1)$：

$$1 = a(0-1)^2 - 2 = a - 2.$$

所以

$$3 = a.$$

因此抛物线方程为

$$y = 3(x-1)^2 - 2.$$