MAT140：第2講ハンドアウト
代数式

---

## 数学を言語として見る

新しい言語を学ぶとき，普通は次のことを学びます。

- **新しい記号（文字）**。たとえば，英語では$a, b, c, d, e, \ldots$ のような文字を使います。ほかの言語では，異なる記号体系を使います。
- **記号を組み合わせるための規則**。ある言語では正しい単語でも，似た文字を使っている別の言語では正しい単語でないことがあります。

大事な点は，記号それ自体はただの印にすぎないということです。記号は，正しく組み合わされ，すでに存在しているある概念を指すために使われてはじめて，意味を持つようになります。

数学もこれと似ています。数学には，記号，式，方程式／恒等式，そしてそれらを正しく組み合わせる方法を教える文法規則があります。

| 言語 | 数学 |
|---|---|
| アルファベット | 記号 |
| 単語 | 式 |
| 文 | 方程式／恒等式 |
| 文法 | 規則（性質） |

特に，この授業で見ていく代数学はこのたとえに従っています。この授業を通して，皆さんは次のものを見ていきます。

- 新しい記号，
- それらを操作するための新しい規則，
- そして，これらの新しいものすべての意味をどのように解釈するか。

この講義では，私たちの「言語づくり」のごく基本的なところから始めます。いくつかの新しい記号を導入し，それらが互いにどのように関係しているかをはっきりさせます。

## 1　代数式の評価

### 1.1　代数式とは何か

代数式

**代数式**とは，文字（変数）と実数（定数）を，加法・減法・乗法・除法のような算術演算を使って組み合わせたものです。

代数式は，代数を使って書ける最も基本的なものの一つであり，私たちの新しい言語における単語や句のようなものです。一般に，代数式は次の材料からできています。

- **実数**（定数），たとえば$1, -7, \frac{1}{2}, 0, \pi, \ldots$
- **変数**，たとえば$x, y, z, \ldots$（値が変わりうる数）
- **算術演算**，たとえば$+$，$-$，$\times$，$\div$（ものどうしをつなぐ方法）
- **括弧**：( と)。

最初の三つの記号の集まりが，私たちの言語における数学的内容であり，括弧はそれらをどの順序で扱うかを示すためにあります。ある意味で，代数式のいちばん面白い部分は演算です。これらの演算は，変数と定数をどのような手順で組み合わせるかという「レシピ」を表しています。[1]

代数式の例としては，次のようなものがあります。

$$x^2 - 4x + 5, \qquad 1 + 4x, \qquad 7y - 3x.$$

代数式でない例としては，意味をなさない次のようなものがあります。

$$x - + + \times 3, \qquad 2^{\div}, \qquad 4^{x}_{(+} - - \div .$$

これらは明らかに意味をなしませんし，代数式ではありません。

## 1.2　項と係数

項

代数式の**項**とは，加法によって区切られている部分のことです。

実際には，引き算は「負の部分を足すこと」とみなします。したがって，項とは，すべてを$+$を使って書き直したあとに見える各部分のことです。たとえば，次の式を考えます。

$$x^2 - 4x + 5.$$

ここで，項は$x^2$，$-4x$，そして$5$ です。つまり，$4x$ は項ではありません。この式の項を正しく見つけるには，次のように書き直すのが便利です。

$$x^2 - 4x + 5 \;=\; x^2 + (-4x) + 5.$$

このように，項を正しく見つけるためには，すべてを$+$ 記号で区切る必要があります。

ここで大事なのは，代数式の項は，その意味よりも，どのように書かれているかに本当に依存しているということです。たとえば，次の二つの式

$$x - 1 - 2 \qquad \text{と} \qquad x - 3$$

は，同じことを言っているので，同じ式のように感じられるかもしれません。しかし実際には，前者には三つの項があり，後者には二つしかないので，これらは異なる代数式として見なされます。

[1] この授業の後のほうで見るように，ごく少数の基本的な算術演算だけでも，豊かで面白い代数的構造の集まりを作ることができます。この新しい「代数の言語」の学び方はゆっくり進めます。まず最も簡単な例や概念から始め，それから少しずつ山頂へ向かって歩いていきます。

### 例題：項を見つける

それぞれの代数式の項を答えなさい。

1. $x+2$ **答:** $x$ と2
2. $x+\frac{1}{2}$ **答:** $x$ と$\frac{1}{2}$
3. $2y-5x-7$ **答:** $2y$，$-5x$，$-7$
4. $5(x-3)+3x-4$ **答:** $5(x-3)$，$3x$，$-4$
5. $4-6x+\dfrac{x+9}{3}$ **答:** 4，$-6x$，$\dfrac{x+9}{3}$

項を導入したので，次は代数式のもう一つの重要な特徴である係数について話します。

**係数**

代数式のある項に対して，その**係数**とは，変数の前にある数の因子のことです。

もっと簡単に言えば，係数とは文字の前にある数のことです。[2] 項の中に変数の文字がまったくない場合，係数はその数そのものです。たとえば，代数式$x^2-4x+5$における係数は，1，$-4$，5です。

### 例題：係数を見つける

各項の係数を答えなさい。

1. $4x$ **答:** 4
2. $15x^2$ **答:** 15
3. $3y$ **答:** 3
4. 3 **答:** 3

**まとめ**

- 項 = 加法によって区切られているもの。
- 係数 = 項の前にある数。

代数式の項はいつでも加法によって区切られるので，前にマイナス記号がある場合には，それもその項に含める必要があります。また，項は式の書き方にも依存します。異なる記号を使って式を書き直すと，その項が変わることがあります。

## 1.3 指数表記

四つの基本的な算術演算$+$，$-$，$\times$，$\div$ に加えて，この授業の後半では累乗もとても重要になります。この演算は，多項式のような面白い代数式を定義するうえで欠かせません。

[2]「coefficient（係数）」という語は，少し分かりにくく見えるかもしれません。しかし，分解してその深い意味を見ると納得できます。接頭辞“co” は「一緒に」という意味で，たとえば“coworker” は「一緒に働く人」，“coauthor” は「一緒に書く人」という意味です。また“efficient” はラテン語に由来し，「成し遂げる」という意味を持ちます。したがって“coefficient” という語は，「一緒になって結果を生み出すもの」のような意味になります。

指数表記

実数$a$ と正の整数$n$ に対して，$a^n$ という式は

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 個の因子}}$$

を意味します。ここで，$a$ を**底**，$n$ を**指数**と呼びます。

指数表記は，掛け算の繰り返しを表すための便利な記法にすぎません。実は，皆さんはすでにこの考え方を見ています。掛け算そのものもまた，加法の繰り返しをまとめて表す便利な記法です。

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + a \cdots a}_{n\text{ 項}}.$$

$a^n$ のような累乗も同じようなことをしています。たとえば，

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad 5^1 = 5 \qquad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

代数における演算の順序を誤解する学生はかなり多いです。順序は次の通りです。

$$\text{括弧} \longrightarrow \text{指数} \longrightarrow \text{乗法・除法} \longrightarrow \text{加法・減法}$$

言い換えると，複数の演算が混ざった代数式があるときには，どの演算を優先して行うかという順序があります。まず括弧の中を行い，次に指数，その次に掛け算や割り算，最後に足し算や引き算を行います。たとえば，

$$-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9 \qquad \text{しかし} \qquad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9.$$

同様に，

$$3x^2 = 3(x^2), \qquad -3x^2 = -(3x^2), \qquad (-3x)^2 = 9x^2.$$

### 1.4 式を評価する

代数式には，しばしば$x$ や$y$ のような変数が含まれています。これらの文字は特別で，いろいろな値を取りうるという意味を持っています。たとえば，$x$ は3 でも$\pi$ でも$-4$ でもよいわけです。代数式に変数を含めると，その式はずっと一般的になります。つまり，$1, 2, 3, \cdots$ のような固定された数に限定せず，たくさんの数を一度に扱えるようになります。とはいえ，ときにはこのような一般的な変数ではなく，具体的な数について話したいこともあります。その場合には，変数に具体的な値を入れて，その場合に式が何を言っているかを計算します。この過程はしばしば**式を評価する**と呼ばれます。

式を評価する

代数式を**評価する**とは，変数に数値を代入し，そのあと通常の算術演算で簡単化することです。

例として，$x = 2$，$y = 3$，$z = 4$ のときの式$4x + 7y - 2z$ を評価してみます。そのためには，この三つの値をそのまま式に代入すればよいです。すると計算できる数が得られます。

$$4x + 7y - 2z = 4(2) + 7(3) - 2(4) = 8 + 21 - 8 = 21.$$

言葉で言えば，「式$4x + 7y - 2z$ を$x = 2$，$y = 3$，$z = 4$ で評価すると21 になる」と言います。

**練習問題1.1**

与えられた値を使って，各式を評価しなさい。

1. $\dfrac{x+y}{2}$ ，ただし$x=3$，$y=7$。
2. $5x^2+2y$ ，ただし$x=-2$，$y=4$。
3. $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ ，ただし$x=5$，$y=2$。

# 2　代数式の簡単化

代数式は言語の記号的な特徴です。つまり，あるやり方で並べられた記号の集まりにすぎません。しかし，二つの代数式が同じ意味を持つことはよくあります。つまり，いくつかの簡単な規則を使えば，互いに変形できるということです。実際に私たちが本当に気にするのは，見た目が複雑な式を，意味を変えずにもっと簡単な形に書き直せるかどうかです。**これを式を簡単化する**と言います。言語のたとえで言えば，式の簡単化とは，意味を変えずに文法規則を使って「文を書き換えること」です。

## 2.1　実数の性質

実数には便利な性質がいくつかあり，それらは次のようにまとめられます。

**実数の性質**

実数$a, b, c$ に対して（必要なところでは$a \neq 0$）：

1. **加法の交換法則:** $a+b=b+a$。
2. **乗法の交換法則:** $ab=ba$。
3. **加法の結合法則:** $(a+b)+c=a+(b+c)$。
4. **乗法の結合法則:** $(ab)c=a(bc)$。
5. **加法単位元の性質:** $a+0=a$。
6. **乗法単位元の性質:** $a\cdot 1=a$。
7. **加法逆元の性質:** $a+(-a)=0$。
8. **乗法逆元の性質:** $a\cdot\frac{1}{a}=1$（ただし$a\neq 0$）。
9. **分配法則:** $a(b+c)=ab+ac$。

上の性質はすべて一般的な形で書かれているので，少し奇妙で見慣れないように見えるかもしれません。しかし，いくつか具体的な数を入れてみれば，これらの性質がどれも明らかに正しいことが分かります。[3] たとえば，性質(5) を選んで$a=17$ とすれば，$17+0=17$ であることは非常にはっきりしています。

上の規則は，代数式を簡単化するのに使えます。私たちは特に性質(9) に注目します。なぜなら，それが最も面白いものだからです。重要な技術は二つあります。

[3]興味深いことに，実数直線だけがこれら9 個の性質を持つ数学的構造ではありません。一般的な概念は「体」と呼ばれます。この授業の後のほうで，もう一つの「体」の例を見ることになります。

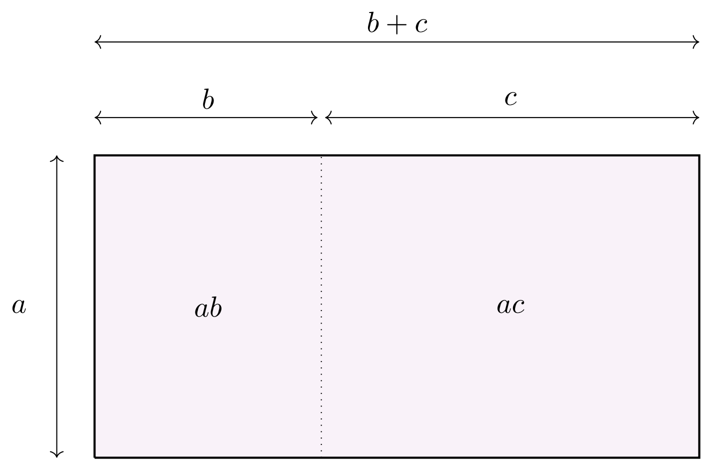
1. 分配法則を使って括弧を外すことによる簡単化，
2. 同類項をまとめることによる簡単化。

これから分かるように，これら二つの技術は，実はどちらも性質(9) の応用です。

## 2.2　分配法則を使う

代数式の簡単化に入る前に，分配法則が正しいことを少しだけ説明しておきます。上に挙げた9個の性質のうち，おそらくこれが最も自明ではないものです。

$a(b+c) = ab + ac$ が一般に成り立つことを示すために，数を長さとして解釈します。すると，加法は二つの長さを並べることを意味し，乗法は面積を作ることを意味します。この幾何学的図では，$a, b, c > 0$ と仮定します。[4] 次の図を考えます。




この図では，面積$ab$ と$ac$ を合わせて，一つの大きな長方形にしています。太い線で描かれているのがその長方形です。全体の長方形の横の長さは$b+c$ であり，長方形の面積は底辺かける高さですから，$a(b+c)$ の面積は，$ab$ と$ac$ を足した面積と同じであることが図から分かります。これを代数的に書けば，分配法則$a(b+c) = ab + ac$ を得ます。

分配法則が成り立つと納得できたので，これを使って代数式を操作できます。

**分配法則による展開**

式を**展開する**とは，分配法則を使って括弧を外すことです。

たとえば，式$5(x+7)$ は，分配法則を使って次のように展開できます。

$$5(x+7) = 5x + 35.$$

[4] ゼロの場合はもっと簡単です。たとえば，$0(b+c) = 0$ であり，また$0 \cdot b + 0 \cdot c = 0$ ですから，やはりこの法則は成り立ちます。同様に，$a(b+0) = ab$ であり，$ab + a \cdot 0 = ab$ です。

## 2.3　同類項をまとめる

> 同類項
>
> 式の中の二つの項が**同類項**であるとは，変数の部分，すなわち同じ変数が同じ指数で現れていることを言います。

同類項のよいところは，いつでもまとめて簡単にできることです。たとえば，式$-3x + x$ は，この二つの項をまとめることで簡単になります。

$$-3x + x = -2x.$$

ある意味で，「同類項をまとめること」は分配法則の逆向きと見ることができます。たとえば，同類項$3x^2 + 4x^2$ は，分配法則を逆に使うことでまとめられます。

$$3x^2 + 4x^2 = (3 + 4)x^2 = 7x^2.$$

### 練習問題2.1

同類項をまとめて，次の式を簡単にしなさい。

1. $6a^2 + 3a^2$
2. $4x - x + 3x$
3. $10 - 3$
4. $5y + 3x - 2y$

### 練習問題2.2

各式を簡単にしなさい。

1. $3(x + 2) + 7$
2. $4(3y - 1) - 2y$
3. $-5(2a + 3) - 4a$
4. $2(m - 4) + 3(m + 5)$

## 2.4　幾何の例

長さが$l = 4x$，幅が$w = 7$ の長方形を考えます。周の長さが$P = 54$ であるとき，$x$ を求めなさい。

**解答:** 長方形の周の長さは

$$P = 2l + 2w$$

であることを思い出しましょう。$l = 4x$，$w = 7$，$P = 54$ を代入すると，

$$2(4x) + 2(7) = 54 \quad \Rightarrow \quad 8x + 14 = 54 \quad \Rightarrow \quad 8x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

# 3　方程式の基礎

## 3.1　方程式とは何か

言語のたとえでは，代数式は表現や句のようなものであり，方程式は文のようなものです。つまり，式を使って主張を行います。

> 方程式
>
> **方程式**とは，二つの代数式が等しいと主張する文です。

簡単に言えば，方程式とは，二つの式を「=」という記号で結びつけたものです。たとえば，

$$x + 2 = 5, \qquad 3x - 7 = 11, \qquad 4x + 7y - 2z = 21.$$

等号は「等しい」と読めばよいです。したがって，方程式は「左の式と右の式は同じものである」と言っているわけです。これは一つの主張なので，真であることも偽であることもあります。つまり，方程式は，変数の値によって真にも偽にもなりうる文です。たとえば，方程式$x - 1 = 0$ は$x = 1$ なら真ですが，$x = 100$ なら偽です。ここから自然に，方程式を解くという考えにつながります。

> 方程式を解く
>
> 方程式を解くとは，その文が真になるような変数の正しい値を見つけることです。

先ほどと同じ例を使うと，$x = 1$ は方程式$x - 1 = 0$ の解です。なぜなら，$x = 1$ を代入すると，真である$0 = 0$ が得られるからです。これに対して，$x = 100$ は方程式$x - 1 = 0$ の解ではありません。なぜなら，$x = 100$ を代入すると，偽である$99 = 0$ が得られるからです。

### 練習問題3.1

$x = -2$ と$x = 2$ が，$x^2 - 5 = 4x + 7$ の解であるかどうかを調べなさい。

## 3.2　つり合いの考え方

一般に，代数式には算術演算を使って何かをすることができます。方程式の場合には，左辺にしたことは右辺にも同じようにしなければなりません。何かをすると式は変わりますが，私たちは二つの式が互いに等しいままでいてほしいのです。たとえ話をすると，まったく同じ見た目の双子がいるとして，一人だけが腕に入れ墨を入れたら，もはや二人は同じ見た目ではありません。二人が同じ見た目のままでいる唯一の方法は，まったく同じ入れ墨を二人とも入れることです。そうすれば，二人はやはりまったく同じ見た目のままです。

この原理を別の見方で説明すると，シーソーの両側に一人ずつ人が立っているとしましょう。両側の重さが等しければ，シーソーは水平です。右側の人の体重が75kg であることは分かっていて，左側の人の体重は$(x - 10)$kg であることだけが分かっているとします。二人が水平なシーソーの上に立っているなら，二つの重さは等しいはずです。つまり，$x - 10 = 75$ です。左側の人の正確な体重を知りたいなら，$x$ の値を見るために，どうにかしてこの$-10$kg を「打ち消

す」必要があります。しかし，左側の人にだけ+10kg を足してしまうと，その人は75kg より重くなり，シーソーは傾いてしまいます。したがって，シーソーを水平に保つには，二人同時に+10kg を与えなければなりません。

$$x - 10 + 10 = 75 + 10 \quad \Rightarrow \quad x = 85.$$

### 3.3 同値な方程式

**同値な方程式**

二つの方程式が**同値**であるとは，解集合が同じであることを言います。方程式を解くときには，変数が孤立するまで，方程式をより簡単な同値な方程式へと変形していきます。

同値な方程式を作るために使える技術はいくつかあります。

1. **片側を簡単化する:** 括弧を外す，同類項をまとめる，あるいは片側または両側の分数を簡単にする。
$$3x - x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8.$$
2. **等式の加法性:** 両辺に同じ量を加える（または引く）。
$$x - 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x - 2 + 2 = 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$
3. **等式の乗法性:** 両辺に同じ *0* でない量を掛ける（または割る）。
$$3x = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$
4. **方程式の左右を入れ替える:**
$$7 = x \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

(2) と(3) の性質は，「左にしたことは右にも同じようにしなければならない」という考えを表しています。

一般に，私たちはこのような操作を何段階か行って，複雑な式をより簡単なものへ変え，変数の値が何であるべきかがはっきり分かる式にしていくことで方程式を解きます。こうした同値な操作を解の「手順」と呼びます。これについては次の講義で詳しく話しますが，今のところは簡単な例を一つ見ておきましょう。

$$x - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 5 + 5 = 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad x + 0 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

---

## 4 練習問題の解答

### 練習問題1.1 式の評価

1. $\dfrac{x+y}{2}$ ，ただし$x = 3$，$y = 7$。
   **解答:** $\frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

2. $5x^2 + 2y$ ，ただし$x = -2$，$y = 4$。**解答:** $5(-2)^2 + 2(4) = 5 \cdot 4 + 8 = 28.$

3. $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ ，ただし$x = 5$，$y = 2$。**解答:** $\frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{3} = 7.$

## 練習問題2.1：同類項をまとめる

1. $6a^2 + 3a^2 = 9a^2$。
2. $4x - x + 3x = (4 - 1 + 3)x = 6x$。
3. $10 - 3 = 7$。
4. $5y + 3x - 2y = (5y - 2y) + 3x = 3y + 3x$。

## 練習問題2.2：展開と簡単化

1. $3(x + 2) + 7 = 3x + 6 + 7 = 3x + 13$。
2. $4(3y - 1) - 2y = 12y - 4 - 2y = 10y - 4$。
3. $-5(2a + 3) - 4a = -10a - 15 - 4a = -14a - 15$。
4. $2(m - 4) + 3(m + 5) = 2m - 8 + 3m + 15 = 5m + 7$。

## 練習問題3.1：方程式の解

$x = -2$ と$x = 2$ が$x^2 - 5 = 4x + 7$ の解であるかどうかを調べなさい。

- $x = -2$ のとき：$x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$，また$4x + 7 = -8 + 7 = -1$。方程式は真なので，$x = -2$ は**解である**。
- $x = 2$ のとき：$x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$，また$4x + 7 = 8 + 7 = 15$。方程式は偽なので，$x = 2$ は**解ではない**。