MAT140 — 第4講ハンドアウト
一次方程式の続き

前回の講義では，一次方程式を導入しました。これは，ほとんど最も簡単な種類の方程式です。私たちは基本形$ax + b = 0$ から始めて，そこから少しずつ複雑にしていきました。その講義を通して，こうしたさまざまな種類の一次方程式を解く方法を学びました。

この講義では，一次方程式のいくつかの応用を見始めます。特に，線形関係を扱うときに何度も現れる標準的な道具をいくつか身につけます。具体的には，次のものを見ていきます。

1. 比，比率，比例，
2. 線形関係のいくつかの基本的な実世界での応用，
3. 一次不等式と区間表記，
4. そして最後に，絶対値と絶対値不等式。

1　比と比例

1.1　比

「ratio」という語はラテン語に由来し，「計算」あるいは「比例」のような意味を持ちます。実際，私たちはすでにこの語根を見ています。「rational number（有理数）」という語は，二つの数の比として表せる実数，たとえば分数を指します。これは，次の定義に対するかなり大きな手がかりになります。

比

比とは，二つの量を割り算によって比較することです。a とb が数で，$b \neq 0$ なら，a とb の比は

$$\frac{a}{b} \qquad \text{または} \qquad a : b$$

と書けます。

比の記法$a : b$ は分数$\frac{a}{b}$ と同じです。したがって，順序は重要です。一般に，$a : b$ と$b : a$ は同じではありません。

比に関する問題を解くときは，たいていすべてを分数に直してから考えるのが最も簡単です。したがって，これは比を扱うときの基本技能です。いくつか例を見ましょう。

1. 7 と5 の比は$\frac{7}{5}$ で与えられます。
2. 12 と8 の比は$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ で与えられます。
3. 10 と2 の比は$\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$ で与えられます。
4. $3\frac{1}{2}$ と$5\frac{1}{4}$ の比は$\frac{7}{2} \div \frac{21}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{21} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$ で与えられます。

実際には，比にはたいてい単位がついています。たとえば，長さどうし，重さどうし，時間どうし，速さどうしを比較するために比を取ることがあります。このような現実の場面では，比較する量が同じ単位で表されていることを確認するのが大切です。たとえば，4 フィートと8 イ

ンチを比べたいなら，まず二つを同じ単位に直さなければなりません。たとえば4 フィートを48 インチに直します。そうしてはじめて，比が意味を持ちます。

練習問題1

次の相対的な大きさを比較する比を求めなさい。

1. 5 リットルと7 リットル
2. 3 メートルと40 センチメートル
3. 200 セントと3 ドル
4. 30 か月と1.5 年

1.2 単位あたりの率と単価

最初の応用として，比を使って商品の単価を求めてみます。一般式は次の通りです。

単位率（単価）

単位率とは，*1* 単位あたりの率のことです。価格比較における**単価**は

$$\text{単価} = \frac{\text{費用}}{\text{数量}}.$$

例として，ある店で二つの米袋を売っているとします。これを袋A と袋B と呼ぶことにします。袋A は重さが5kg で価格が4500 円，袋B は重さが7kg で価格が6000 円です。どちらがお得でしょうか。

二つの袋は，重さあたりの価格の比を作ることで比較できます。やり方はいくつかあり，キログラムを使ってもよいですし，グラムを使ってもよいです。考え方を示すために，ここでは両方やってみます。「1 キログラムあたりの価格」の比を作るなら，単価の公式を次のように使います。

$$\text{袋A: } \frac{4500}{5} = 900 \text{ 円/kg}, \qquad \text{袋B: } \frac{6000}{7} \approx 857.14 \text{ 円/kg}.$$

あるいは，「1 グラムあたりの価格」を計算して比較することもできます。

$$\text{袋A: } \frac{4500}{5000} = \frac{9}{10} \text{ 円/g}, \qquad \text{袋B: } \frac{6000}{7000} = \frac{6}{7} \text{ 円/g}.$$

どちらにしても，袋B のほうが重さあたりの価格が低いので，こちらのほうがお得です。

練習問題2

12 オンス入りの朝食シリアルが\$2.79，16 オンス入りの同じシリアルが\$3.49 のとき，どちらの単価が低いですか。

1.3　比例式

比例式とは，単に二つの比が等しいことを表す文，すなわち両辺に比をもつ方程式のことです。

比例式

比例式とは，二つの比が等しいことを述べる方程式です。つまり，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{ただし } b\neq 0 \text{ かつ } d\neq 0.$$

実際には，比例式の問題には，求めるべき未知量が含まれていることがよくあります。これを求める最も簡単な方法は，交差に掛ける方法です。

交差に掛ける方法

もし$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なら（ただし$b\neq 0$ かつ$d\neq 0$），

$$ad=bc.$$

交差に掛ける方法とは，単に両方の分母を同時に掛けることです。

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}&=\frac{c}{d} && \text{両辺に } bd \text{ を掛ける}\\ bd\left(\frac{a}{b}\right)&=bd\left(\frac{c}{d}\right) && \text{簡単にする}\\ ad&=bc \end{aligned}$$

例として，比例式

$$\frac{50}{x}=\frac{2}{28}$$

を考えます。x を求めるには，交差に掛ければよいです。

$$\begin{aligned} \frac{50}{x}&=\frac{2}{28}\\ 50\,(28)&=2x\\ \frac{1400}{2}&=x\\ 700&=x \end{aligned}$$

練習問題3

$\frac{x-2}{5}=\frac{4}{3}$ を解きなさい。

1.3.1　縮尺図

比例式は，図形の縮尺図を作るときに役に立ちます。次の例を考えましょう。ある三角形の土地に，互いに垂直な二辺が100 ft と210 ft あります。短いほうの辺を8 インチとして比例したス

ケッチを描くとします。この図を元の土地に比例させたいなら，長いほうの辺は何インチにすればよいでしょうか。

この問題は，比例式を立てて解くことで解けます。まず，大きい三角形の土地の辺の比は$210 : 100$ であり，未知量x を使えば，スケッチの辺の比は$x : 8$ になります。この問いは，この二つの比が同じになるようにせよ，と言っています。したがって，比例式を立ててx を解きます。

$$\begin{aligned}\frac{210}{100} &= \frac{x}{8}\\ 8 \times 210 &= 100x\\ \frac{1680}{100} &= x\\ 16.8 &= x.\end{aligned}$$

したがって，図が正確になるようにするには，スケッチの長い辺を16.8 インチにする必要があります。

2 文章題とよく使う公式

一次方程式として現れるよく使う公式

実世界でよく使われる公式の多くは，実際には一次方程式です。

- **温度:** $F = \frac{9}{5}C + 32$
- **単利:** $\text{Interest} = \text{Principal Investment} \times \text{Interest Rate} \times \text{time}$
- **距離:** $\text{distance} = \text{speed} \times \text{time}$

これから，これらの公式の応用をいくつか見ていきます。

2.1 例– 単利を計算する

単利で利息がつく口座に\$5000 を預けたとします。6 か月後，口座で得られた利息は\$162.50 でした。年利はいくらですか。

これを計算するには，上の公式$I = Prt$ を使えます。問題文から分かっているのは

- 得られた利息：$I = 162.50$，
- 元金：$P = 5000$，
- かかった時間：$t = 6$ か月

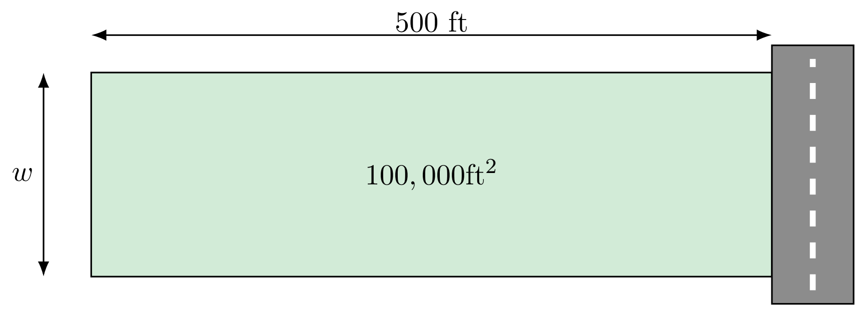
です。しかし，求めたいのは年利です。したがってt の値は実際には0.5 です。6 か月は1 年の半分だからです。これでI, P, t の値を公式に代入し，r を解けます。

$$\begin{aligned} I &= Prt \\ 162.50 &= 5000(r)(0.5) \\ 162.50 &= 2500r \\ r &= \frac{162.50}{2500} = 0.065 \end{aligned}$$

したがって，年利は$r = 0.065$，すなわち6.5% です。

2.2 例– 柵と土地

長さが500 ft，面積が合計100,000 平方フィートの長方形の土地を所有しているとします。下の図でw とラベルされた前面の辺に沿ってフェンスを設置したいとします。フェンスの価格は1フィートあたり$5.50 です。この情報にもとづくと，長方形の土地の前面の長さにはいくらかかりますか。



この問いを解くには，（a）前面の長さの値を求め，そのあとで（b）その費用を計算する必要があります。これを別々に行います。

(a) 前面の長さを求める。$A = lw$ を使うと，

$$\begin{aligned} A &= lw \\ 100{,}000 &= 500(w) \\ w &= \frac{100{,}000}{500} = 200. \end{aligned}$$

したがって，前面の長さは200 ft です。

(b) 総費用：

$$200(5.50) = 1100.$$

したがって，費用は$1100 です。

2.3 例– 水が抜けるプール

地上設置型のプールの容量が15,600 ガロンであるとします。排水管を使うと，このプールは6.5 時間で空になります。水は1 分あたり何ガロンの割合で排水管を流れますか。

この問題に答えるためにも，一次方程式を立てます。ここでは，割合を1 分あたりのガロン数で表すよう求められているので，まず6.5 時間を分に直さなければなりません。$6.5 \times 60 = 390$ 分です。したがって，$t = 390$ とします。プールが排水される割合は，上で挙げた速さの公式とよく似た方法で求められます。失われた体積の合計は，失われる割合に時間を掛けたものに等しいのです。プールは390 分で完全に空になるので，基本的な一次方程式を立てて，減少率を解きます。

$$\begin{aligned} 15600 &= 390r \\ \frac{15600}{390} &= r \\ r &= 40. \end{aligned}$$

したがって，プールは1 分あたり40 ガロンの割合で排水されます。

単位の次元

実世界の問題を解くときには，自分が扱っている単位の次元を追跡することが大切です。たとえば，

- **周の長さ**は**一次元の単位**（メートル，インチ，フィートなど）で測られます。
- **面積**は**平方単位**（平方メートル，平方インチ，平方フィートなど）で測られます。
- **体積**は**立方単位**（立方メートル，立方インチ，立方フィートなど）で測られます。

3　一次不等式

3.1　不等式と解集合

方程式は，二つの代数式が同じ，つまり等しいと述べるものです。これに対して，不等式は，二つの代数式が等しくないことを述べるものです。すべての実数は数直線上にあるので，それらは$<$ という大小関係で並べることができます。不等式は，この観察を少し一般化したものです。

不等式

不等式とは，二つの代数式を

$$<,\ \leq,\ >,\ \geq$$

という記号で比較するものです。**不等式の解**とは，その不等式を真にするx の値のことです。

ふつう，不等式にはただ一つの解があるのではなく，解集合があります。不等式は方程式より制約が弱いので，解集合には無限に多くの解が含まれることがよくあります。

3.2　区間表記

不等式の解集合は，実数直線の一部分である区間になることが多いです。ここで新しい記法を導入します。

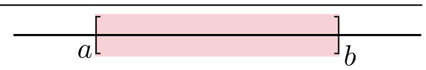
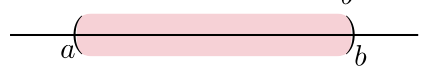
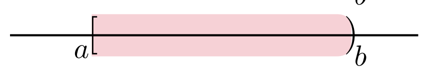
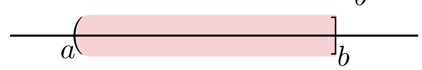
区間表記

有界区間には四つの型があります。

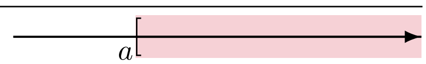
$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x:\ a \le x \le b\},\\
(a,b) &= \{x:\ a < x < b\},\\
[a,b) &= \{x:\ a \le x < b\},\\
(a,b] &= \{x:\ a < x \le b\}.
\end{aligned}
$$

ここで，角括弧[と] は端点を含むことを意味し，丸括弧(と) は端点を含まないことを意味します。

これらの有界区間は，図で表すと次のようになります。

区間	不等式	数直線
$[a,b]$	$a \le x \le b$	
(a,b)	$a < x < b$	
$[a,b)$	$a \le x < b$	
$(a,b]$	$a < x \le b$	

上で述べた有界区間に加えて，無界区間もあります。これは，不等式の片側が正の無限大や負の無限大（あるいは両方）へ伸びていく場合です。図で表すと次のようになります。

区間	不等式	数直線
$[a,\infty)$	$x \ge a$	
(a,∞)	$x > a$	
$(-\infty,b]$	$x \le b$	
$(-\infty,b)$	$x < b$	
$(-\infty,\infty)$	すべての実数	

練習問題4

各不等式を数直線上に表しなさい。

(a) $x > -2$,　　(b) $-6 \le x \le 5$,　　(c) $x < 3$.

3.3　不等式を解く

不等式は，これまで見てきた多くの技術を使って解くことができます。ここでも目標は，逆演算を用いて変数を孤立させることです。次の性質によって，方程式の場合と似た操作ができることが分かります。

不等式の性質

実数a, b, c に対して：

- もし$a < b$ なら，$a + c < b + c$ かつ$a - c < b - c$。
- もし$a < b$ かつ$c > 0$ なら，$ac < bc$ かつ$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$。
- もし$a < b$ かつ$c < 0$ なら，$ac > bc$ かつ$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$（不等号が**逆転する**）。
- もし$a < b$ かつ$b < c$ なら，$a < c$（推移律）。

上のことを見ると，不等式を解くことは，基本的には方程式を解くことと同じだと言いたくなるかもしれません。しかし，それは正しくありません。

重要な点

不等式を解くことは方程式を解くことと非常によく似ていますが，二つの大事な違いがあります。

- **負の数**を掛けたり割ったりするときは，不等号を**反転**しなければなりません。
- 答えはふつう**解集合** であり，多くの場合**区間表記** で書きます。

例として，不等式$x + 6 < 9$ を解いて，その解を図示してみます。ここでも目標は，x を孤立させるように不等式を並べ替えることです。つまり，x だけにすることです。この場合は，両辺から6 を引けばそれができます。

$$
\begin{aligned}
x + 6 &< 9 \\
x &< 3
\end{aligned}
$$

したがって，3 より小さいどんなx でも，不等式$x + 6 < 9$ を満たします。解集合は$(-\infty, 3)$ と書けて，その図は次の通りです。

3.4 複合不等式

複合不等式

複合不等式とは，たとえば

$$a \leq \text{expression} < b$$

のように，二つの部分を持つ不等式のことです。

複合不等式は，いつもの演算を今度は三つの部分すべてに同時に行うことで解くことができます。

複合不等式は，実際に見てみるのがいちばん分かりやすいです。不等式$-7 \leq 5x - 2 < 8$ を考えます。いつものように，ここでの目標は式$5x - 2$ に逆演算を施して，x を孤立させることです。そのためには，+2 を加えてから5 で割ればよいです。この操作を二つの不等号の両方に同時に

行います。

$$\begin{aligned} -7 &\le 5x - 2 < 8 \\ -5 &\le 5x < 10 \qquad \text{（すべてに2 を足す）} \\ -1 &\le x < 2 \qquad \text{（すべてを5 で割る）} \end{aligned}$$

したがって，-1 から2 の間にある任意のx（-1 を含む）は，不等式$-7 \le 5x - 2 < 8$ を満たします。解集合は$[-1, 2)$ と書き，図で表すと次のようになります。

練習問題5

解を求め，その解集合を区間表記で書きなさい。

$$-2 \le 3x - 2 < 2.$$

4　絶対値と絶対値不等式

4.1　絶対値

Lecture 1 の絶対値を思い出すと，絶対値とは「負の数からマイナス記号を取り除く」ような操作だと思うかもしれません。しかし，厳密には絶対値の操作はそれより少し微妙です。

絶対値

実数x に対して，**絶対値** $|x|$ とは，数直線上でx から0 までの距離のことです。同値な定義として，

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

上の二つの場合分けを見ると，この絶対値の定義が，たしかに数に含まれるマイナス記号を取り除く役割を持っていることが分かります。この二つの場合に分かれる定義のため，絶対値を含む方程式を解くときには，実際には作業を二つに分けます。簡単な例として，方程式$|x| = 3$ を考えます。この文は「変数x は0 からちょうど距離3 のところにある」というようなことを言っています。したがって，可能な解は二つあり，$x = 3$ と$x = -3$ です。

絶対値の中がもっと複雑な式である場合にも，方程式全体を二つの場合に分けて解きます。これら二つの場合は，上の定義を見ることで書くことができます。方程式$|x + 2| = 4$ を考えましょう。このとき二つの場合があります。[1]

- 場合1: $x + 2 = 4$
- 場合2: $-(x + 2) = 4$，したがって$x + 2 = -4$

[1] これら二つの場合を，上の絶対値の定義と比べてみてください。定義の中のすべての“x” を，式“$x + 2$” に置き換えるだけで二つの場合を書けます。

この二つの場合は別々に解かなければならないので，二つの異なる解が得られます（ちょうど$|x| = 3$ が$x = \pm 3$ を持つのと同じです）。場合1 では$x = 2$，場合2 では$x = -6$ となります。これら二つの値が，方程式$|x + 2| = 4$ の二つの解です。[2]

このように，絶対値を含む方程式を二つの場合に分けて別々に解く方法が，たいていは正しいやり方です。しかし，この方法にはいくつか例外もあります。

絶対値方程式の例外的な場合

絶対値が特別な値をとる状況がいくつかあります。

- もし$|x| = 0$ なら，唯一の解は$x = 0$ です。
- もし$|x| = a$ で$a < 0$ なら，その方程式は解を持ちません。

練習問題6

次を解きなさい。

1. $|x - 2| = 3$
2. $|x + 4| = 3x$
3. $|3x + 8| = 0$
4. $|2x - 4| = -2$

4.2 絶対値不等式

絶対値を含む不等式も，上の方程式と似たように振る舞います。この場合にも，たいてい不等式は二つの部分に分かれて，それを解く必要があります。ただし，今度はその二つを複合不等式として同時に解くことになります。

絶対値不等式

a を$a > 0$ を満たす実数とし，x を変数とします。

$$|x| < a \iff -a < x < a, \qquad |x| \le a \iff -a \le x \le a.$$

一見すると，これは奇妙な等価関係に見えるかもしれません。そこで，これを二通りの方法で説明します。まず代数的な見方をします。方程式$|x| = a$ は二つの場合，すなわち$x = -a$ と$x = a$ に分かれることを私たちは知っています。同様に，不等式$|x| < a$ も二つの場合に分かれます。

- 場合1: $x < a$
- 場合2: $-x < a$

この二つの場合は，Section 4.1 の二つの場合とまったく同じ形で，等号が不等号に置き換わっているだけです。ここで，場合2 では両辺を-1 で割ることができ，不等号が反転して$x > -a$ に

[2]もちろん，$x = 2$ と$x = -6$ を方程式に代入して確認することもできます。$|(2)+2| = |4| = 4$ であり，$|(-6)+2| = |-4| = 4$ です。

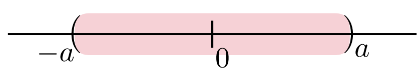
なります。これを場合1 と合わせると，複合不等式

$$-a < x < a$$

を得ます。これを幾何的にも説明できます。絶対値は，実数直線上の数と0 との距離を与えることを思い出してください。不等式$|x| < a$ の場合，これは「x と0 の距離がa より小さい」ということを言っています。ここには二つの可能性があります。

- a より小さい正の数x はどれも，a より0 に近いです。
- 数$-a$ は0 からの距離が$|-a| = a$ なので，$-a$ と0 の間にある負の数x も，やはり距離がa より小さくなります。

. これらはまさに上の二つの場合そのものです。$-a < x \le 0$ または$0 \le x < a$ を満たすx を選べば，x がa や$-a$ よりも0 に近いことが保証されます。さらに，「$-a < x \le 0$ または$0 \le x < a$」という文は，複合不等式$-a < x < a$ と書くこともできます。図で見ると，陰影のついた部分にあるどのx も，不等式$|x| < a$ を満たします。



したがって，図形的には，$|x| < a$ という文は，0 を中心とする長さ$2a$ の区間を表していると理解できます。不等号$<$ を$\le$ に置き換えると，端点$-a$ とa がその区間に含まれるだけです。

実際には，$|x| < a$ の式を操作することで，この長さ$2a$ の区間を左右に「ずらす」こともできます。

平行移動した形（点からの距離）

$a > 0$ に対して，

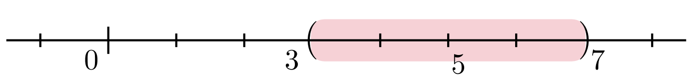
$$|x-b| < a \iff b-a < x < b+a, \qquad |x-b| \le a \iff b-a \le x \le b+a.$$

これは，x が中心点b から距離a 以内にあるということです。

上の不等式に出てくるb という数によって，区間の中心を0 ではなくb に移すことができます。これを実際に見てみるために，不等式$|x-5| < 2$ を解いて，その解を図示してみましょう。

$$\begin{aligned}|x-5| &< 2\\ -2 < x-5 &< 2\\ 3 < x &< 7\end{aligned}$$

したがって，解集合は区間$(3,7)$ です。この区間のちょうど真ん中にある数が5 であり，5 から端点3 や7 までの距離がちょうど2 であることに注意してください。図にすると次の通りです。



練習問題の解答

練習問題1

$$\text{(a)}\ \frac{5}{7},\qquad \text{(b)}\ \frac{15}{2},\qquad \text{(c)}\ \frac{2}{3},\qquad \text{(d)}\ \frac{5}{3}.$$

練習問題2

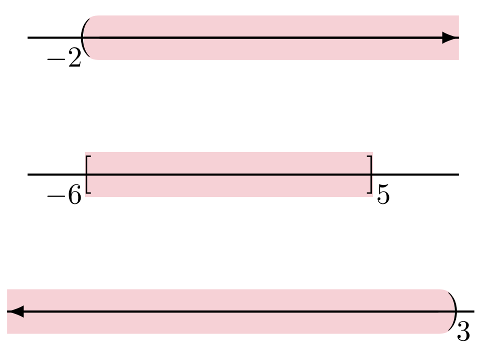
$$12\ \text{oz:}\ \frac{2.79}{12} \approx 0.2325\ \$/\text{oz},\qquad 16\ \text{oz:}\ \frac{3.49}{16} \approx 0.2181\ \$/\text{oz}.$$

したがって，16 オンスの箱のほうが単価が低いです。

練習問題3

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{5} &= \frac{4}{3}\\ 3(x-2) &= 20\\ 3x-6 &= 20\\ 3x &= 26\\ x &= \frac{26}{3}.\end{aligned}$$

練習問題4



練習問題5

$$\begin{aligned}-2 \le 3x-2 &< 2\\ 0 \le 3x &< 4 &&\text{（すべてに2 を足す）}\\ 0 \le x &< \frac{4}{3} &&\text{（すべてを3 で割る）}\end{aligned}$$

解集合：$[0, \frac{4}{3})$。

練習問題6

1. $|x-2|=3$

$$x-2=3 \quad \text{または} \quad x-2=-3$$
$$x=5 \quad \text{または} \quad x=-1$$

したがって，解は$x=-1, 5$ です。

2. $|x+4|=3x$
$|x+4| \geq 0$ なので，$3x \geq 0$，したがって$x \geq 0$ でなければなりません。ここで場合分けをします。
場合1: $x+4 \geq 0$（これは$x \geq 0$ のすべてで成り立つ）。このとき$|x+4|=x+4$ なので，

$$x+4=3x \quad \Rightarrow \quad 4=2x \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

場合2: $x+4<0$ なら$x<-4$ ですが，これは$x \geq 0$ に矛盾します。したがって，唯一の解は$x=2$ です。

3. $|3x+8|=0$

$$3x+8=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{8}{3}.$$

4. $|2x-4|=-2$
$|2x-4| \geq 0$ はすべてのx で成り立つので，これが-2 に等しくなることはありません。したがって，**解はありません**。