MAT140 — 第4讲讲义
一次方程续篇

上一讲中，我们介绍了一次方程，它们几乎是最简单的一类方程。我们从它们最基本的形式$ax + b = 0$ 开始，然后逐步把它们变得更复杂。在那一讲里，我们学习了如何求解这些不同类型的一次方程。

在这一讲中，我们将开始考察一次方程的一些应用。具体来说，我们会建立若干在处理线性关系时不断出现的标准工具。我们将看到：

1. 比、单位率与比例，
2. 线性关系的一些基本现实应用，
3. 一次不等式与区间表示法，最后
4. 绝对值与绝对值不等式。

1 比与比例

1.1 比

"ratio（比）"这个词来自拉丁语，意思大致类似于"计算"或"比例"。事实上，我们已经见过这个词根了：术语"rational number（有理数）"指的是那些能够表示成两个数之比的实数，例如分数。这应当为下面的定义提供一个相当明显的提示。

> 比
>
> **比**是利用除法对两个量进行比较。如果a 和b 是两个数，并且$b \neq 0$，那么a 与b 的比可以写成
> $$\frac{a}{b} \qquad \text{或} \qquad a : b.$$

记号$a : b$ 和分数$\frac{a}{b}$ 是同一个意思。因此，顺序是重要的，写成$a : b$ 一般不等于写成$b : a$。

在处理与比有关的问题时，最简单的方法通常是把一切都改写成分数，再从那里开始运算。因此，这是一项处理比时的基本技能。下面是一些例子：

1. 7 与5 的比是$\frac{7}{5}$。
2. 12 与8 的比是$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$。
3. 10 与2 的比是$\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$。
4. $3\frac{1}{2}$ 与$5\frac{1}{4}$ 的比是$\frac{7}{2} \div \frac{21}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{21} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$。

在实际中，比通常会附带单位。例如，我们可能在比较长度、重量、时间或速度等等。在这种现实情境下，确保你所比较的两个量使用的是同一种单位非常重要。例如：如果你想比较4 英尺和8 英寸，那么你首先必须把这两个量都换算成相同的计量单位，例如把4 英尺变成48 英寸。只有这样，这个比才是有意义的。

练习1

写出下列各组量的比，以比较它们的相对大小：

1. 5 升与7 升
2. 3 米与40 厘米
3. 200 美分与3 美元
4. 30 个月与1.5 年

1.2 单位率与单位价格

作为我们的第一个应用，我们现在将利用比来确定出售商品的单位价格。一般公式如下。

单位率（单位价格）

单位率是指每一个单位所对应的比率。对于价格比较而言，**单位价格**为

$$\text{单位价格} = \frac{\text{成本}}{\text{数量}}\Theta$$

例如，假设一家商店出售两袋大米，我们称它们为A 袋和B 袋。假设A 袋重5kg，价格为4500 日元；而B 袋重7kg，价格为6000 日元。哪一个更划算？

我们可以通过构造“每单位重量成本”的比来比较这两袋米。有几种方法可以这样做，我们既可以按千克比较，也可以按克比较。为了说明这一点，我们两种方法都做一遍。如果我们想构造“每千克价格”的比，那么就用单位价格公式如下：

$$\text{A 袋：}\ \frac{4500}{5} = 900\ \text{日元/kg}, \qquad \text{B 袋：}\ \frac{6000}{7} \approx 857.14\ \text{日元/kg}.$$

或者，我们也可以通过计算“每克价格”来比较这两个品牌：

$$\text{A 袋：}\ \frac{4500}{5000} = \frac{9}{10}\ \text{日元/g}, \qquad \text{B 袋：}\ \frac{6000}{7000} = \frac{6}{7}\ \text{日元/g}.$$

无论采用哪一种方式，我们都能看出B 袋的单位重量成本更低，因此它更划算。

练习2

哪一个单位价格更低：一盒12 盎司、售价$2.79 的早餐麦片，还是一盒同种麦片16 盎司、售价$3.49 的包装？

1.3 比例

比例本质上就是一个断言，表示两个比相等，也就是说，它是一个两边各有一个比的方程。

比例

比例是一个表明两个比相等的方程，即

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{其中 } b \neq 0 \text{ 且} d \neq 0.$$

在实际中，涉及比例的问题通常会包含一个需要求出的未知量。解决这种问题最简单的方法是交叉相乘。

交叉相乘

如果$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$（其中$b \neq 0$ 且$d \neq 0$），那么

$$ad = bc.$$

所谓交叉相乘，其实就是同时把两个分母都乘到方程两边：

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} && \text{两边同乘 } bd \\ bd\left(\frac{a}{b}\right) &= bd\left(\frac{c}{d}\right) && \text{化简} \\ ad &= bc \end{aligned}$$

例如，考虑比例式：

$$\frac{50}{x} = \frac{2}{28}.$$

我们可以通过交叉相乘来求x：

$$\begin{aligned} \frac{50}{x} &= \frac{2}{28} \\ 50\,(28) &= 2x \\ \frac{1400}{2} &= x \\ 700 &= x \end{aligned}$$

练习3

解方程$\frac{x-2}{5} = \frac{4}{3}$。

1.3.1 比例图

比例在绘制按比例缩放的图形时非常有用。考虑下面这个例子：一块三角形土地的两条垂直边分别长100 英尺和210 英尺。现在你打算画一张按比例缩小的草图，其中较短的一边画成8 英寸。如果你希望你的图与原来的大三角形保持比例，那么较长的一边应当画多长?

我们可以通过建立并求解一个比例式来解决这个问题。首先，注意到原来大三角形土地的边长比是$210 : 100$，而草图中未知长度x 使得图上的边长比是$x : 8$。题目要求我们保证这两个比相同。因此，我们写出比例并求解x：

$$
\begin{aligned}
\frac{210}{100} &= \frac{x}{8} \\
8 \times 210 &= 100x \\
\frac{1680}{100} &= x \\
16.8 &= x.
\end{aligned}
$$

因此，为了保证草图是准确的，我们需要把草图中较长的一边画成16.8 英寸。

2 应用题与常见公式

常见的一次方程公式

许多常见的现实公式实际上都是一次方程。

- **温度：** $F = \frac{9}{5}C + 32$
- **单利：** 利息 $=$ 本金 $\times$ 利率 $\times$ 时间
- **路程：** 路程 $=$ 速度 $\times$ 时间

现在我们来回顾这些公式的若干应用。

2.1 例子：计算单利

假设你把\$5000 存入一个按单利计息的账户。6 个月之后，账户获得了\$162.50 的利息。年利率是多少？

为了计算这个，我们可以使用上面的公式，用符号写成$I = Prt$。题目给出的信息是

- 所得利息：$I = 162.50$，
- 本金：$P = 5000$，以及
- 所经过的时间：$t = 6$ 个月。

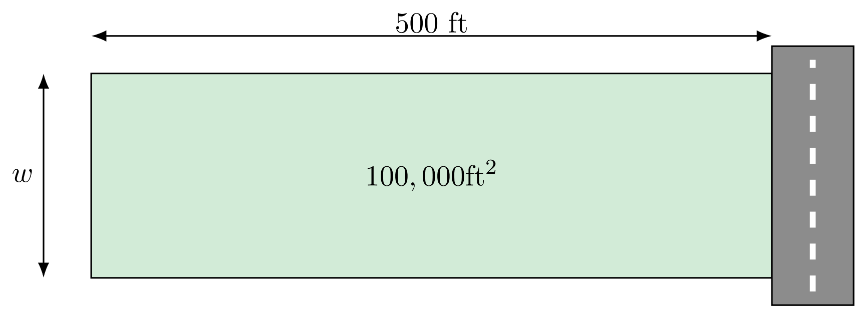
但我们要求的是年利率，因此这里的t 实际上应当取0.5，因为6 个月是一年的一半。现在我们把I、P 和t 的值代入公式，并求解r：

$$
\begin{aligned}
I &= Prt \\
162.50 &= 5000(r)(0.5) \\
162.50 &= 2500r \\
r &= \frac{162.50}{2500} = 0.065
\end{aligned}
$$

因此年利率是$r = 0.065$，也就是6.5%。

2.2 例子：围栏与田地

你有一块长方形田地，长度是500 英尺，总面积是100,000 平方英尺。你想沿着田地的前沿边搭一排围栏，在下图中这条边记作w。围栏每英尺的造价是\$5.50。根据这些信息，这块长方形土地前沿这一边总共要花多少钱?



为了回答这个问题，我们需要先做两件事：(a) 求出前沿边的长度；然后(b) 计算这段边的造价。我们分别来做：

(a) 求前沿边的长度。利用$A = lw$：

$$\begin{aligned} A &= lw \\ 100{,}000 &= 500(w) \\ w &= \frac{100{,}000}{500} = 200. \end{aligned}$$

因此前沿长度是200 英尺。

(b) 总造价：

$$200(5.50) = 1100.$$

因此总费用是\$1100。

2.3 例子：漏水的泳池

一个地上游泳池的容量是15,600 加仑。一根排水管可以在6.5 小时内把这个泳池排空。问：水通过排水管流出的速率是多少（单位：加仑/分钟）？

为了回答这个问题，我们同样要建立一个一次方程。注意，这里题目要求我们把速率表示成每分钟多少加仑，因此我们首先要把6.5 小时换算成分钟：$6.5 \times 60 = 390$ 分钟。所以我们取$t = 390$。泳池排水的速率可以用和上面路程公式非常类似的方法来计算：总体积的减少量等于减少速率乘以所用时间。我们知道泳池会在390 分钟内完全排空，因此我们可以建立一个基本的一次方程，并求出流失速率：

$$\begin{aligned} 15600 &= 390r \\ \frac{15600}{390} &= r \\ r &= 40. \end{aligned}$$

因此，泳池的排水速率是每分钟40 加仑。

单位的维度

在解决现实问题时，追踪你所使用单位的维度非常重要。例如：

- **周长**用**线性单位**来测量（米、英寸、英尺等等）。
- **面积**用**平方单位**来测量（平方米、平方英寸、平方英尺等等）。
- **体积**用**立方单位**来测量（立方米、立方英寸、立方英尺等等）。

3 一次不等式

3.1 不等式与解集

方程表示两个代数表达式是相同的，也就是说，它们相等。相比之下，不等式表示两个代数表达式不相等。由于所有实数都生活在数轴上，所以它们可以按照“小于”关系$<$ 来排序。不等式只是对这一观察作了稍微推广。

不等式

不等式是利用下面这些符号来比较两个代数表达式：

$$<,\ \leq,\ >,\ \geq.$$

一个**解**是指能够使这个不等式成立的某个x 的取值。

通常，不等式不会只有一个唯一解，而是会有一个解集。不等式比方程限制更少，因此它们的解集往往包含无穷多个解。

3.2 区间表示法

不等式的解集往往是实数轴上的一部分，这样的部分称为区间。现在我们来引入一些新的记号。

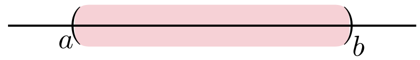
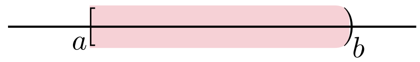
区间表示法

有四种有界区间：

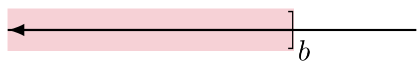
$$\begin{aligned}[a,b] &= \{x:\ a \leq x \leq b\},\\ (a,b) &= \{x:\ a < x < b\},\\ [a,b) &= \{x:\ a \leq x < b\},\\ (a,b] &= \{x:\ a < x \leq b\}.\end{aligned}$$

这里，方括号[和] 表示端点被包含在内，而圆括号(和) 表示端点不被包含。

这些有界区间可以用图形表示如下。

区间	不等式	数轴图像
$[a,b]$	$a \le x \le b$	
(a,b)	$a < x < b$	
$[a,b)$	$a \le x < b$	
$(a,b]$	$a < x \le b$	

除了上面这些有界区间之外，还有无界区间，也就是说，不等式的一边可以延伸到正无穷、负无穷，甚至两边都如此。如下图所示。

区间	不等式	数轴图像
$[a,\infty)$	$x \ge a$	
(a,∞)	$x > a$	
$(-\infty,b]$	$x \le b$	
$(-\infty,b)$	$x < b$	
$(-\infty,\infty)$	全体实数	

练习4

把下列每个不等式画在数轴上：

$$\text{(a) } x > -2, \qquad \text{(b) } -6 \le x \le 5, \qquad \text{(c) } x < 3.$$

3.3 解不等式

不等式可以用我们之前见过的很多技巧来求解：目标依然是利用逆运算把变量孤立出来。下面这些性质说明，我们可以进行与解方程类似的操作。

不等式的性质

对于实数a, b, c：

- 如果$a < b$，那么$a + c < b + c$ 且$a - c < b - c$。
- 如果$a < b$ 且$c > 0$，那么$ac < bc$ 且$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$。
- 如果$a < b$ 且$c < 0$，那么$ac > bc$ 且$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$（不等号**方向翻转**）。
- 如果$a < b$ 且$b < c$，那么$a < c$（传递性）。

根据上面的性质，人们很容易会想说：解不等式基本上和解方程是一样的。但这并不正确。

重要提醒

解不等式和解方程非常相似，但有两个关键区别：

- 如果你乘以或除以一个**负数**，你必须**翻转**不等号。
- 答案通常是一个**解集**，而且往往要用**区间表示法**来写。

例如，我们来解不等式$x + 6 < 9$，并画出它的解。首先，我们提醒自己，这里的目标仍然是重新整理不等式，把x 孤立出来，也就是让x 单独出现。在这个例子里，我们只需要两边都减去6 即可：

$$\begin{aligned} x + 6 &< 9 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

因此，任何小于3 的x 都满足不等式$x + 6 < 9$。解集可以写成$(-\infty, 3)$，其图像如下。

3.4 复合不等式

复合不等式

复合不等式是指像下面这样同时包含两个部分的不等式：

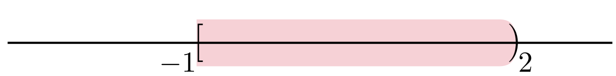
$$a \le \text{expression} < b.$$

我们可以通过对三边同时进行通常的运算来求解复合不等式。

理解复合不等式最简单的方法，就是直接看它如何运作。考虑不等式$-7 \le 5x - 2 < 8$。和往常一样，我们的目标是对表达式$5x - 2$ 施加逆运算，从而把x 单独留下来。为此，我们需要先加上$+2$，然后再除以5。我们必须确保这两步都同时作用于两个不等式：

$$\begin{aligned} -7 \le 5x - 2 &< 8 \\ -5 \le 5x &< 10 \qquad \text{（所有部分同时加2）} \\ -1 \le x &< 2 \qquad \text{（所有部分同时除以5）} \end{aligned}$$

因此，任何位于-1 和2 之间的x（并且包括-1）都会满足不等式$-7 \le 5x - 2 < 8$。我们把解集写成$[-1, 2)$，也可以用图像表示如下。



练习5

解下列不等式，并用区间表示法写出解集：

$$-2 \le 3x - 2 < 2.$$

4 绝对值与绝对值不等式

4.1 绝对值

如果我们回想第1 讲中的绝对值，我们可能记得绝对值这个运算做的事情大致像是“把负数前面的负号去掉”。不过，严格来说，绝对值运算其实要稍微细致一些。

> 绝对值
>
> 对于一个实数x，**绝对值** $|x|$ 是数轴上x 到0 的距离。等价地，
>
> $$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

从上面这两个分段情形中，我们可以看出，这个绝对值的定义确实具有去掉负号的作用。由于这个定义是分段给出的，所以在求解含有绝对值的方程时，我们实际上要把过程拆成两个部分。例如，考虑方程$|x| = 3$。这个陈述的意思是：“变量x 离0 的距离恰好等于3。” 这意味着有两个可能的解：$x = 3$ 和$x = -3$。

如果绝对值里面包含的是一个更复杂的表达式，那么我们就通过把整个方程分成两个独立情形来求解。我们可以直接从上面的定义得到这两个情形。考虑方程$|x + 2| = 4$。这里有两个情形：[1]

- 情形1：$x + 2 = 4$
- 情形2：$-(x + 2) = 4$，也就是$x + 2 = -4$

这两个情形需要分别求解，因此我们会得到两个不同的解（就像$|x| = 3$ 的解是$x = \pm 3$ 一样）。在情形1 中，解得$x = 2$；在情形2 中，解得$x = -6$。这两个x 的值就是方程$|x + 2| = 4$ 的两个解。[2]

这种把含绝对值的方程拆成两部分分别求解的方法通常是正确的方法。不过，这个方法也有一些例外。

> 绝对值方程中的特殊情形
>
> 在少数情形下，绝对值会取到一些特殊的值：
>
> - 如果$|x| = 0$，那么唯一解是$x = 0$。
> - 如果$|x| = a$ 且$a < 0$，那么方程无解。

练习6

求解下列方程：

1. $|x - 2| = 3$
2. $|x + 4| = 3x$
3. $|3x + 8| = 0$
4. $|2x - 4| = -2$

[1]把这两个情形和上面的绝对值定义进行比较。我们只需要把定义中的每一个“x”都替换成表达式“$x + 2$”，就能写出这两个情形。

[2]当然，我们也可以通过代入$x = 2$ 和$x = -6$ 来再次检验。确实有$|(2) + 2| = |4| = 4$，以及$|(-6) + 2| = |-4| = 4$。

4.2 绝对值不等式

含有绝对值的不等式与上面的方程运作方式相似。在这些情形下，通常不等式同样会拆成两个部分来解。不同的是，这两个不等式需要通过复合不等式的形式同时解决。

绝对值不等式

设a 是一个满足$a > 0$ 的实数，x 是变量。

$$|x| < a \iff -a < x < a, \qquad |x| \le a \iff -a \le x \le a.$$

乍看之下，这个等价关系可能显得有些奇怪。因此，我们会用两种方式来解释它。首先，来看代数上的解释。我们知道，方程$|x| = a$ 会拆成两个情形，也就是$x = -a$ 和$x = a$。同样地，不等式$|x| < a$ 也可以拆成两个情形：

- 情形1：$x < a$
- 情形2：$-x < a$

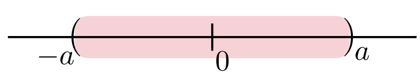
这两个情形和第4.1 节中的两种情形完全一样，只不过这里把等号换成了不等号。现在注意，在情形2 中，我们可以两边同除以-1，此时不等号方向翻转，得到$x > -a$。再结合情形1，我们就得到复合不等式：

$$-a < x < a$$

我们也可以从几何角度来说明。回忆一下，绝对值表示数轴上某个数到0 的距离。在不等式$|x| < a$ 中，我们是在说"x 与0 之间的距离小于a"。这里有两种可能：

- 任意一个小于a 的正数x，离0 都比a 更近。
- 数$-a$ 到0 的距离是$|-a| = a$，因此，任何夹在$-a$ 与0 之间的负数x，到0 的距离也会小于a。

. 这正好就是上面的两种情形：如果取一个满足$-a < x \le 0$ 或者$0 \le x < a$ 的x，那么它一定会比a 或$-a$ 更靠近0。把"$-a < x \le 0$ 或$0 \le x < a$"这句话换一种写法，就是复合不等式$-a < x < a$。从图像上看，任何位于阴影区域中的x 都满足不等式$|x| < a$：



因此，从图形上我们可以把$|x| < a$ 理解为：围绕0 的一个长度为$2a$ 的区间。若把不等号$<$ 换成$\le$，那就只是把端点$-a$ 和a 也一并包含进去。

事实上，我们还可以通过操作表达式$|x| < a$，把这种长度为$2a$ 的区间"平移"到别的地方。

平移形式（到某一点的距离）

对于$a > 0$，

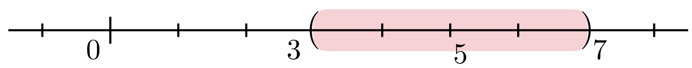
$$|x - b| < a \iff b - a < x < b + a, \qquad |x - b| \le a \iff b - a \le x \le b + a.$$

这表示x 与中心点b 的距离不超过a。

上式中的数b 让我们可以把区间的中心从0 改到b。为了看清这一点，我们来解不等式$|x-5|<2$，并画出它的解。

$$\begin{aligned}|x-5|&<2\\-2<x-5&<2\\3<x&<7\end{aligned}$$

因此，解集是区间$(3,7)$。注意，数字5 正好位于这个区间的中心，而5 到端点3 和7 的距离正好都是2。图像如下：



练习答案

练习1

$$\text{(a) } \frac{5}{7}, \qquad \text{(b) } \frac{15}{2}, \qquad \text{(c) } \frac{2}{3}, \qquad \text{(d) } \frac{5}{3}.$$

练习2

$$12\text{ oz:}\quad \frac{2.79}{12}\approx 0.2325\ \$/\text{oz}, \qquad 16\text{ oz:}\quad \frac{3.49}{16}\approx 0.2181\ \$/\text{oz}.$$

因此，16 盎司那一盒的单位价格更低。

练习3

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{5}&=\frac{4}{3}\\3(x-2)&=20\\3x-6&=20\\3x&=26\\x&=\frac{26}{3}.\end{aligned}$$

练习4

练习5

$$
\begin{aligned}
-2 \le 3x-2 &< 2 \\
0 \le 3x &< 4 \qquad \text{（所有部分同时加2）} \\
0 \le x &< \frac{4}{3} \qquad \text{（所有部分同时除以3）}
\end{aligned}
$$

解集：$\left[0, \frac{4}{3}\right)$。

练习6

1. $|x-2| = 3$

$$
\begin{aligned}
x-2 = 3 \quad &\text{或} \quad x-2 = -3 \\
x = 5 \quad &\text{或} \quad x = -1
\end{aligned}
$$

因此解为$x = -1, 5$。

2. $|x+4| = 3x$
由于$|x+4| \ge 0$，所以必须有$3x \ge 0$，也就是说$x \ge 0$。现在分情况讨论：
情形1： $x+4 \ge 0$（对于所有$x \ge 0$ 都成立）。此时$|x+4| = x+4$，所以

$$x+4 = 3x \quad \Rightarrow \quad 4 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

情形2： $x+4 < 0$，这会推出$x < -4$，与$x \ge 0$ 矛盾。因此，唯一的解是$x = 2$。

3. $|3x+8| = 0$

$$3x+8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{8}{3}.$$

4. $|2x-4| = -2$
由于对所有x 都有$|2x-4| \ge 0$，它不可能等于-2。因此，**无解**。