

MAT140 — 第19講ハンドアウト

二次方程式

前回の講義では、根号と複素数を導入しました。また、このコースの前半では、因数分解、方程式のグラフ、そして関数の基本的な言語も学びました。この講義では、これまでに残っていたこれらの話題を結び合わせます。二次方程式は、このコースのいくつかのテーマの中心にあります。なぜなら、二次方程式は二つの補い合う見方から扱うことができるからです。一つは、記号を操作して方程式が解を明らかにするまで変形する代数的な見方であり、もう一つは、その解をグラフの特徴として解釈する幾何学的な見方です。

今日は、この二つの見方の両方から二次方程式の話をし上げます。代数的な面では、二次方程式を解くためのいくつかの方法を復習し、平方完成の考え方を説明し、二次方程式の解の公式を導出し、判別式を使って解の形を予測します。幾何学的な面では、二次関数のグラフを調べ、その頂点と対称軸を求め、方程式から放物線の概形を描く方法を学びます。この意味で、この講義は、因数分解、根号、複素数、そして代数と幾何の対応という、このコースのいくつかのテーマを小さくまとめる役割を果たします。

今日は次のことを行います：

1. 二次方程式を解くための主要な代数的方法を復習する。
2. 二次形の方程式を導入し、置換によって解く。
3. 平方完成を、代数的にも幾何学的にも説明する。
4. 二次方程式の解の公式を導出し、適用し、判別式を解釈する。
5. 頂点形式、対称軸、基本的な概形を含めて、二次関数のグラフを調べる。
6. 幾何学的な情報から放物線の方程式を書く。

これまでのハンドアウトと同じように、私たちの目標は単に公式を暗記することではありません。公式がどこから来るのか、なぜ異なる方法がうまく働くのか、そして代数がグラフの幾何について実際に何を語っているのかを理解することです。

1 二次方程式とその解

二次方程式とは、変数の最高次数が2である方程式のことでした。一般形は

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

であり、ここで a 、 b 、 c は実数で、 $a \neq 0$ です。例として

$$x^2 + 5x - 24 = 0, \quad 3x^2 + 11x - 4 = 0, \quad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

などがあります。二次方程式を解くとは、この方程式を真にする x の値をすべて求めることです。方程式によって、解が2つ異なることもあれば、重解が1つであることもあり、あるいは実数解をもたないこともあります。これから、二次方程式を解くための最初の3つの方法を見ていきます。

1.1 方法1: 因数分解

二次式が因数分解できるとき、最も簡単な方法は零積の性質を使うことです。例えば、

$$x^2 + 5x = 24$$

はまず一般形に直して

$$x^2 + 5x - 24 = 0.$$

と書きます。この多項式は

$$(x + 8)(x - 3) = 0.$$

と因数分解できます。したがって、

$$x + 8 = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0,$$

より、解は $x = -8$ と $x = 3$ です。この方法を支えているのが、第10講で見た零積の性質です。

零積の性質

$ab = 0$ なら、少なくとも一方の因子は0でなければならない。すなわち、

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ or } b = 0.$$

この性質が使えるのは、右辺が0のときだけです。したがって、この方法で二次方程式を解くには、まず式を移項して整理しなければならないことがあります。これを見るために、方程式 $3x^2 + 11x = 4$ を考えます。これは因数分解で解けますが、まず整理して

$$3x^2 + 11x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x - 1)(x + 4) = 0,$$

とします。よって、解は

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad x = -4.$$

この段階で注意しておくべきことは、因数分解はいつも都合よくできるわけではないということです。整数係数では因数分解できない二次式もありますし、実数の範囲ですらまったく因数分解できないものもあります。そのため、別の方法が必要になることがあります。

Exercise 1

各方程式を解け。

1. $x^2 + 2x = 15$
2. $2x^2 = 7 - 5x$
3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

1.2 方法2: 平方根の性質

2つ目の有用な方法は、二次方程式が

$$(\text{something})^2 = k.$$

という形に書けるときに現れます。この場合には、平方根の性質を用いて一般に解くことができます。第17講で平方根を扱ったとき、 $\sqrt{4} = 2$ のように主値を取ることを強調しました。しかし、変数を含む方程式を解くときは事情が異なります。もし

$$x^2 = 4,$$

と書けば、これを満たす実数は $x = 2$ と $x = -2$ の2つあることがわかります。したがって、解は $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ です。

例えば、方程式 $3x^2 = 15$ を考えると、両辺を3で割って

$$x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}.$$

となります。この方法は、第18講の複素数にも自然につながります。例えば、 $x^2 + 8 = 0$ を考えてみましょう。これは因数分解できず、また $x^2 = -8$ と書き直せるので、実数解をもたないことがわかります。しかし、平方根の性質を使えば、この方程式の複素数解を得ることができます。

$$x^2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i = \pm 2\sqrt{2}i.$$

平方根の性質

代数式 u に対して、 $u^2 = k$ なら

$$u = \pm\sqrt{k}.$$

が成り立つ。 $k > 0$ なら2つの実数解、 $k = 0$ なら重解1つ、 $k < 0$ なら非実の複素数解になる。

この方法が使えるのは、単に変数そのものではなく、代数式に対してであることにも注意してください。例えば、 $(x-2)^2 = 10$ という方程式を考えると、まず平方根を取って

$$x - 2 = \pm\sqrt{10}.$$

となり、整理すると解は

$$x = 2 \pm \sqrt{10}.$$

です。

Exercise 2

平方根の性質を使って各方程式を解け。

1. $5x^2 = 45$
2. $(x+1)^2 = 7$
3. $(3x-6)^2 - 8 = 0$
4. $x^2 + 12 = 0$
5. $(x-4)^2 = -3$

1.3 方法3: 二次形の方程式

ときには、方程式が x について文字とおり二次でなくても、置換によって二次方程式になることがあります。例えば、

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

は x については二次方程式ではありませんが、 $u = x^2$ とおくと

$$u^2 - 13u + 36 = 0,$$

となり、これは u についての二次方程式です。この式は因数分解で解けて、

$$(u - 4)(u - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 4 \quad \text{or} \quad u = 9.$$

となります。あとは $x^2 = u$ を使って元に戻せば、

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2,$$

および

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3.$$

です。したがって、もとの方程式は4つの解

$$x = -3, -2, 2, 3.$$

をもちます。

この方法は、 x^4 と x^2 のように指数が繰り返しの形をしている多くの方程式で使えますし、 x と \sqrt{x} 、あるいは $x^{2/3}$ と $x^{1/3}$ のような場合にも使えます。ただし、置換を戻したあとで定義域の制約を確認しなければならないこともあります。

置換による二次形の方程式

ある方程式が

$$u = (\text{some expression in } x),$$

という置換によって

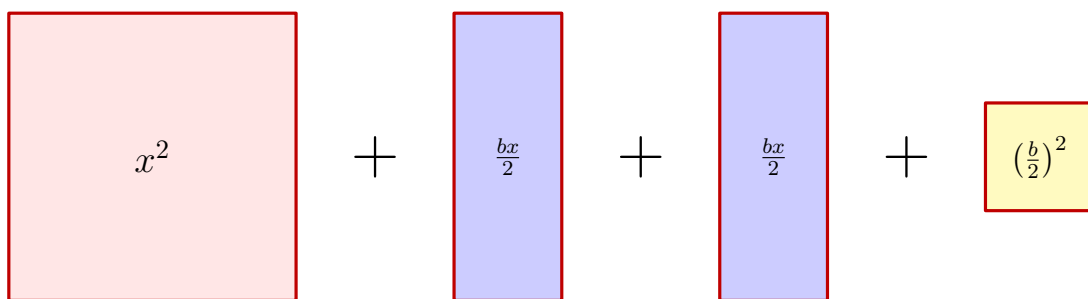
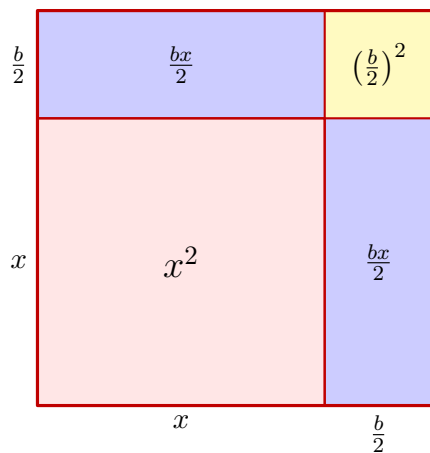
$$au^2 + bu + c = 0,$$

の形に書き直せるなら、まず u について解き、そのあとで x に戻せばよい。

2 平方完成

2.1 幾何学的な考え方

一辺の長さが $x + \frac{b}{2}$ の正方形を考えます。この長さを x と $\frac{b}{2}$ に分けると、正方形全体の面積は和として表せます。



正方形全体の面積は $(x + \frac{b}{2})^2$ なので、上の図はFOIL 展開

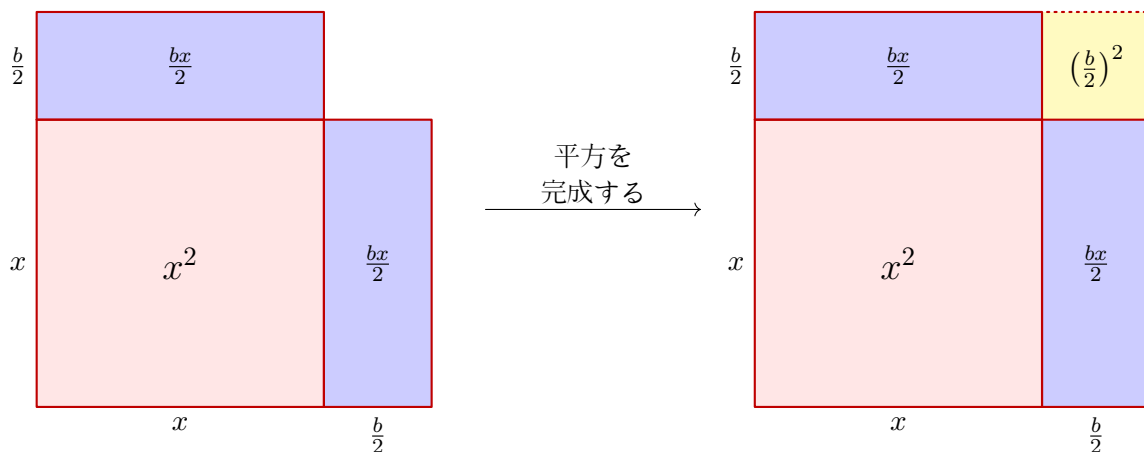
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

の幾何学的な実現になっています。

では、次の式を考えます：

$$x^2 + bx.$$

これはきれいに完全平方としては書けません。しかし、ほとんど完全平方です。もし追加で $(\frac{b}{2})^2$ を足せば、 $(x + \frac{b}{2})^2$ と書けるようになります。この操作を平方完成と呼びます。幾何学的には、次の図のようになっています。



平方完成

式

$$x^2 + bx,$$

を平方完成するには、 x の係数の半分を2乗したものを加える：

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

例えば、

$$x^2 - 8x,$$

を平方完成したいなら、 x の係数は -8 なので、 $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ を加えれば

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2.$$

となります。

2.2 平方完成を使って方程式を解く

平方完成は二次方程式を解くためにも使えます。ただし、平方完成は式に何かを加える操作なので、式そのものを変えてしまうことに注意しなければなりません。したがって、もし方程式の片側に何かを加えるなら、等式を保つために反対側にも同じものを加えなければならないのです。

平方完成による解法

平方完成によって二次方程式を解くには：

1. 定数項を反対側へ移す。
2. 必要なら、 x^2 の係数が1になるように割る。
3. x の係数の半分を2乗したものを両辺に加える。
4. 左辺を平方の形に書き直す。
5. 平方根の性質を使う。

最初の例として、方程式

$$x^2 + 12x = 0.$$

を考えます。もちろん、見るだけで $x = 0$ または $x = -12$ が解だとわかりますが、ここでは平方完成によってこれを示してみます。ここでは $b = 12$ なので、平方完成すると

$$x^2 + 12x \rightarrow x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2.$$

となります。これを元の方程式に使うには、36 を両辺に加えなければなりません。

$$x^2 + 12x + 36 = 36.$$

左辺が平方になったので、平方根を取ると

$$(x + 6)^2 = 36 \Rightarrow x + 6 = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

したがって $x = -6 \pm 6$ であり，解は $x = 0$ と $x = -12$ です。

もう少し複雑な例として，方程式 $2x^2 - x - 2 = 0$ を考えます。これを解くには，まず定数項を移項し，そのあと2で割って

$$2x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x = 1.$$

とします。ここで左辺は平方完成でき， $b = -\frac{1}{2}$ です。したがって

$$\left(\frac{-1/2}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

を両辺に加えて

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}.$$

となります。そして， $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ を $b = -\frac{1}{2}$ に適用すると，

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}.$$

となります。両辺の平方根を取れば

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4},$$

したがって

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

です。

Exercise 3

各式を平方完成した形に書き直せ。

1. $x^2 + 4x$
2. $x^2 + 12x$
3. $x^2 - 6x$
4. $2x^2 - 12x$

Exercise 4

平方完成によって各方程式を解け。

1. $x^2 - 8x + 3 = 0$
2. $3x^2 + 6x - 9 = 0$

3 二次方程式の解の公式と判別式

3.1 二次方程式の解の公式の導出

前の例では、 $2x^2 - x - 2 = 0$ を左辺が $x^2 + bx$ の形になるよう整理し、平方完成を用いて解きました。実はこの考え方は、一般の二次方程式にもそのまま適用できます。そこで、

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

という形の方程式を考えます。ただし $a \neq 0$ です。まず両辺から c を引き、そのあと a で割ると

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

となります。ここで左辺を平方完成すると

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

左辺は平方になっているので、因数分解して平方根を取れば

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}. \quad (*)$$

となります。平方根の中の式は、指数法則と分数の通分を使って簡単にできます。

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

これの平方根を取ると

$$\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

となります。したがって、式(*)は

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

と簡単になります。

この等式は、二次方程式を解くための一般的な処方箋を与えています。つまり、 a, b, c の値を公式に代入すれば、もとの二次方程式の解が求まるのです。これが有名な二次方程式の解の公式です。

二次方程式の解の公式

もし

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

なら、その解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

この公式は、あらゆる二次方程式に適用でき、必要に応じて実数解も複素数解も与えるので、最も信頼できる一般的方法です。

例として、方程式

$$x^2 + 6x = 16.$$

を考えます。一般形にすると

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \implies \quad a = 1, b = 6, \text{ and } c = -16.$$

です。解の公式を使うと、

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}.$$

したがって、

$$x = 2 \quad \text{or} \quad x = -8.$$

Exercise 5

二次方程式の解の公式を使って

$$x^2 + 4x = 5.$$

を解け。

3.2 判別式

二次方程式の解の公式の中には

$$b^2 - 4ac.$$

という量が現れます。これを判別式と呼びます。重要なのは、これが解の種類を教えてくれるからです。

判別式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

に対して、判別式は

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

である。その符号によって解の性質が決まる。特に a, b, c が有理数のときは、さらに次のように言える。

1. Δ が正の完全平方数なら、異なる2つの有理解をもつ。
2. $\Delta > 0$ だが完全平方数でないなら、異なる2つの無理実数解をもつ。
3. $\Delta = 0$ なら、重解を1つもつ。
4. $\Delta < 0$ なら、異なる2つの虚数解をもつ。

判別式の例として、3つの二次方程式について解の種類を判定してみます。

- 方程式 $x^2 - x + 2 = 0$ では $a = 1, b = -1, c = 2$ なので、判別式は

$$(-1)^2 - 4(1)(2) = 1 - 8 = -7 < 0.$$

です。判別式が負なので、この方程式は2つの異なる非実複素数解をもちます。

- 方程式 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ では $a = 2, b = -3, c = -2$ なので、判別式は

$$(-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25.$$

です。これは正の完全平方数なので、異なる2つの有理解をもちます。

- 方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ では $a = 1, b = -2, c = 1$ なので、判別式は

$$(-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4.$$

です。これは0なので、この方程式は重解を1つもちます。

Exercise 6

判別式を使って、各方程式の解の種類を判定せよ。

1. $x^2 + 4x + 7 = 0$
2. $3x^2 - x - 2 = 0$
3. $x^2 + 6x + 9 = 0$
4. $x^2 - 2x - 1 = 9$

4 二次関数のグラフ

4.1 放物線，頂点形式，対称性

二次関数は

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

という形をしています。そのグラフを放物線と呼びます。グラフを描くうえで最も便利なのは

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

という平方完成された形です。これをしばしば頂点形式と呼びます。この形からは、重要な幾何学的情報をすぐに読み取ることができます。

放物線の頂点形式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

という形の二次関数で $a \neq 0$ のとき：

- グラフは放物線である，
- 頂点は (h, k) である，
- 対称軸は $x = h$ である。

$(x - h)^2 \geq 0$ なので、 $a > 0$ のとき頂点の y -座標 k は最小値であり、 $a < 0$ のときは最大値である。

どの放物線も対称軸に関して対称です。つまり、その軸に沿って折りたたむと、左右の半分が一致します。



4.2 平方完成によって頂点を求める

二次関数が頂点形式で与えられていないときには、平方完成によって頂点を求めることができます。例えば、

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

を考えます。最初の2項を平方完成すると

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

です。したがって、頂点は

$$(3, -4).$$

です。平方項の係数が正なので、放物線は上に開き、したがって -4 は関数の最小値です。

4.3 一般的な頂点の公式

より一般に、

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

という形の関数についても、平方完成を使って頂点を求めることができます。最初の2項から a をくり出すと

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c.$$

となります。かっこの中を平方完成すると

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

したがって

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

となります。この形から、対称軸は

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

と読めます。

対称軸の公式

二次関数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

の対称軸は

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

である。これは頂点の x -座標を求める最も速い方法であることが多い。

4.4 放物線の概形を描く

放物線を描くときの最も効率的な手順は、通常次の通りです。

1. 平方完成または $x = -\frac{b}{2a}$ を用いて、頂点と対称軸を求める。
2. 頂点、対称軸、 y -切片、そして存在するなら x -切片を打つ。
3. 対称性を使って追加の点をいくつか求める。
4. a の符号から、上に開くか下に開くかを判断する。

例えば、

$$y = x^2 + 6x + 8.$$

を考えます。平方完成すると

$$y = x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 = (x + 3)^2 - 1.$$

です。したがって頂点は

$$(-3, -1),$$

対称軸は

$$x = -3.$$

です。 y -切片は $x = 0$ として

$$y = 8,$$

より、グラフは $(0, 8)$ を通ります。

x -切片は

$$x^2 + 6x + 8 = 0 = (x + 4)(x + 2).$$

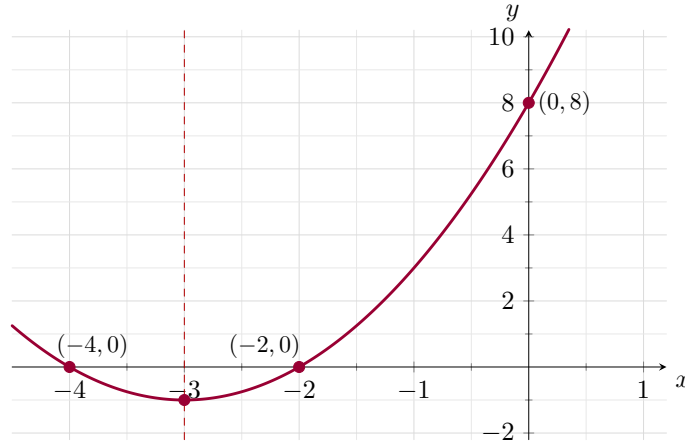
を解いて求めます。したがって

$$x = -4 \quad \text{or} \quad x = -2,$$

より、グラフは

$$(-4, 0) \quad \text{and} \quad (-2, 0).$$

で x -軸と交わります。



最高次の係数が正なので、放物線は上に開きます。実際、このグラフは $y = x^2$ を左へ3だけ、そして下へ1だけ平行移動したものと見ることもできます。

Exercise 7

二次関数

$$f(x) = x^2 + 4x + 1,$$

について、次を求めよ。

1. 頂点
2. 対称軸
3. 最小値または最大値

Exercise 8

放物線

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

の概形を描け。頂点、対称軸、 x -切片、 y -切片を求めよ。

5 放物線の方程式を書く

放物線の対称軸が縦で、頂点が (h, k) なら、その方程式は

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

という形になります。未知なのは係数 a だけで、これは放物線がどれだけ伸びるか、そして上に開くか下に開くかを決めます。

例えば、頂点が $(-2, 1)$ で、 y -切片が $(0, -3)$ だとしましょう。頂点が $(h, k) = (-2, 1)$ なので、方程式は

$$y = a(x + 2)^2 + 1.$$

という形です。さらに $(0, -3)$ がグラフ上にあるので、

$$-3 = a(0 + 2)^2 + 1.$$

したがって

$$-3 = 4a + 1,$$

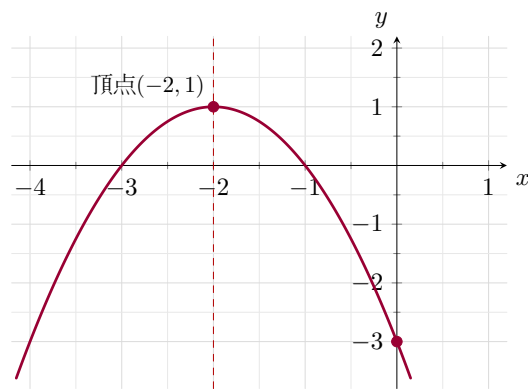
より

$$-4 = 4a \quad \Longrightarrow \quad a = -1.$$

です。ゆえに方程式は

$$y = -(x + 2)^2 + 1.$$

となります。



頂点から方程式を書く

放物線の頂点が (h, k) なら、まず

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

とおく。そのあと、もう1つわかっている点の座標を代入して a の値を決める。

Exercise 9

頂点が $(1, -2)$ 、 y -切片が $(0, 1)$ である放物線の方程式を書け。

練習問題の解答

Exercise 1

1.

$$x^2 + 2x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x + 5)(x - 3) = 0.$$

したがって

$$x = -5 \quad \text{or} \quad x = 3.$$

2.

$$2x^2 = 7 - 5x \implies 2x^2 + 5x - 7 = 0 \implies (2x + 7)(x - 1) = 0.$$

したがって

$$x = -\frac{7}{2} \quad \text{or} \quad x = 1.$$

3. $u = x^2$ とおく。すると

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \implies u^2 - 10u + 9 = 0 \implies (u - 1)(u - 9) = 0.$$

よって $u = 1$ または $u = 9$ 。したがって

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1, \quad x^2 = 9 \implies x = \pm 3.$$

解は

$$x = -3, -1, 1, 3.$$

Exercise 2

1.

$$5x^2 = 45 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3.$$

2.

$$(x + 1)^2 = 7 \implies x + 1 = \pm\sqrt{7} \implies x = -1 \pm \sqrt{7}.$$

3.

$$(3x - 6)^2 - 8 = 0 \implies (3x - 6)^2 = 8.$$

したがって

$$3x - 6 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2},$$

よって

$$3x = 6 \pm 2\sqrt{2} \implies x = 2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

4.

$$x^2 + 12 = 0 \implies x^2 = -12 \implies x = \pm\sqrt{-12} = \pm 2\sqrt{3}i.$$

5.

$$(x - 4)^2 = -3 \implies x - 4 = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i.$$

したがって

$$x = 4 \pm \sqrt{3}i.$$

Exercise 3

1.

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x + 2)^2 - 4.$$

2.

$$x^2 + 12x = x^2 + 12x + 36 - 36 = (x + 6)^2 - 36.$$

3.

$$x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 9.$$

4. まず2 をくくり出す：

$$2x^2 - 12x = 2(x^2 - 6x) = 2((x - 3)^2 - 9) = 2(x - 3)^2 - 18.$$

Exercise 4

1.

$$x^2 - 8x + 3 = 0 \implies x^2 - 8x = -3.$$

両辺に16を加えると

$$x^2 - 8x + 16 = 13.$$

よって

$$(x - 4)^2 = 13,$$

したがって

$$x - 4 = \pm\sqrt{13}.$$

ゆえに

$$x = 4 \pm \sqrt{13}.$$

2.

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \implies 3x^2 + 6x = 9 \implies x^2 + 2x = 3.$$

両辺に1を加えると

$$x^2 + 2x + 1 = 4.$$

よって

$$(x + 1)^2 = 4,$$

したがって

$$x + 1 = \pm 2.$$

ゆえに

$$x = 1 \quad \text{or} \quad x = -3.$$

Exercise 5

$$x^2 + 4x = 5 \implies x^2 + 4x - 5 = 0.$$

$a = 1, b = 4, c = -5$ として解の公式を用いると,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}.$$

したがって

$$x = 1 \quad \text{or} \quad x = -5.$$

Exercise 6

1. $x^2 + 4x + 7 = 0$ について,

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12.$$

$\Delta < 0$ なので, 異なる2つの非実複素数解をもつ。

2. $3x^2 - x - 2 = 0$ について,

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25.$$

25 は正の完全平方数なので, 異なる2つの有理解をもつ。

3. $x^2 + 6x + 9 = 0$ について,

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0.$$

したがって, 重解を1つもつ。

4. まず

$$x^2 - 2x - 1 = 9$$

を

$$x^2 - 2x - 10 = 0.$$

と書き直す。すると

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44.$$

$44 > 0$ だが完全平方数ではないので, 異なる2つの無理実数解をもつ。

Exercise 7

平方完成すると

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3.$$

したがって:

1. 頂点は $(-2, -3)$,
2. 対称軸は $x = -2$,
3. 放物線は上に開くので, 最小値は -3 。

Exercise 8

$$y = x^2 - 4x + 3$$

を平方完成すると

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

したがって:

1. 頂点は $(2, -1)$,
2. 対称軸は $x = 2$,
3. y -切片は $(0, 3)$,
4. x -切片は

$$x^2 - 4x + 3 = 0 = (x - 1)(x - 3),$$

より $(1, 0)$ と $(3, 0)$ 。

最高次の係数が正なので, 放物線は上に開く。

Exercise 9

頂点形式から始める：

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

頂点が $(1, -2)$ なので,

$$y = a(x - 1)^2 - 2.$$

点 $(0, 1)$ を使うと,

$$1 = a(0 - 1)^2 - 2 = a - 2.$$

したがって

$$3 = a.$$

ゆえに方程式は

$$y = 3(x - 1)^2 - 2.$$