MAT140 — 第3讲讲义
一次方程

上一次我们介绍了：

- **表达式**（像“单词/短语”），例如$4x+3$，以及
- **方程**（像“句子”），例如$4x+3=0$。

我们还看到，怎样利用实数的性质（分配律、交换律、结合律）以及合并同类项来化简表达式。

现在，我们已经准备好使用这些技巧来真正地**解**方程了。在本讲以及下一讲中，我们将专注于单变量的一次方程。正如你将会看到的，这类方程几乎已经是我们所能写出的最简单的方程了。一般来说，这是一种很好的数学学习方式：先从简单的开始，然后随着课程推进逐步增加复杂性。这样一来，任何复杂问题都可以通过把它们化归为我们已经会做的简单问题来解决。你会在这些讲义中一次又一次地看到这种模式。

1 解一次方程

1.1 “解”一个方程是什么意思？

在讨论方程的解之前，我们应当先回忆一下，“解”一个方程究竟是什么意思。

> 解方程
>
> 所谓解一个方程，就是找出使方程**成立**的变量取值。

通常来说，解方程有两个重要阶段：

- 阶段1：**找出**解。
- 阶段2：**检验**每一个解。

再次检查你得到的解既简单又有帮助：你永远不知道自己是否不小心犯了人为错误，因此检验解是一种很容易避免错误的方法。

1.2 标准形式的一次方程

单变量的**一次方程**，是指变量只以一次幂出现的方程（并且变量不会和自己相乘，也不会出现在指数里面，等等）。正如我们在课程后面会看到的，这个名字其实有很好的理由。不过现在，我们暂时只专注于定义一次方程中最简单的版本。

> 一次方程（单变量）
>
> **标准形式的一次方程**是形如$ax+b=0$ 的方程，其中a 和b 是实数，并且a 非零。

为了求解标准形式的一次方程，我们需要重新整理方程，使得x 被单独留下来（也就是把x 孤立出来）。要做到这一点，我们遵循下面的规则：

平衡法则

“你对左边做什么，就必须对右边做同样的事。”

例如，考虑方程$3x-15=0$。我们可以通过识别运算顺序来把x 孤立出来：表达式$3x-15$ 的意思是先把x 乘以3，然后再减去15。因此，为了让x 单独出现，我们需要做与之相反的操作：

$$\begin{aligned} 3x-15&=0 \\ 3x&=15 \qquad \text{（两边同时加上15）} \\ x&=5 \qquad \text{（两边同时除以3）} \end{aligned}$$

然后我们还可以通过把$x=5$ 代回原方程来再次检验它确实是解：$3(5)-15=15-15=0$。

一般解

事实上，标准形式的一次方程有一个一般解：

$$ax+b=0 \implies ax=-b \implies x=-\frac{b}{a}.$$

练习1.1

解下列方程。

(a) $2x+18=0$
(b) $6x-15=0$
(c) $-2x+9=0$
(d) $\dfrac{x}{3}+7=0$
(e) $0.4x+2.4=0$

2 非标准形式的一次方程

有时候，一次方程并不恰好写成$ax+b=0$ 的形式。在这种情况下，我们先把表达式稍微化简一下（利用分配律、合并同类项等等），然后再去孤立变量。

例2:

考虑方程$2(x-2)+5x=3x+16$。这里，方程里有很多个x，因此我们先通过展开括号并把同类项

合并起来进行化简。完成这些之后，情况就会清楚得多：

$$\begin{aligned}
2(x-2)+5x &= 3x+16 && \text{写出原方程}\\
2x-4+5x &= 3x+16 && \text{展开括号}\\
7x-4 &= 3x+16 && \text{合并同类项}\\
4x-4 &= 16 && \text{两边同时减去 } 3x\\
4x &= 20 && \text{两边同时加上 } 4\\
x &= 5 && \text{两边同时除以 } 4
\end{aligned}$$

练习2.1

解方程$2x+3=2(x+4)$。

练习2.2

解方程$4(x+3)=4x+12$。

解的唯一性

如果一个一次方程处于标准形式，那么它会有唯一解。然而，如果一个一次方程不处于标准形式，那么它可能有唯一解，也可能有无穷多个解，甚至可能根本没有解。

3 应用题

在接下来的两讲中，我们将探讨若干一次方程的现实应用。这些问题在概念上都有同样的流程：

1. 从题目的表述中提取关键信息。
   - 题目要求你计算什么？
   - 题目给了你哪些信息？
2. 找出题目给出的初始信息与所要求的量之间的关系。
3. 把这种关系写成一个代数方程，其中未知量用变量表示。
4. 解这个代数方程，求出未知量的精确值。
5. 用英文把结果表达清楚。

下面给出这种流程的一个例子。

例3.1

你有96 米围栏，要把它们围成一个给狗用的长方形围栏。这个长方形的长应该是宽的三倍。求这个长方形围栏的尺寸。

1. 题目要求我们找出用96 米材料围成的长方形的宽和长。我们唯一知道的是，这个长方形的长度应当是宽度的三倍。

2. 多边形的周长总是各边长度之和。由于这里是长方形，我们知道周长等于两倍的长再加上两倍的宽。
3. 我们知道周长是96。设长方形的宽为x，它目前是未知量。由于长度被假定为宽度的三倍，所以长就是$3x$。把周长与长宽之间的关系写成方程就是：$96 = 2(x) + 2(3x)$。
4. 我们可以通过化简来解这个方程：

$$\begin{aligned}96 &= 2(x) + 2(3x)\\ 96 &= 2x + 6x\\ 96 &= 8x\\ 12 &= x\end{aligned}$$

5. 因此，如果要用总共96 米的围栏围成一个长度是宽度三倍的长方形围栏，那么它的宽应当是12 米。

练习3.2

一份工作每年发放24 次工资，外加年终奖金$750。如果全年总收入是$40,830，那么每次工资是多少?

4 可化归为一次形式的方程

4.1 分组符号（括号）

解题步骤（分组）

求解带有分组符号的一次方程时：

1. 先化简（分配、合并同类项）。
2. 利用等式性质把变量孤立出来。
3. 检验你的解。

作为一个例子，考虑方程$4(x-3) = 8$。这个方程当然看起来是一次的。我们可以先对左边应用分配律，然后像前面那样进行整理来求解：

$$\begin{aligned}4(x-3) &= 8 && \text{写出原方程}\\ 4\cdot x - 4\cdot 3 &= 8 && \text{应用分配律}\\ 4x - 12 &= 8 && \text{化简}\\ 4x - 12 + 12 &= 8 + 12 && \text{两边同时加上12}\\ 4x &= 20 && \text{合并同类项}\\ \frac{4x}{4} &= \frac{20}{4} && \text{两边同时除以4}\\ x &= 5 && \text{化简}\end{aligned}$$

当然，我们还应当再次检验答案：$4(5-3) = 4(2) = 8$。

4.2 含分式的方程

我们也可以得到带有分式的非标准形式的一次方程。为了求解这类方程，我们需要通过乘以一个合适的数来清除分母。通常，这个数就是方程两边分母的最小公倍数（LCM）。

例如，考虑方程$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{x-1}{2}$。由于2 和4 的最小公倍数是4，所以我们可以通过把方程两边同时乘以4 来求解：

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{4}&=\frac{x-1}{2}\\ 4\cdot\frac{x+3}{4}&=4\cdot\frac{x-1}{2}\\ x+3&=2(x-1)\\ x+3&=2x-2\\ x&=5\end{aligned}$$

> 交叉相乘（同样的思想）
>
> 当一个方程把两个分式设为相等时，你也可以把它们看作等值分数，并使用**交叉相乘**：
>
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc.$$
>
> 这只是另一种在保持方程平衡的同时清除分母的方法。

练习4.1

解方程$\dfrac{x}{5}+\dfrac{3x}{4}=19$。

4.3 含小数的方程

小数本质上只是若干以10 的幂为分母的分数展开。例如：

$$2.13=\frac{213}{100}=2+\frac{1}{10}+\frac{3}{100}.$$

如果一个一次方程中含有小数，那么我们可以通过乘上足够高次的10 的幂来消去这些小数。例如，考虑方程$0.3x+0.2(10-x)=0.15(30)$。

只要把方程两边同时乘以100，小数就可以去掉：

$$
\begin{aligned}
0.3x + 0.2(10 - x) &= 0.15(30) && \text{写出原方程} \\
100\big(0.3x + 0.2(10 - x)\big) &= 100\big(0.15(30)\big) && \text{两边同时乘以100} \\
30x + 20(10 - x) &= 15(30) && \text{去掉小数} \\
30x + 200 - 20x &= 450 && \text{应用分配律} \\
10x + 200 &= 450 && \text{合并同类项} \\
10x &= 250 && \text{两边同时减去200} \\
x &= 25 && \text{两边同时除以10}
\end{aligned}
$$

练习5.1

解方程$0.9x - 0.5 = 0.4x + 0.7$

5 百分数与折扣问题

拉丁语里的"cent"表示"一百"，这也是像*century*（世纪） 或*centimeter*（厘米） 这类词的来源。同样地，"percent"其实就是"每一百"的意思。任意一个百分数$p\%$ 都可以很方便地写成分数或小数形式，如下所示。

5.1 百分数的转换

百分数就是"每一百"

$$p\% = \frac{p}{100}$$

例如:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0.25.$$

一个重要的事实是，100% 的小数形式就是1。我们可以利用这一点以及其他常见形式:

- $50\% = \frac{1}{2} = 0.5$
- $25\% = \frac{1}{4} = 0.25$
- $10\% = \frac{1}{10} = 0.1$
- $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

来在真正计算之前估算其他百分数。我们也可以通过把小数乘以100 来把它转成百分数，这相当于把小数点向右移动两位，例如:

$$0.33 \times 100 = 33\%.$$

对于分数，我们首先需要把它改写成分母为100 的分数。这样一来，分子就对应着百分数。

练习6.1

(a) 把3.5% 转换成小数。

(b) 把55% 转换成最简分数。

5.2 百分数基本方程

百分数方程

如果"a 是b 的$p\%$"，那么

$$a = \left(\frac{p}{100}\right) b.$$

百分数方程本身就是一个很容易求值的一次方程。

练习6.2

70 的30% 是多少?

练习6.3

某人的年薪是$40,000，后来加薪5%。新的工资是多少?

练习6.4

14 是哪个数的25%?

5.3 一个巧妙的小技巧

一个巧妙的小技巧：百分数的对称性

如果"a 是b 的$p\%$"，那么

$$a = \left(\frac{p}{100}\right) b = \frac{1}{100}(pb) = \frac{b}{100}p,$$

所以a 也就是p 的$b\%$。

例如：100 的7% 就等于7 的100%。

练习6.5

计算90 的63%。

练习答案

练习1.1（标准形式）

(a) $2x + 18 = 0 \Rightarrow 2x = -18 \Rightarrow x = -9.$

(b) $6x-15=0 \Rightarrow 6x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.
(c) $-2x+9=0 \Rightarrow -2x=-9 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$.
(d) $\frac{x}{3}+7=0 \Rightarrow \frac{x}{3}=-7 \Rightarrow x=-21$.
(e) $0.4x+2.4=0 \Rightarrow 0.4x=-2.4 \Rightarrow x=\frac{-2.4}{0.4}=-6$.

练习2.1（矛盾式）

$$\begin{aligned} 2x+3&=2(x+4) \\ 2x+3&=2x+8 \\ 3&=8 \end{aligned}$$

这是错误的，因此**无解**。

练习2.2（无穷多个解）

$$4(x+3)=4x+12 \;\Rightarrow\; 4x+12=4x+12,$$

这个等式恒成立，因此有**无穷多个解**。

例3.1（几何）

设宽$=w$，长$=L$。

$$2L+2w=96, \qquad L=3w.$$

把$L=3w$ 代入：

$$2(3w)+2w=96 \Rightarrow 6w+2w=96 \Rightarrow 8w=96 \Rightarrow w=12.$$

于是$L=3w=36$。

$$\boxed{\text{宽} = 12\text{ m，长} = 36\text{ m。}}$$

练习3.2（工资+ 奖金）

设每次工资为x：

$$24x+750=40830 \Rightarrow 24x=40080 \Rightarrow x=\frac{40080}{24}=1670.$$

$$\boxed{\text{每次工资是\$1670}\Theta}$$

练习4.1

5 和4 的最小公倍数是20。两边同时乘以20：

$$20\left(\frac{x}{5}+\frac{3x}{4}\right)=20(19) \Rightarrow 4x+15x=380 \Rightarrow 19x=380 \Rightarrow x=20.$$

练习5.1

两边同时乘以10:

$$\begin{aligned} 0.9x - 0.5 &= 0.4x + 0.7 \\ 9x - 5 &= 4x + 7 \\ 5x - 5 &= 7 \\ 5x &= 12 \\ x &= 2.4 \end{aligned}$$

练习6.1

(a) $3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035.$

(b) $55\% = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}.$

练习6.2

$$x = 0.30 \cdot 70 = 21.$$

练习6.3

加薪额$= 0.05 \cdot 40000 = 2000$。新工资$= 40000 + 2000 = 42000$。

练习6.4

$$14 = 0.25x \Rightarrow x = \frac{14}{0.25} = 56.$$

练习6.5

$$63\% \text{ of } 90 = 90\% \text{ of } 63 = 0.90 \cdot 63 = 56.7.$$