MAT140 — 第2讲讲义
代数式

数学作为一种语言

当学习一门新语言时，你通常会学习：

- **新的符号（字母）。** 例如，英语使用像$a, b, c, d, e, \ldots$ 这样的字母。其他语言则使用不同的符号系统。
- **组合符号的规则。** 某种语言中的一个有效单词，在另一种语言中即使使用了相似的字母，也未必是有效的单词。

一个关键点是：符号本身只是一些记号，只有当它们被正确地组合起来，并用来指称某个既有概念时，它们才会获得意义。

数学也是类似的。它有符号、表达式、方程/恒等式，以及告诉我们如何正确组合事物的语法规则。

语言	**数学**
字母	符号
单词	表达式
句子	方程/ 恒等式
语法	规则（性质）

特别地，我们将在本课程中看到的代数，正是沿着这个类比展开的。在整门课中你将会看到：

- 新的符号，
- 操作这些符号的新规则，以及
- 解释这些新事物含义的方法。

在本讲中，我们将从构建这种语言的最基本部分开始：我们会引入一些新符号，并明确说明它们彼此之间的关系。

1 代数表达式的求值

1.1 什么是代数表达式?

代数表达式

代数表达式是由字母（变量）和实数（常数）通过加、减、乘、除等算术运算组合而成的一个对象。

代数表达式是你在代数中能够写下的最基本的东西之一，它们就像我们这门新语言中的单词或短语。一般来说，一个代数表达式由以下成分构成:

- **实数**（常数），例如$1, -7, \frac{1}{2}, 0, \pi, \ldots$
- **变量**，例如$x, y, z, \ldots$（允许变化的数）
- **算术运算**，例如$+$、$-$、$\times$、$\div$（把事物连接起来的方法）
- **括号**： 圆括号(和)。

前三类符号构成了我们这门语言的数学内容，而括号则用来告诉我们运算的先后顺序。从某种意义上说，代数表达式中最有趣的部分就是这些运算：这些运算编码了变量和常数如何组合在一起的"配方"。[1]

代数表达式的例子包括：

$$x^2 - 4x + 5, \qquad 1 + 4x, \qquad 7y - 3x.$$

而不是代数表达式的例子则可能是一些毫无意义的东西，例如：

$$x - + + \times 3, \qquad 2^{\div}, \qquad 4^{x}_{(+} - - \div .$$

显然，这些都没有任何意义，因此它们不是代数表达式。

1.2 项与系数

项

代数表达式的**项**，就是表达式中被加法分开的各个部分。

在实际操作中，减法会被看作"加上一个负的部分"，因此，所谓的项就是把整个表达式都改写成用$+$ 连接之后所看到的那些部分。例如，考虑表达式

$$x^2 - 4x + 5.$$

这里，它的项是x^2、$-4x$ 和5，也就是说，$4x$ 不是一个项。为了正确识别这个表达式的项，把它改写成下面的形式会很有帮助：

$$x^2 - 4x + 5 \ = \ x^2 + (-4x) + 5.$$

正如你所看到的，为了正确识别项，我们需要把所有部分都用$+$ 号分开。

这里一个重要的点是：一个代数表达式的项实际上取决于它是怎样写出来的，而不是取决于它表示的意思。例如，这两个表达式：

$$x - 1 - 2 \qquad \text{和} \qquad x - 3$$

虽然会让人感觉它们是同一个表达式，因为它们表达的是同样的意思，但实际上它们会被看作两个不同的代数表达式，因为前者有三项，而后者只有两项。

例题：识别项

写出每个代数表达式的项。

[1]正如你在课程后面会看到的，即使只用少数几种基本的算术运算，我们也能构造出丰富而有趣的代数结构。我们学习这门新的"代数语言"的方式会比较缓慢：先从最简单的例子和概念开始，然后一步一步走向高处。

1. $x+2$ 答： x 和2
2. $x+\frac{1}{2}$ 答： x 和$\frac{1}{2}$
3. $2y-5x-7$ 答： $2y$、$-5x$ 和-7
4. $5(x-3)+3x-4$ 答： $5(x-3)$、$3x$ 和-4
5. $4-6x+\dfrac{x+9}{3}$ 答： 4、$-6x$ 和$\dfrac{x+9}{3}$

现在我们已经介绍了项，接下来我们要讨论代数表达式的另一个重要特征：系数。

> 系数
>
> 给定代数表达式中的一项，它的**系数**就是变量前面的那个数值因子。

说得更简单一些，项的系数就是字母前面的那个数。[2] 如果某一项里根本没有变量字母，那么系数就是这个数本身。例如，在代数表达式x^2-4x+5 中，系数分别是1、-4 和5。

例题：识别系数

写出每一项的系数。

1. $4x$ 答： 4
2. $15x^2$ 答： 15
3. $3y$ 答： 3
4. 3 答： 3

> 总结
>
> - 项 = 被加法分开的各部分。
> - 系数 = 各项前面的数字。
>
> 代数表达式中的项总是由加法分开的，所以如果某一部分前面有减号，那么你需要把那个减号包含在该项之中。项也取决于表达式的写法：如果你用不同的符号方式重写一个表达式，它的项可能会发生变化。

1.3 指数形式

除了四种基本算术运算+、−、× 和÷ 之外，在课程后面我们还会非常关注乘方。这个运算对于定义像多项式这样有趣的代数表达式是至关重要的。

[2]“coefficient（系数）”这个词看起来好像有点让人困惑。但如果你把它拆开来看，它其实是有道理的。前缀“co”表示“共同、一起”，就像“coworker（同事）”表示“和你一起工作的人”，或者“coauthor（合著者）”表示“和你一起写作的人”。“efficient”源自拉丁语，意思和“产生、实现结果”有关，因此“coefficient”大致可以理解成“共同作用以产生一个结果的东西”。

指数记号

对于一个实数a 和一个正整数n，表达式a^n 表示

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 个因子}}.$$

其中a 称为**底数**，n 称为**指数**。

指数记号只是一个有用的记号，用来表示重复进行乘法运算。事实上，你之前已经见过这种思想了：乘法本身也只是一个有用的记号，它概括了重复进行加法的过程：

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + a \cdots a}_{n\text{ 项}}.$$

像a^n 这样的指数表达式做的是类似的事情。例如：

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad 5^1 = 5 \qquad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

学生经常会误解代数中的运算顺序。正确的顺序是：

$$\text{括号} \longrightarrow \text{指数} \longrightarrow \text{乘法/除法} \longrightarrow \text{加法/减法}$$

换句话说：如果一个代数表达式中混合了多种运算，那么这些运算有一个优先次序。我们先做括号里的，再做指数，然后做乘法或除法，最后才做加法或减法。例如：

$$-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9 \qquad \text{但} \qquad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9.$$

同样地，

$$3x^2 = 3(x^2), \qquad -3x^2 = -(3x^2), \qquad (-3x)^2 = 9x^2.$$

1.4 对表达式求值

一个代数表达式通常含有像x 或y 这样的变量。这些字母是特殊的，因为它们可以取许多不同的值：例如，如果我们愿意的话，x 可以是3，也可以是π，还可以是-4。在代数表达式中引入变量，使得我们的表达式更加一般，它使我们能够同时讨论许多个数，而不是把自己限制在像$1, 2, 3, \cdots$ 这样的固定数字上。尽管如此，有时候我们也希望讨论具体的数字，而不是这些更一般的变量。在这种情况下，我们就给变量指定一个具体的值，并计算表达式在这种具体情形下表示什么。这个过程通常称为**对表达式求值**。

对表达式求值

所谓对一个代数表达式**求值**，就是把变量替换成数值，然后按照通常的算术运算进行化简。

例如，我们来求表达式$4x + 7y - 2z$ 在$x = 2$、$y = 3$、$z = 4$ 时的值。要做到这一点，我们只需要把这三个值代入表达式中。这样我们就得到一个可以计算的数：

$$4x + 7y - 2z = 4(2) + 7(3) - 2(4) = 8 + 21 - 8 = 21.$$

用语言来说，我们会说："表达式$4x + 7y - 2z$ 在$x = 2$、$y = 3$、$z = 4$ 时的值是21。"

练习1.1

利用给定的数值，求出每个表达式的值。

1. 当$x = 3$、$y = 7$ 时，求$\dfrac{x+y}{2}$ 的值。
2. 当$x = -2$、$y = 4$ 时，求$5x^2 + 2y$ 的值。
3. 当$x = 5$、$y = 2$ 时，求$\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ 的值。

2 化简代数表达式

代数表达式是语言中的一种符号性特征：它们只是按某种方式排列起来的一组符号。很多时候，两个代数表达式有相同的意义，也就是说，我们可以通过一系列简单的规则把一个变成另一个。实际上，我们真正关心的是：某个看起来很复杂的表达式能不能在不改变其含义的前提下写成更简单的形式，这就是我们所说的**化简表达式**。在我们的语言类比中，化简表达式就意味着利用语法规则“改写一句话”，同时保持它的意思不变。

2.1 实数的性质

实数具有一组有用的性质，总结如下。

实数的性质

对于实数a, b, c（在注明的地方假设$a \neq 0$）：

1. **加法交换律**： $a + b = b + a$。
2. **乘法交换律**： $ab = ba$。
3. **加法结合律**： $(a + b) + c = a + (b + c)$。
4. **乘法结合律**： $(ab)c = a(bc)$。
5. **加法单位元性质**： $a + 0 = a$。
6. **乘法单位元性质**： $a \cdot 1 = a$。
7. **加法逆元性质**： $a + (-a) = 0$。
8. **乘法逆元性质**： $a \cdot \frac{1}{a} = 1$（当$a \neq 0$ 时）。
9. **分配律**： $a(b + c) = ab + ac$。

上面的所有性质都是以一般形式写出的，所以它们看起来可能会有点奇怪和陌生。不过，只要你随便代入几个数，就会发现这些性质显然都是真的。[3] 例如，如果我们选择性质(5)，再令$a = 17$，那么就可以非常清楚地看到$17 + 0 = 17$。

上面的规则可以用来化简代数表达式。我们将主要关注性质(9)，因为那是最有意思的一条。这里有两种关键技巧：

1. 利用分配律去括号进行化简；

[3]有趣的是，实数轴并不是唯一满足这9 条性质的数学结构，更一般的概念叫做“域（field）”。在课程后面我们还会见到另一个“域”的例子。

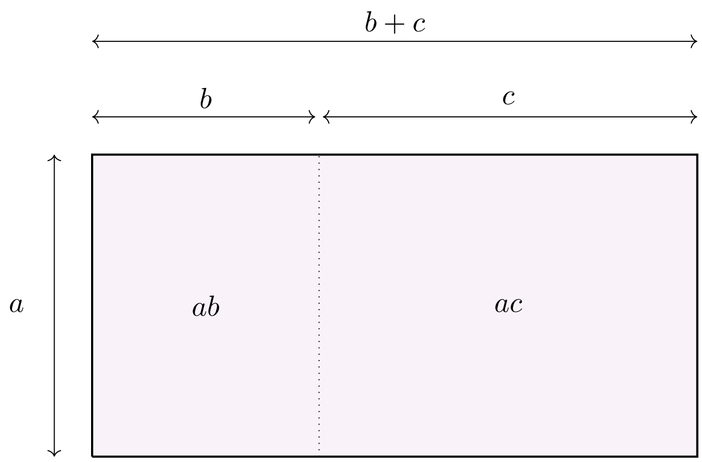
2. 合并同类项进行化简。

正如你将会看到的，这两种技巧本质上都只是性质(9) 的应用。

2.2 使用分配律

在进入代数表达式的化简之前，我们先来稍微说明一下分配律。上面列出的9 条性质中，它也许是最不显然的一条。

为了说明为什么$a(b+c)=ab+ac$ 一般成立，我们把数解释为长度，于是加法就表示把两段长度首尾相接，而乘法就表示面积的形成。在这个几何图像里，我们假设$a,b,c>0$。[4] 请看下图。



在这幅图中，我们把面积为ab 和ac 的两个部分合成了一个更大的长方形，也就是用较粗线条画出的那个长方形。由于整个长方形的长度是$b+c$，而任意长方形的面积就是底乘高，因此我们可以直观地看到，$a(b+c)$ 的面积与ab 和ac 相加的面积相同。把这一点写成代数形式，我们就得到分配律：$a(b+c)=ab+ac$。

现在既然我们相信分配律成立了，就可以利用它来操作代数表达式。

利用分配律展开

所谓把一个表达式**展开**，就是通过应用分配律去掉括号。

例如，我们可以通过应用分配律来展开表达式$5(x+7)$：

$$5(x+7)=5x+35.$$

[4]当有零出现时情形会更简单。例如，$0(b+c)=0$，而且$0\cdot b+0\cdot c=0$，所以规则仍然成立。同样地，$a(b+0)=ab$，而$ab+a\cdot 0=ab$。

2.3 合并同类项

同类项

如果一个表达式中的两个项有相同的变量部分，也就是说它们具有相同的变量并且指数也相同，那么这两个项就叫做**同类项**。

同类项的好处在于，它们总是可以合并并化简。例如，表达式$-3x + x$ 可以通过把这两项合并起来而化简为：

$$-3x + x = -2x.$$

从某种意义上说，我们可以把"合并同类项"看作分配律的反向操作。例如，两项同类项$3x^2 + 4x^2$ 可以通过"撤销"分配律来合并：

$$3x^2 + 4x^2 = (3 + 4)x^2 = 7x^2.$$

练习2.1

通过合并同类项化简下列表达式。

1. $6a^2 + 3a^2$
2. $4x - x + 3x$
3. $10 - 3$
4. $5y + 3x - 2y$

练习2.2

化简每个表达式。

1. $3(x + 2) + 7$
2. $4(3y - 1) - 2y$
3. $-5(2a + 3) - 4a$
4. $2(m - 4) + 3(m + 5)$

2.4 一个几何例子

假设一个长方形的长为$l = 4x$，宽为$w = 7$。如果它的周长是$P = 54$，求x。

解： 回忆一下，长方形的周长为

$$P = 2l + 2w.$$

代入$l = 4x$、$w = 7$ 和$P = 54$：

$$2(4x) + 2(7) = 54 \quad \Rightarrow \quad 8x + 14 = 54 \quad \Rightarrow \quad 8x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

3 方程基础

3.1 什么是方程?

在我们的语言类比中，代数表达式就像短语，而方程则像是陈述句，也就是说，我们把表达式拿来做出断言。

方程

方程是一个声称两个代数表达式相等的陈述。

简单地说，方程就是用符号“=”把两个表达式连接起来。例子包括:

$$x + 2 = 5, \qquad 3x - 7 = 11, \qquad 4x + 7y - 2z = 21.$$

等号应当被理解为“是”。所以，一个方程是在说“左边的表达式和右边的表达式是同一个东西”。既然这是一个断言，那么它就可能为真，也可能为假，也就是说，一个方程是一个会随着变量取值不同而变真或变假的陈述。例如，方程$x - 1 = 0$ 在$x = 1$ 时为真，但在$x = 100$ 时为假。这自然就把我们带到了解方程这一概念。

解方程

所谓解一个方程，就是找出能使该陈述成立的变量取值。

继续用刚才的例子，我们会说$x = 1$ 是方程$x - 1 = 0$ 的一个解，因为当取$x = 1$ 时，方程变成真实的陈述$0 = 0$。相反，$x = 100$ 不是方程$x - 1 = 0$ 的解，因为当取$x = 100$ 时，方程变成了错误的陈述$99 = 0$。

练习3.1

判断$x^2 - 5 = 4x + 7$ 的解中，$x = -2$ 和$x = 2$ 是否成立。

3.2 平衡思想

一般来说，我们可以对一个代数表达式做某件事，也就是对它施加算术运算。如果我们面对的是一个方程，那么必须保证：无论你对方程左边做什么，也必须对右边做同样的事。因为“做某件事”会改变一个表达式，而我们希望左右两个表达式始终保持相等。打个比方：如果我有一对看起来一模一样的双胞胎，而其中一个人在手臂上纹了身，那么他们就不再看起来一样了。要想让他们仍然保持一样，唯一的方法就是让他们两个人都纹上完全相同的纹身。那样，他们看起来才会依旧完全一样。

再从另一个角度来看这个原则。假设有两个男人分别站在跷跷板的两边。如果两边的重量相等，那么跷跷板就是平的。假设我们知道右边这个男人的体重是75kg，但左边这个男人的体重我们只知道是$(x - 10)$kg。如果他们站在一个保持水平的跷跷板上，那么两边重量必然相等，也就是$x - 10 = 75$。如果我们想知道左边这个人的准确体重，就需要想办法“消掉”这个-10kg，看看x到底是多少。但是，我们不能只给左边这个人加上+10kg，因为那样的话他就会比75kg 更重，跷

跷板也就会翘起来。相反，为了让跷跷板保持水平，我们必须同时给两个人都加上+10kg：

$$x - 10 + 10 = 75 + 10 \quad \Rightarrow \quad x = 85.$$

3.3 等价方程

等价方程

如果两个方程有相同的解集，那么它们就叫做**等价方程**。在解方程时，我们会把一个方程逐步变换成更简单的等价方程，直到变量被孤立出来。

我们可以使用若干种技巧来构造等价方程。

1. **化简任一边：** 去掉分组符号，合并同类项，或者在一边或两边同时化简分式。

$$3x - x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8.$$

2. **等式的加法性质：** 在两边都加上（或减去）相同的量。

$$x - 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x - 2 + 2 = 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

3. **等式的乘法性质：** 在两边都乘以（或除以）同一个非零的量。

$$3x = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

4. **交换方程两边：**

$$7 = x \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

性质(2) 和(3) 体现的正是这句话："左边怎么做，右边也必须怎么做。"

一般来说，我们希望通过一系列这样的操作，把一个复杂的方程逐步变成一个更简单的方程，从而得到一个能够清楚说明变量应该取什么值的表达式。这些等价变形称为解题过程中的"步骤"。我们会在下一讲详细讨论这一点。不过现在，先看一个简单的例子：

$$x - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 5 + 5 = 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad x + 0 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

---

4 练习答案

练习1.1 代数表达式求值

1. 当$x = 3$、$y = 7$ 时，求$\dfrac{x+y}{2}$ 的值。
   解： $\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

2. 当$x = -2$、$y = 4$ 时，求$5x^2 + 2y$ 的值。**解：** $5(-2)^2 + 2(4) = 5 \cdot 4 + 8 = 28.$

3. 当$x = 5$、$y = 2$ 时，求$\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ 的值。**解：** $\frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{3} = 7.$

练习2.1：合并同类项

1. $6a^2 + 3a^2 = 9a^2$。
2. $4x - x + 3x = (4 - 1 + 3)x = 6x$。
3. $10 - 3 = 7$。
4. $5y + 3x - 2y = (5y - 2y) + 3x = 3y + 3x$。

练习2.2：展开并化简

1. $3(x + 2) + 7 = 3x + 6 + 7 = 3x + 13$。
2. $4(3y - 1) - 2y = 12y - 4 - 2y = 10y - 4$。
3. $-5(2a + 3) - 4a = -10a - 15 - 4a = -14a - 15$。
4. $2(m - 4) + 3(m + 5) = 2m - 8 + 3m + 15 = 5m + 7$。

练习3.1：方程的解

判断$x^2 - 5 = 4x + 7$ 的解中，$x = -2$ 和$x = 2$ 是否成立。

- 当$x = -2$ 时：$x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$，而$4x + 7 = -8 + 7 = -1$。方程成立，因此$x = -2$ 是一个解。
- 当$x = 2$ 时：$x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$，而$4x + 7 = 8 + 7 = 15$。方程不成立，因此$x = 2$ 不是一个解。