

# MAT140：第3講ハンドアウト

## 一次方程式

---

前回は、次のものを導入しました。

- 式（「単語／句」のようなもの），たとえば $4x + 3$ ，
- 方程式（「文」のようなもの），たとえば $4x + 3 = 0$ 。

また、実数の性質（分配法則，交換法則，結合法則）を使うことや、同類項をまとめることによって、式を簡単化する方法も見ました。

ここからは、これらの技術を使って実際に方程式を解く準備ができています。この講義と次の講義では、一変数の一次方程式に注目します。これから分かるように、この種の方程式は、方程式としてはほとんど最も簡単なものです。一般に、これは数学を学ぶうえでよい方針です。まず簡単どころから始めて、少しずつ複雑さを増していくのです。そうすれば、どんな複雑な問題も、私たちがすでに解ける簡単な問題へと還元することで解けるようになります。このパターンは、これらのノート全体を通して何度も現れます。

## 1 一次方程式を解く

### 1.1 方程式を「解く」とはどういう意味か

方程式の解法に入る前に、まず「方程式を解く」とは実際には何を意味するのかを思い出しておきましょう。

#### 方程式を解く

方程式を解くとは、その方程式を真にする変数の値を見つけることです。

一般に、方程式を解くには二つの大切な段階があります。

- 第1段階：解を見つける。
- 第2段階：各解を確認する。

自分が求めた解をもう一度確認することは簡単で役に立ちます。人間的なミスをうっかりしているかもしれませんから、答えを確認するのは、間違いを避けるための簡単な方法です。

### 1.2 標準形の一次方程式

一変数の一次方程式とは、変数が1乗でしか現れない方程式のことです（変数どうしが掛け合わされていたり、指数の中に入っていたりはしません）。この授業の後のほうで見るように、この名前にはちゃんとした理由があります。しかし今のところは、一次方程式の最も簡単な形を定義することに集中します。

## 一次方程式（一変数）

標準形の一次方程式とは、 $ax + b = 0$  の形の方程式であり、ここで  $a$  と  $b$  は実数、 $a$  は0ではありません。

標準形の一次方程式を解くには、 $x$  を孤立させるように方程式を並べ替える必要があります（つまり、 $x$  だけにするとということです）。そのためには、次の規則に従います。

### つり合いの規則

「左にしたことは、右にも同じようにしなければならない。」

例として、方程式  $3x - 15 = 0$  を考えます。演算の順序を見れば、 $3x - 15$  という式は、まず  $x$  に3を掛け、そのあとで15を引くことを意味しています。したがって、 $x$  だけにするには、これと反対のことをすればよいです。

$$\begin{aligned} 3x - 15 &= 0 \\ 3x &= 15 && \text{(両辺に15を足す)} \\ x &= 5 && \text{(両辺を3で割る)} \end{aligned}$$

そのあと、元の方程式に  $x = 5$  を代入して、たしかに解であることを確認できます。 $3(5) - 15 = 15 - 15 = 0$  です。

### 一般的な解

実は、標準形の一次方程式には一般的な解があります。

$$ax + b = 0 \implies ax = -b \implies x = -\frac{b}{a}.$$

## 練習問題1.1

次の各方程式を解きなさい。

- (a)  $2x + 18 = 0$
- (b)  $6x - 15 = 0$
- (c)  $-2x + 9 = 0$
- (d)  $\frac{x}{3} + 7 = 0$
- (e)  $0.4x + 2.4 = 0$

## 2 非標準形の一次方程式

一次方程式がいつも  $ax + b = 0$  の形をしているとは限りません。その場合には、まず式を少し簡単にし（分配法則を使う、同類項をまとめる、など）、そのあとで変数を孤立させます。

## 例2:

方程式 $2(x-2)+5x=3x+16$ を考えます。ここでは $x$ が何回も現れているので、まず括弧を外し、同類項をまとめて簡単にします。そうすると、状況がずっとはっきりします。

$$\begin{array}{ll} 2(x-2)+5x=3x+16 & \text{元の方程式を書く} \\ 2x-4+5x=3x+16 & \text{括弧を外す} \\ 7x-4=3x+16 & \text{同類項をまとめる} \\ 4x-4=16 & \text{両辺から } 3x \text{ を引く} \\ 4x=20 & \text{両辺に } 4 \text{ を足す} \\ x=5 & \text{両辺を } 4 \text{ で割る} \end{array}$$

### 練習問題2.1

$2x+3=2(x+4)$  を解きなさい。

### 練習問題2.2

$4(x+3)=4x+12$  を解きなさい。

#### 解の一意性

一次方程式が標準形であれば、解は一つだけです。しかし、一次方程式が標準形でない場合には、解が一つだけのこともあれば、無限に多くの解を持つこともあり、まったく解を持たないこともあります。

## 3 文章題

次の二回の講義では、一次方程式の実世界での応用をいくつか見ていきます。これらの問題には、どれも同じ概念的な流れがあります。

1. 問題文から重要な情報を取り出す。
  - 何を計算するよう求められているのか。
  - 問題はどんな情報を与えているのか。
2. 出発点となる情報と、求めたい量との関係を見つける。
3. その関係を代数方程式の形で書く。このとき、未知の量は変数で表す。
4. 代数方程式を解いて、未知の量の正確な値を求める。
5. 結果を英語の文で表現する。

以下が、この流れの例です。

### 例3.1

犬のための長方形の囲いを作るのに、96メートルのフェンスを持っているとします。この長方

形は、長さが幅の3倍であるべきです。長方形の囲いの寸法を求めなさい。

1. 問題は、96 m の材料で作られる長方形の幅と長さを求めるように言っています。与えられている情報は、長さが幅の3倍であることです。
2. 多角形の周の長さは、いつでも辺の和です。長方形なので、周の長さは長さの2倍と幅の2倍を足したものになります。
3. 周の長さが96であることが分かっています。長方形の幅を $x$ とおきます。これは今のところ未知です。長さは幅の3倍という条件から $3x$ です。周の長さと言幅・長さの関係を表す方程式は $96 = 2(x) + 2(3x)$ です。
4. この方程式は簡単化して解けます。

$$96 = 2(x) + 2(3x)$$

$$96 = 2x + 6x$$

$$96 = 8x$$

$$12 = x$$

5. したがって、長さが幅の3倍で、全体のフェンスが96 m の長方形の囲いを作るには、幅を12 m にすればよいことが分かります。

## 練習問題3.2

ある仕事では、1年に24回の給料があり、さらに年末ボーナスが\$750支給されます。年間総額が\$40,830であるとき、各回の給料はいくらですか。

## 4 一次の形に帰着する方程式

### 4.1 グループ化記号 (括弧)

#### 指針 (括弧)

括弧を含む一次方程式を解くには：

1. 簡単化する (分配する, 同類項をまとめる)。
2. 等式の性質を使って変数を孤立させる。
3. 解を確認する。

この例として、方程式 $4(x - 3) = 8$ を考えます。これはたしかに一次方程式に見えます。左辺に分配法則を用い、そのあとこれまで見てきたように並べ替えることで解くことができます。

$4(x - 3) = 8$	元の方程式を書く
$4 \cdot x - 4 \cdot 3 = 8$	分配法則を用いる
$4x - 12 = 8$	簡単にする
$4x - 12 + 12 = 8 + 12$	両辺に12を足す
$4x = 20$	同類項をまとめる
$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$	両辺を4で割る
$x = 5$	簡単にする

もちろん、答えは確認するべきです。 $4(5 - 3) = 4(2) = 8$  です。

## 4.2 分数を含む方程式

分数を含む非標準形の一次方程式を作ることでもあります。この型の方程式を解くには、方程式全体に適切な数を掛けて分母を払う必要があります。普通は、左右に現れる分母の最小公倍数 (LCM) を使います。

たとえば、方程式  $\frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{2}$  を考えます。2 と 4 の最小公倍数は 4 なので、方程式の両辺に 4 を掛けて解くことができます。

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{4} &= \frac{x-1}{2} \\ 4 \cdot \frac{x+3}{4} &= 4 \cdot \frac{x-1}{2} \\ x+3 &= 2(x-1) \\ x+3 &= 2x-2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

### 交差に掛ける方法 (同じ考え方)

方程式が二つの分数を等しいとしているとき、それらを同値な分数とみなして交差に掛けることができます：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc.$$

これは、つり合いを保ちながら分母を払うための、もう一つのやり方にすぎません。

### 練習問題4.1

$\frac{x}{5} + \frac{3x}{4} = 19$  を解きなさい。

## 4.3 小数を含む方程式

小数は、10 の冪を分母にもついくつかの分数を展開したものにすぎません。たとえば、

$$2.13 = \frac{213}{100} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}.$$

小数を含む一次方程式がある場合、十分に大きい10の冪を掛ければ小数を消すことができます。たとえば、方程式 $0.3x + 0.2(10 - x) = 0.15(30)$ を考えます。

小数は、両辺に100を掛けることで消せます。

$0.3x + 0.2(10 - x) = 0.15(30)$	元の方程式を書く
$100(0.3x + 0.2(10 - x)) = 100(0.15(30))$	両辺に100を掛ける
$30x + 20(10 - x) = 15(30)$	小数を消す
$30x + 200 - 20x = 450$	分配法則を使う
$10x + 200 = 450$	同類項をまとめる
$10x = 250$	両辺から200を引く
$x = 25$	両辺を10で割る

### 練習問題5.1

$0.9x - 0.5 = 0.4x + 0.7$  を解きなさい。

## 5 百分率と割引の問題

ラテン語で“cent” という語は「100」を意味します。ここから *century* や *centimeter* のような語ができています。同様に，“percent” という語は単に「100あたり」を意味します。どんな百分率  $p\%$  も、次のようにすぐ分数や小数に直せます。

### 5.1 百分率の変換

パーセントは「100あたり」を意味する

$$p\% = \frac{p}{100}$$

たとえば：

$$25\% = \frac{25}{100} = 0.25.$$

重要な点として、100%の小数表示は1です。これと、次のようなよくある形も使えます。

- $50\% = \frac{1}{2} = 0.5$
- $25\% = \frac{1}{4} = 0.25$
- $10\% = \frac{1}{10} = 0.1$
- $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

これらを使えば、計算する前にほかの百分率を見積もることができます。また、小数を百分率に直すには100を掛ければよく、これは小数点を右に二つ動かすことに対応します。たとえば、

$$0.33 \times 100 = 33\%.$$

分数の場合は、まず分母が100になる形に直す必要があります。すると、その分子が百分率になります。

### 練習問題6.1

- (a) 3.5% を小数に直しなさい。
- (b) 55% を既約分数に直しなさい。

## 5.2 基本的な百分率の方程式

### 百分率の方程式

「 $a$  は  $b$  の  $p\%$  である」とは、

$$a = \left(\frac{p}{100}\right)b$$

ということです。

この百分率の方程式は、一次方程式であり、簡単に値を求めることができます。

### 練習問題6.2

70 の30% はいくつですか。

### 練習問題6.3

ある人の年収が\$40,000 で、5% の昇給を受けました。新しい年収はいくらですか。

### 練習問題6.4

14 は何の数の25% ですか。

## 5.3 ちょっとしたコツ

### ちょっとしたコツ：百分率の対称性

「 $a$  は  $b$  の  $p\%$  である」とすると、

$$a = \left(\frac{p}{100}\right)b = \frac{1}{100}(pb) = \frac{b}{100}p,$$

したがって、 $a$  は  $p$  の  $b\%$  でもあります。

たとえば、100 の7% は、7 の100% でもあります。

## 練習問題6.5

90 の63% を求めなさい。

---

## 練習問題の解答

### 練習問題1.1 (標準形)

- (a)  $2x + 18 = 0 \Rightarrow 2x = -18 \Rightarrow x = -9.$
- (b)  $6x - 15 = 0 \Rightarrow 6x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$
- (c)  $-2x + 9 = 0 \Rightarrow -2x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}.$
- (d)  $\frac{x}{3} + 7 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = -7 \Rightarrow x = -21.$
- (e)  $0.4x + 2.4 = 0 \Rightarrow 0.4x = -2.4 \Rightarrow x = \frac{-2.4}{0.4} = -6.$

### 練習問題2.1 (矛盾)

$$\begin{aligned}2x + 3 &= 2(x + 4) \\2x + 3 &= 2x + 8 \\3 &= 8\end{aligned}$$

これは偽なので、解はありません。

### 練習問題2.2 (無限に多くの解)

$$4(x + 3) = 4x + 12 \Rightarrow 4x + 12 = 4x + 12,$$

これはつねに真なので、解は無限に多くあります。

### 例3.1 (幾何)

幅を  $w$ 、長さを  $L$  とします。

$$2L + 2w = 96, \quad L = 3w.$$

$L = 3w$  を代入すると、

$$2(3w) + 2w = 96 \Rightarrow 6w + 2w = 96 \Rightarrow 8w = 96 \Rightarrow w = 12.$$

したがって  $L = 3w = 36$  です。

幅 = 12 m, 長さ = 36 m。
----------------------

### 練習問題3.2 (給料+ ボーナス)

各回の給料を $x$  とすると,

$$24x + 750 = 40830 \Rightarrow 24x = 40080 \Rightarrow x = \frac{40080}{24} = 1670.$$

各回の給料は\$1670 です。

### 練習問題4.1

5 と4 の最小公倍数は20 です。両辺に20 を掛けると,

$$20 \left( \frac{x}{5} + \frac{3x}{4} \right) = 20(19) \Rightarrow 4x + 15x = 380 \Rightarrow 19x = 380 \Rightarrow x = 20.$$

### 練習問題5.1

両辺に10 を掛けると,

$$0.9x - 0.5 = 0.4x + 0.7$$

$$9x - 5 = 4x + 7$$

$$5x - 5 = 7$$

$$5x = 12$$

$$x = 2.4$$

### 練習問題6.1

(a)  $3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035.$

(b)  $55\% = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}.$

### 練習問題6.2

$$x = 0.30 \cdot 70 = 21.$$

### 練習問題6.3

昇給額 =  $0.05 \cdot 40000 = 2000$ 。新しい年収 =  $40000 + 2000 = 42000$ 。

### 練習問題6.4

$$14 = 0.25x \Rightarrow x = \frac{14}{0.25} = 56.$$

### 練習問題6.5

$$63\% \text{ of } 90 = 90\% \text{ of } 63 = 0.90 \cdot 63 = 56.7.$$