MAT140 — 第5讲讲义
方程的图像

不同的人以不同的方式看待数学。对有些人来说，数学纯粹是一种“符号游戏”，其目标是找到对符号进行正确且合法操作的方法，从而得到你想要的结果。对另一些人来说，数学更像是一门艺术，所有这些符号都应当有某种解释，而作为数学家，我们的目标就是以某种方式去发现其中隐藏的意义。当然，这是一幅相当简化的图景。实际上，同时采取这两种方法，并能够在它们之间高效切换，是很有用的。有时候，埋头计算数字或符号会很有帮助；而另一些时候，试着看见更大的图景则更有帮助。前一种心态通常会带来结果，而后一种则会带来洞见。

在过去的几讲中，我们大多一直在处理第一种思维方式：我们引入了一大堆符号，并玩弄它们的操作。我们看到，可以通过一连串“合法步骤”来解方程，而这些步骤最终会把我们引向答案。在这一讲中，我们将开始采取相反的视角，去看所有这些东西在几何上到底意味着什么。

在本讲中，我们将学习如何在坐标平面上解释并绘制方程的图像。我们还将引入**关系**与**函数**的概念，以及一个用来判断某个图像是否表示函数的简单检验方法。

1 坐标平面与有序对

我们先从今天最基本的概念开始，也就是有序对。

有序对

有序对是一对按顺序排列的实数(a, b)，也就是说，一般而言

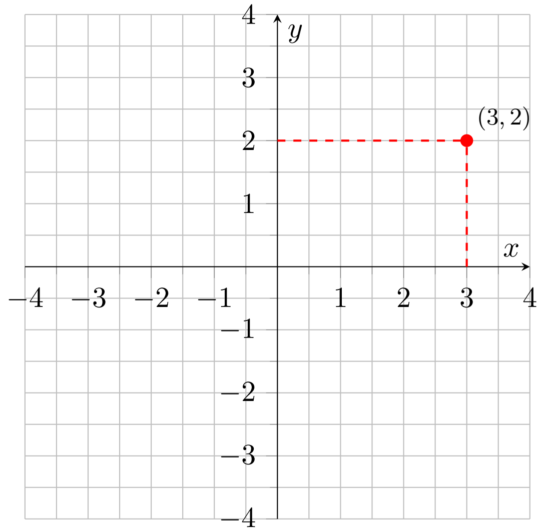
$$(a, b) \neq (b, a).$$

对于两个有序对(a, b) 和(c, d)，它们只有在$a = c$ 且$b = d$ 时才相等。

1.1 坐标平面

实数可以排列在一条直线上，我们一直把这条线称为数轴或实数轴。类似地，有序对可以排列在一个平面中，这个平面是两条实数轴的笛卡儿积。这使我们能够把有序对(a, b) 理解为这个平面中的坐标。

通常记作$\mathbb{R}^2$ 的坐标平面如下所示。



正如你所看到的，这里有两条互相垂直的直线，它们就像是两条实数轴的复制。这两条线各自带有标记，它们对应两种根本不同的方向：水平和竖直。它们分别称为x **轴**和y **轴**。

这个坐标平面中的每一个点都可以向x 轴或y 轴投影，这意味着平面中的任意一点都可以由两个数来描述：一个水平数值和一个竖直数值。这两个数称为该点的坐标，它们由有序对表示。例如，有序对$(3, 2)$ 在上图中已经用红色标出。

对于任意有序对(x, y)：

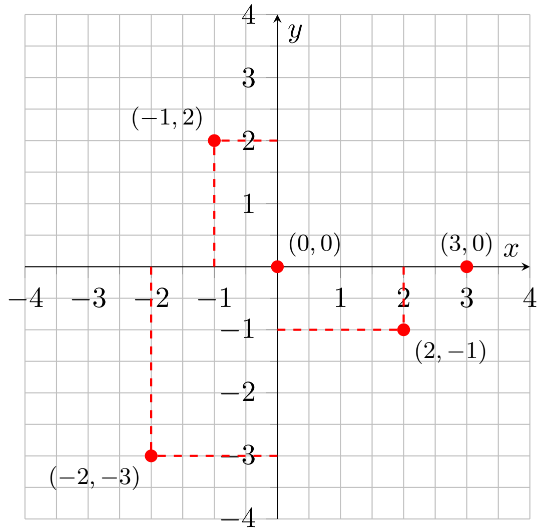
- 数字x 告诉你从原点向左或向右移动多远；
- 数字y 告诉你从原点向下或向上移动多远。

读取坐标

要描出(x, y)：

1. 从$(0, 0)$ 开始。
2. 先沿着x 轴移动x 个单位（若$x > 0$ 向右，若$x < 0$ 向左）。
3. 然后平行于y 轴移动y 个单位（若$y > 0$ 向上，若$y < 0$ 向下）。

例如，点$(-1, 2)$、$(3, 0)$、$(2, -1)$、$(0, 0)$ 和$(-2, -3)$ 画在下面的坐标平面上。



1.2　把有序对看作方程的解

在前面的讲义中，我们已经见过单变量方程的解。方程的解就是那些在代入之后能够使方程变成真命题的具体数值。例如，方程$x-3=1$ 的一个解是$x=4$，而$x=30$ 则不是。

当我们在坐标平面$\mathbb{R}^2$ 中工作时，变量x 和y 往往有一种关系，而这种关系可以用一个方程来表达。与我们在第2、3、4 讲中见过的那些方程不同，这里的方程有两个变量。例如：

$$y=3x+2, \qquad y+x^2=3, \qquad 3y+4x=5.$$

两变量方程的解

对于一个含有两个变量x 和y 的方程，一个**解**是一个能够使该方程成立的有序对(x, y)。

我们来考虑方程$y = 3x+2$。一个解就是某个x 值和某个y 值的组合，只要它们代入后能使方程$y=3x+2$ 成为真命题。例如，有序对$(0, 2)$ 是一个解，而有序对$(1, 3)$ 不是。[1]

如何验证一个解

要验证一个有序对(a, b) 是否是变量为x 和y 的某个方程的解，可按以下步骤进行。

1. 把$x=a$ 和$y=b$ 代入方程。
2. 化简方程两边。
3. 如果两边化简后得到同一个数，那么这个有序对就是一个解；否则它不是解。

练习2.1

检验下列有序对是否是方程$x+3y=6$ 的解：

$$(1, 2), \qquad (0, 2).$$

[1]如果把$x=0$ 和$y=2$ 代入方程$y=3x+2$，就得到$2=3(0)+2$，这是真的，因此$(0, 2)$ 是一个解。可是如果把$x=1$ 和$y=3$ 代入，就得到$3=3(1)+2$，这并不成立，因此$(1, 3)$ 不是方程$y=3x+2$ 的解。

2 两变量方程的图像

到目前为止，我们只看到了如何验证某个有序对是不是某个方程的解。然而，一般来说，一个含有两个变量的方程会有许多个可能的解。于是，变量x 与y 之间的完整关系就可以用图像来表示。

方程的图像

方程的图像就是该方程**所有**解所构成的集合。

由于两变量方程的解都是有序对，因此这些图像可以画在坐标平面$\mathbb{R}^2$ 上。这样就得到一幅图，它描述了变量x 与y 之间的完整关系。根据方程的不同，图像可能是一条直线、一条曲线，或者坐标平面中的其他形状。图像是一种把方程的所有解一次性表示出来的方法。任何一个解都会落在它的图像上。

绘制一个方程的图像有时会很困难。在这门课程中，我们将逐步发展各种技能，来帮助我们识别方程及其图像中的关键成分，从而更准确地绘图。不过现在，我们先专注于一种更简单的技巧，叫做草绘图像。图像的草绘可以看作是对图像形状的一种有根据的猜测。事实上，在某些情境中，只要给出图像的草图，而不是一个完全精确的图，就已经足够了。

利用点作图来草绘图像

可以通过在坐标平面上描出若干样本点来草绘图像。

1. 如果可能的话，先把方程改写成让y 单独位于等号一边的形式。
2. 选取若干个小而合理的x 值作为样本。
3. 制作一张表，把这些x 值代入方程，求出相应的y 值。这样就得到一组是方程解的有序对。
4. 在坐标平面$\mathbb{R}^2$ 上描出这些解。
5. 用平滑的线把这些点连起来。

一般来说，样本点中x 的个数可以自由选择。不过，你选取的x 值越多，图像的规律就越容易辨认。事实上，许多绘图计算器正是这样草绘图像的。计算机会取大量的x 值作为样本，以至于所得的这些解在屏幕上看起来就像一条连续的线。

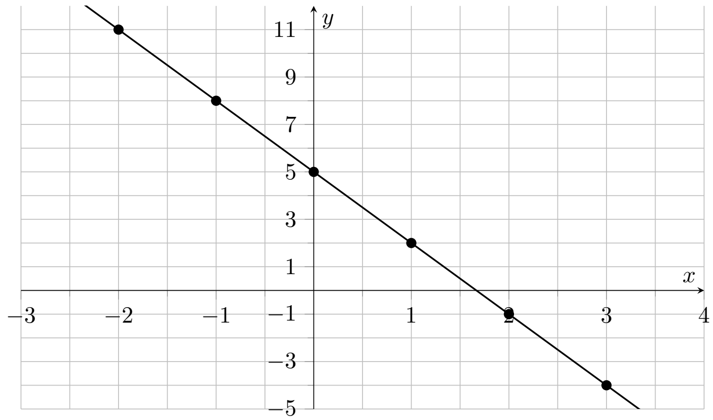
作为点作图法的一个例子，考虑方程$y + 3x = 5$。在这里，第一步是把变量y 单独留出来，因此我们把两边都减去$3x$，得到等价方程

$$y = -3x + 5.$$

接下来，我们取一些较小的x 值样本，并填写下表：

x	-2	-1	0	1	2	3
y	11	8	5	2	-1	-4
解	$(-2, 11)$	$(-1, 8)$	$(0, 5)$	$(1, 2)$	$(2, -1)$	$(3, -4)$

现在我们把表格最后一行中的解描在坐标平面上，再用一条直线把它们连起来。



练习2.2

利用点作图法草绘下列图像：

1. $x^2 + y = 4$
2. $y = |x - 1|$

2.1 坐标轴截距

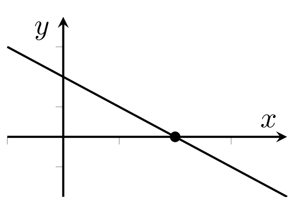
在实际中，研究图像与x 轴和y 轴的交点往往非常有启发性。这些点称为截距。

x 截距与y 截距

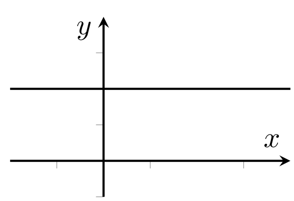
对于任意一个方程的图像：

- x **截距**是图像与x 轴相交的地方（令$y = 0$）；
- y **截距**是图像与y 轴相交的地方（令$x = 0$）。

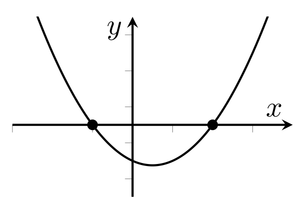
需要注意的是，取决于图像的形状，它与x 轴或y 轴的截距可能存在，也可能不存在。下面是几种不同类型的x 截距的例子：



唯一的x 截距



没有x 截距



多个x 截距

我们可以通过令y 或x 等于零，然后解另一个变量，来尝试计算截距。根据方程的不同，所需的解可能并不存在。例如，考虑方程$y = 2x - 5$。那么：

$$y \text{ 截距：} x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5). \qquad x \text{ 截距：} y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

3 关系与函数

关系只是用来描述两个事物之间某种联系的一种数学方式。严格地说，它们是利用集合构造出来的，而集合其实是很多数学结构的基本构件。

集合是一个无序且没有额外结构的对象集合。我们用花括号{ 和} 来表示集合。这个概念非常开放，以至于几乎所有东西都可以用集合来描述。例如，我们可以考虑：

- 地球上所有国家构成的集合：$\{\text{Afghanistan}, \text{Albania}, \ldots, \text{Zimbabwe}\}$
- 木星所有卫星构成的集合：$\{\text{Europa}, \text{Io}, \text{Ganymede}, \ldots\}$
- 所有偶数构成的集合：$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$。

集合可以是有限的，也可以是无限的，而它们仅仅由所包含的对象来刻画。在这个层次上，最好的理解方式就是把集合看作"让我们能够把对象收集起来的东西"。

需要注意的是，我们永远不会把集合中的同一个元素写多次；例如，集合$\{1, 1, 2\}$ 与集合$\{1, 2\}$ 是同一个东西。

3.1 关系

我们可以用集合来定义什么是关系。关系有两个重要组成部分，分别叫做关系的定义域和值域。

> 关系；定义域和值域
>
> 一个关系R 是一个有序对的集合。R 的定义域是R 中所有有序对第一分量所构成的集合，而R 的值域是R 中所有有序对第二分量所构成的集合。我们用$\mathrm{Dom}(R)$ 表示R 的定义域，用$\mathrm{Ran}(R)$ 表示R 的值域。

一个关系的例子可以是：

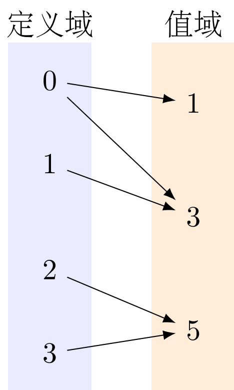
$$R = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (0, 3)\}.$$

这里，R 的定义域就是这些有序对第一分量所构成的集合，而值域就是第二分量所构成的集合：

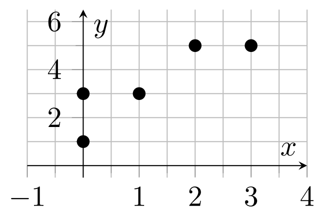
$$\mathrm{Dom}(R) = \{0, 1, 2, 3\} \qquad \mathrm{Ran}(R) = \{1, 3, 5\}.$$

注意，我们不会把相同的元素重复写出来。

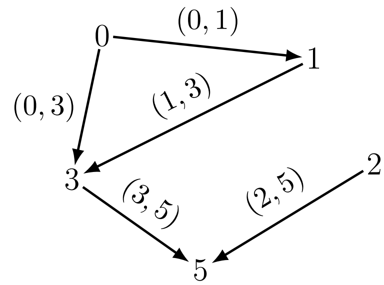
关系有很多种表示方式，而在不同的情境中，有的方式可能比别的更合适。下面给出三种可能的表示方法：映射图、坐标图，以及"抽象图"。



映射图



坐标图



抽象图

3.2 函数

“函数”是数学中的一个基本工具，它可以用来描述各种有趣的事物。最好把函数看成一种机器，它接受输入并输出某个结果。这台机器有一定的规则：它只接受某些输入，并且对每一个输入都只有**唯一的一个输出**。更精确的定义如下。

函数

一个**函数**是一个关系，并且其中没有任何输入值会对应两个不同的输出值。

- f 是函数的**名字**，
- x 是**输入**（定义域中的值），
- $f(x)$ 是与该输入对应的**输出**（值域中的值）。

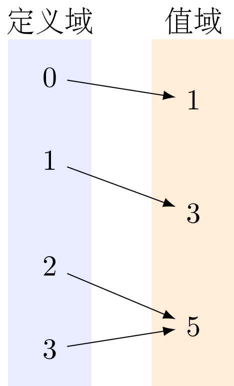
3.2.1 识别函数

能够识别函数是很重要的。根据函数被表示的方式不同，我们可能需要用不同的方式来思考它。不过，无论如何，都有一条根本规则。

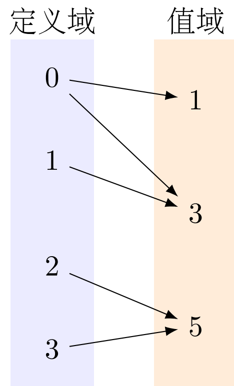
识别函数

如果一个关系R 的定义域中存在某个元素，它对应到值域中的两个不同元素，那么R 就不是函数。

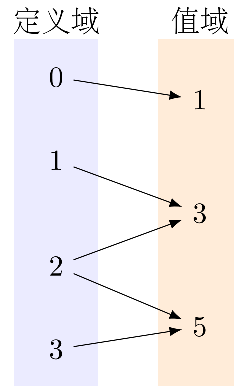
如果一个关系用映射图表示，那么当且仅当定义域中的每个元素都只有一条箭头射出时，这个关系才是函数。例如，考虑下面表示的关系。



函数



不是函数



不是函数

正如你所看到的，在第二和第三种情形中，定义域中都有某个元素射出了多条箭头。这意味着它们不是函数。然而，在第一种情形中，定义域中的每个元素都只映射到值域中的一个元素，因此这个图表示的是一个函数。

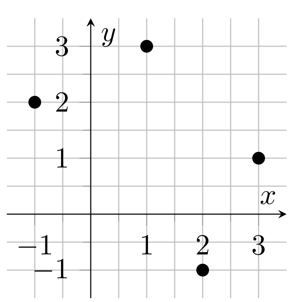
垂直线检验

关系R 也可以表示成坐标平面中的图像，即把$\mathrm{Dom}(R)$ 中的值放在x 轴上，把$\mathrm{Ran}(R)$ 中的值放在y 轴上。在这种情况下，我们可以利用“垂直线检验”来视觉上判断一个关系是否是函数。

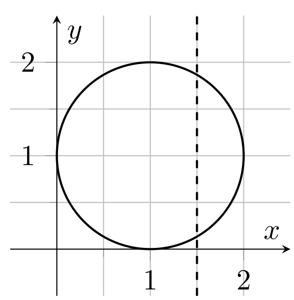
垂直线检验

当且仅当**没有任何一条垂直线**与图像相交超过一次时，这个图像才表示y 是x 的函数。

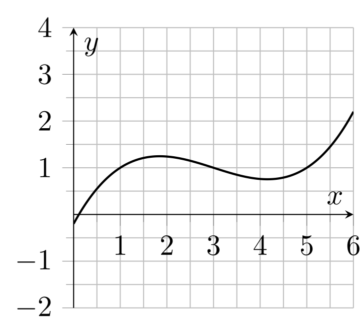
如果某条垂直线与图像相交两次，那就意味着同一个输入x 对应了两个不同的y 值，因此这个图像并不表示函数。下面给出三个例子。



函数



不是函数



函数

3.3 函数的求值

记号$f(x)$ 表示当输入为x 时，函数f 的输出值。因此，我们可以把具体的x 值代入进去，看看函数对它做了什么。这就称为对函数进行“求值”。例如，考虑函数$g(x) = 3x - x^2$。我们分别在$x = 2$ 和$x = 0$ 处对g 求值：

$$g(2) = 3(2) - (2)^2 = 6 - 4 = 2, \qquad g(0) = 3(0) - (0)^2 = 0.$$

练习3.1

设$h(x) = 2x + 1$。计算$h(-3)$ 和$h(4)$。

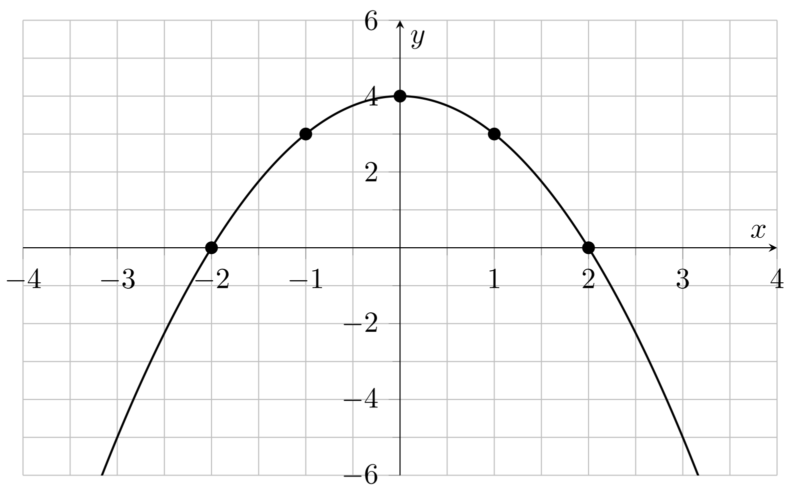
练习答案

练习2.1

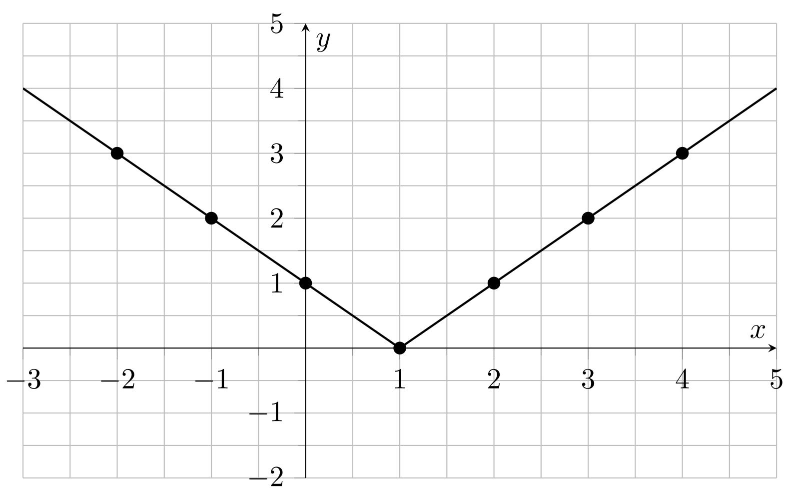
$$(1, 2):\ 1 + 3(2) = 7 \neq 6 \ \Rightarrow\ \text{不是解。} \qquad (0, 2):\ 0 + 3(2) = 6 \ \Rightarrow\ \text{是解。}$$

练习2.2

1. 方程$x^2 + y = 4$ 可以改写成$y = 4 - x^2$，这是一条开口向下的抛物线。



2. 绝对值函数$y = |x - 1|$ 的图像是一个"V"字形，顶点在$(1, 0)$。



练习3.1

$$h(-3) = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5, \qquad h(4) = 2(4) + 1 = 9.$$