

人によって、数学の見方はさまざまです。ある人にとって数学は、純粋に「記号のゲーム」であり、欲しいものを得るために記号を正しく合法的に操作することが目標です。別の人にとっては、数学はもっと芸術に近いものです。これらの記号はすべて何らかの解釈を持つべきであり、数学者としての私たちの目標は、その隠れた意味を何とかして見つけ出すことにあります。もちろん、これはかなり単純化した見方です。実際には、これら両方の見方を取り、その二つの間をうまく切り替えられることが有用です。数や記号を実際に計算していくことが役に立つときもあれば、大きな全体像を見ようとするのが役に立つときもあります。前者の考え方はふつう結果をもたらし、後者は洞察をもたらします。

ここ数回の講義では、私たちは主に前者の考え方を扱ってきました。たくさんの記号を導入し、それらの操作でいろいろ試してきました。方程式は、一連の「合法的な手順」を使うことで解けることを見ました。この講義では、それとは反対の見方を始めます。つまり、これらすべてが幾何学的に何を意味しているのかを見ていきます。

この講義では、座標平面上で方程式のグラフをどのように解釈し、どのように作るかを学びます。また、関係と関数の考え方を導入し、あるグラフが関数を表しているかどうかを判定するための簡単なテストも学びます。

1 座標平面と順序対

まず、今日の基本概念である順序対から始めます。

順序対

順序対とは、順序のついた二つの実数の組 (a, b) のことです。つまり、一般には

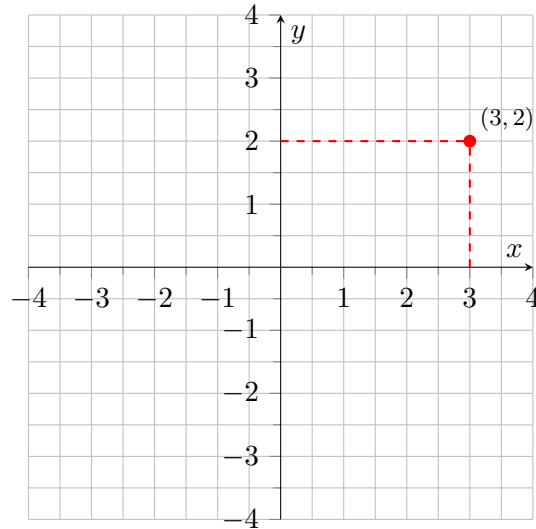
$$(a, b) \neq (b, a)$$

です。二つの順序対 (a, b) と (c, d) が等しいのは、 $a = c$ かつ $b = d$ のときに限ります。

1.1 座標平面

実数は一直線上に並べることができ、これを私たちは数直線または実数直線と呼んできました。同様に、順序対は平面上に並べることができ、この平面は実数直線を二つ掛け合わせたデカルト積です。これにより、順序対 (a, b) をこの平面上の座標として解釈できます。

座標平面はしばしば \mathbb{R}^2 と書かれ、下図のように表されます。



見てわかるように、互いに垂直な二本の直線があります。これは実数直線のコピーが二つあるようなものです。これらの直線にはラベルがついていて、それぞれまったく異なる二つの方向、つまり水平方向と垂直方向に対応しています。これらをそれぞれ x 軸 と y 軸 と呼びます。

この座標平面のすべての点は、 x 軸にも y 軸にも射影できます。つまり、この平面上のどの点も、二つの数、すなわち横方向の数と縦方向の数によって表せます。この二つの数をその点の座標と呼び、順序対で表します。たとえば、順序対 $(3, 2)$ は上のグラフに赤で示されています。

任意の順序対 (x, y) に対して：

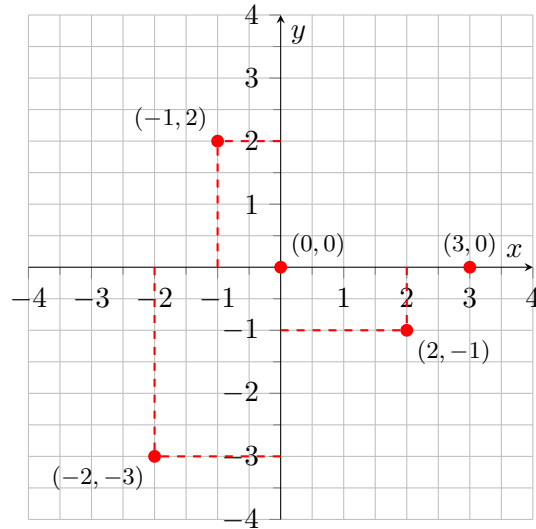
- 数 x は、原点から左右にどれだけ動くかを表し、
- 数 y は、原点から上下にどれだけ動くかを表します。

座標の読み方

(x, y) を打つには：

1. $(0, 0)$ から始める。
2. x 軸に沿って x だけ動く ($x > 0$ なら右, $x < 0$ なら左)。
3. そのあと、 y 軸に平行に y だけ動く ($y > 0$ なら上, $y < 0$ なら下)。

例として、点 $(-1, 2)$, $(3, 0)$, $(2, -1)$, $(0, 0)$, $(-2, -3)$ を下の座標平面に示します。



1.2 方程式の解としての順序対

前回までの講義では、一変数方程式の解を見てきました。方程式の解とは、その値を代入したときに方程式が真になるような固定された数のことです。たとえば、方程式 $x - 3 = 1$ は $x = 4$ を解に持ちますが、 $x = 30$ は解ではありません。

座標平面 \mathbb{R}^2 を扱うときには、 x と y の間に関係があり、それを方程式で表せることがよくあります。Lecture 2, 3, 4 で見た方程式と違って、今度の方程式には変数が二つあります。たとえば：

$$y = 3x + 2, \quad y + x^2 = 3, \quad 3y + 4x = 5.$$

二変数方程式の解

二変数 x, y をもつ方程式の解とは、その方程式を真にする順序対 (x, y) のことです。

方程式 $y = 3x + 2$ を考えましょう。解とは、 x と y の値を両方選んで代入したとき、方程式 $y = 3x + 2$ が真になるような順序対のことです。たとえば、順序対 $(0, 2)$ は解ですが、順序対 $(1, 3)$ は解ではありません。¹

解であることの確かめ方

順序対 (a, b) が変数 x と y をもつ方程式の解であるかどうかを確かめるには、次の手順を使います。

1. 方程式に $x = a, y = b$ を代入する。
2. 方程式の両辺を簡単にする。
3. 両辺が同じ数になれば、その順序対は解である。そうでなければ、その順序対は解ではない。

¹ $x = 0, y = 2$ を方程式 $y = 3x + 2$ に代入すると、 $2 = 3(0) + 2$ となり、これは真です。したがって $(0, 2)$ は解です。しかし、 $x = 1, y = 3$ を代入すると、 $3 = 3(1) + 2$ となり、これは真ではありません。したがって $(1, 3)$ は方程式 $y = 3x + 2$ の解ではありません。

Exercise 2.1

それぞれの順序対が $x + 3y = 6$ の解であるかどうかを確かめなさい：

$$(1, 2), \quad (0, 2).$$

2 二変数方程式のグラフ

ここまでは、順序対が方程式の解かどうかを確かめる方法だけを見てきました。しかし、一般に二変数の方程式はたくさんの解を持ちます。そのとき、二つの変数 x と y の全体的な関係はグラフで表すことができます。

方程式のグラフ

方程式のグラフとは、その方程式のすべての解の集合のことです。

二変数方程式の解は順序対なので、これらのグラフは座標平面 \mathbb{R}^2 上に描くことができます。すると、変数 x と y の全体的な関係を表す図が得られます。方程式によって、グラフは直線になったり、曲線になったり、別の形になったりします。グラフとは、方程式のすべての解を、一度に表す方法です。方程式のどんな解も、そのグラフ上にあります。

方程式のグラフを描くことは難しいことがあります。この授業では、方程式やそのグラフの重要な要素を見分けるさまざまな技能を身につけ、より正確にグラフを描けるようにしていきます。しかし今のところは、スケッチと呼ばれるもっと簡単な方法に注目します。グラフのスケッチとは、そのグラフがどのような形をしているかについての、根拠のある予想のようなものです。実際、文脈によっては、完全に正確な図ではなくスケッチだけで十分なこともあります。

点を使ってグラフをスケッチする

グラフは、座標平面上にいくつかの代表的な点を打つことでスケッチできます。

1. できるなら、方程式を y が片側に一つだけくる形に書き直す。
2. 小さくて扱いやすい x の値をいくつか選ぶ。
3. その点の表を作り、方程式に代入して対応する y の値を求める。これにより、方程式の解である順序対が得られる。
4. それらの解を座標平面 \mathbb{R}^2 に打つ。
5. それらの点をなめらかな線で結ぶ。

一般に、サンプルにとる x の値の個数は自由に選べます。ただし、 x の値を多く選ぶほど、グラフのパターンを見抜きやすくなります。実際、多くのグラフ電卓はまさにこれを行っています。コンピュータは非常に多くの x の値をサンプルするので、得られた解が画面上では一本の線のように見えるのです。

点を使う方法の例として、方程式 $y + 3x = 5$ を考えます。最初の手順は、両辺から $3x$ を引いて y

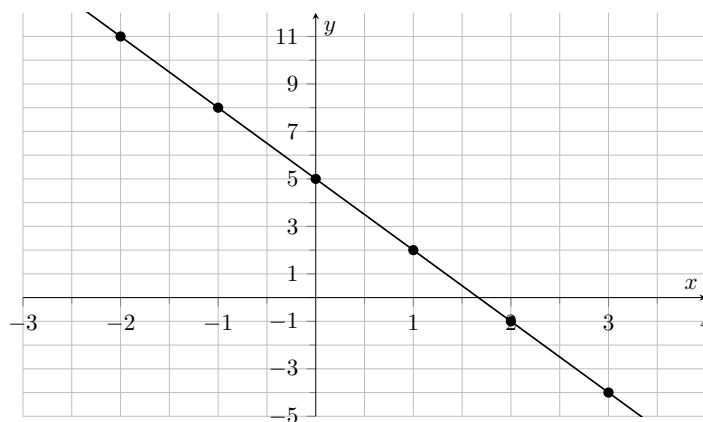
を孤立させることです。すると、同値な方程式

$$y = -3x + 5$$

を得ます。ここから、小さい x の値をいくつか選んで表を埋めます。

x	-2	-1	0	1	2	3
y	11	8	5	2	-1	-4
解	(-2, 11)	(-1, 8)	(0, 5)	(1, 2)	(2, -1)	(3, -4)

これで、表の一番下の行にある解を座標平面に打ち、それらを一本の線で結びます。



Exercise 2.2

点を使う方法で、次のグラフをスケッチしなさい。

1. $x^2 + y = 4$
2. $y = |x - 1|$

2.1 軸との交点

実際には、グラフが x 軸や y 軸と交わる点を調べることはかなり有益です。これらの点を切片と呼びます。

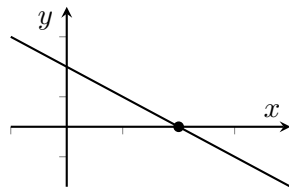
x 切片と y 切片

任意の方程式のグラフに対して：

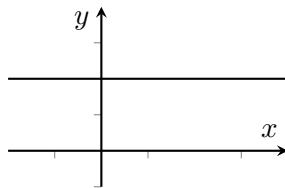
- x 切片は、グラフが x 軸と交わる点 ($y = 0$ とおく) ，
- y 切片は、グラフが y 軸と交わる点 ($x = 0$ とおく)

です。

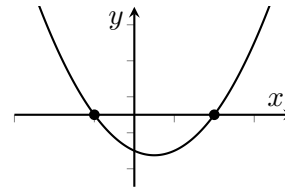
ただし、グラフの形によっては、 x 軸や y 軸との交点が存在することもあれば、存在しないこともあります。以下は、さまざまな x 切片の例です。



ただ一つの x 切片



x 切片がない



複数の x 切片

切片を求めるには、 y または x を 0 にして、もう一方の変数について方程式を解けばよいです。ただし、方程式によっては、そのような解が存在しないこともあります。例として、方程式 $y = 2x - 5$ を考えると：

$$y \text{ 切片: } x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5). \quad x \text{ 切片: } y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

3 関係と関数

関係とは、二つのもののあいだの関係を記述するための数学的な方法です。厳密には、関係は集合を使って作られます。集合は、実際には多くの数学的構造の土台になっているものです。

集合とは、順序も追加の構造も持たない対象の集まりです。集合は波かっこ $\{ \}$ を使って表します。この考え方は非常に広いので、ほとんどあらゆるものを集合で記述できます。たとえば：

- 地球上のすべての国の集合： $\{\text{Afghanistan, Albania, } \dots, \text{Zimbabwe}\}$
- 木星のすべての衛星の集合： $\{\text{Europa, Io, Ganymede, } \dots\}$
- すべての偶数の集合： $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ 。

集合は有限個の要素からなることもあれば、無限個の要素からなることもあり、それに含まれる対象だけによって特徴づけられます。この段階では、集合とは単に「対象の集まりを扱えるようにするもの」と考えるのがいちばんよいでしょう。

なお、集合の要素を同じものを二度書くことはありません。たとえば、集合 $\{1, 1, 2\}$ は集合 $\{1, 2\}$ と同じものです。

3.1 関係

集合を使って、関係が何であるかを定義できます。関係には二つの重要な部分があり、それを関係の定義域と値域と呼びます。

関係, 定義域, 値域

関係 R とは、順序対の集合のことです。 R の定義域とは、 R に含まれる順序対の第一成分すべてからなる集合であり、 R の値域とは、順序対の第二成分すべてからなる集合です。 R の定義域を $\text{Dom}(R)$ 、値域を $\text{Ran}(R)$ と書きます。

関係の例として、たとえば

$$R = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (0, 3)\}$$

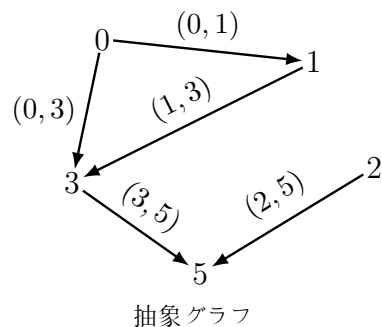
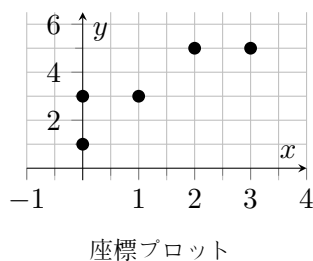
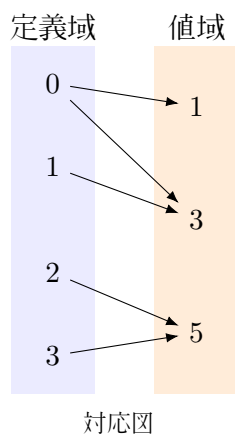
があります。

ここで、 R の定義域は各順序対の第一成分すべての集合であり、値域は第二成分すべての集合です：

$$\text{Dom}(R) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{Ran}(R) = \{1, 3, 5\}.$$

同じ要素は何度も書かないことに注意してください。

関係を表す方法はいろいろあり、文脈によって、ある表し方が別のものより適していることがあります。以下に三つの表し方を示します。対応図、座標プロット、そして「抽象グラフ」です。



3.2 関数

「関数」は数学の基本的な道具であり、さまざまな面白いものを記述するのに使えます。関数は、入力を受け取って結果を出す一種の機械として考えるのがいちばんよいです。この機械には規則があります。受け付ける入力は限られていて、しかも各入力に対して出力はただ一つです。より正確には次のように定義されます。

関数

関数とは、どの入力値にも二つ以上の異なる出力値が対応しないような関係のことです。

- f は関数の名前,
- x は入力 (定義域の値),
- $f(x)$ はその入力に対応する出力 (値域の値)

です。

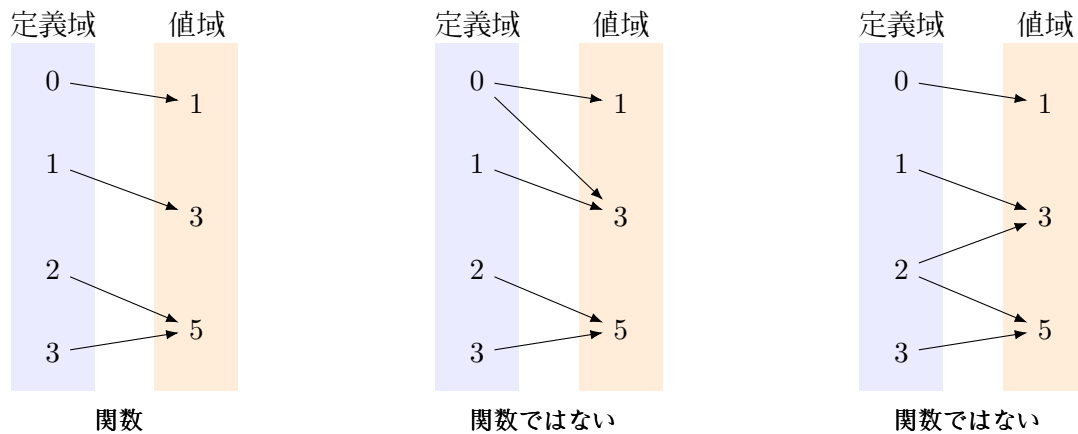
3.2.1 関数であることの判定

関数を見分けられることは重要です。関数がどのように表されているかによって、考え方は少し違うことがあります。しかし、どの場合にも基本となる規則があります。

関数の判定

関係 R の定義域にあるある要素が、値域の二つの異なる要素に対応しているなら、 R は関数ではありません。

関係が対応図で表されている場合、各定義域の要素から出る矢印が一つだけなら、その関係は関数です。たとえば、下の関係を考えます。



見てわかるように、二番目と三番目の場合には、定義域のある要素から複数の矢印が出ています。したがって、これらは関数ではありません。しかし、一番目の場合には、定義域の各要素が値域の一つの要素にしか対応していないので、この図は関数を表しています。

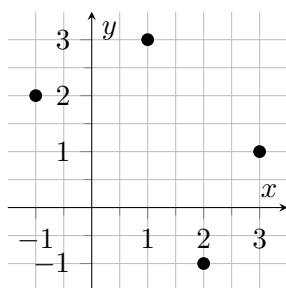
垂直線テスト

関係 R は、 $\text{Dom}(R)$ の値を x 軸に、 $\text{Ran}(R)$ の値を y 軸に置くことで、座標平面上のグラフとして表すこともできます。この場合、その関係が関数かどうかは「垂直線テスト」を使って視覚的に調べることができます。

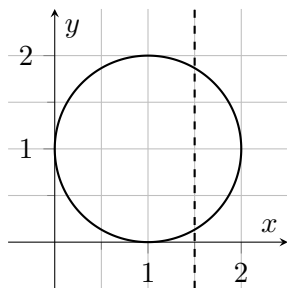
垂直線テスト

グラフが y を x の関数として表すのは、どの垂直線もそのグラフと二回以上交わらないとき、かつそのときに限ります。

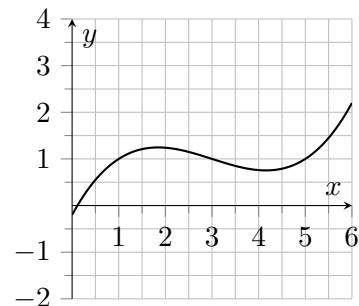
もし垂直線がグラフと二回交わるなら、それは同じ入力 x に対して二つの y の値に対応していることを意味します。したがって、そのグラフは関数を表していません。以下に三つの例を示します。



関数



関数ではない



関数

3.3 関数の評価

記号 $f(x)$ は、入力 x のときの関数 f の出力(値)を意味します。したがって、具体的な x の値を代入して、関数がそれに対して何を返すかを見ることが出来ます。これを関数を「評価する」と言います。例として、関数 $g(x) = 3x - x^2$ を考えます。 $x = 2$ と $x = 0$ で g を評価すると：

$$g(2) = 3(2) - (2)^2 = 6 - 4 = 2, \quad g(0) = 3(0) - (0)^2 = 0.$$

Exercise 3.1

$h(x) = 2x + 1$ とする。 $h(-3)$ と $h(4)$ を求めなさい。

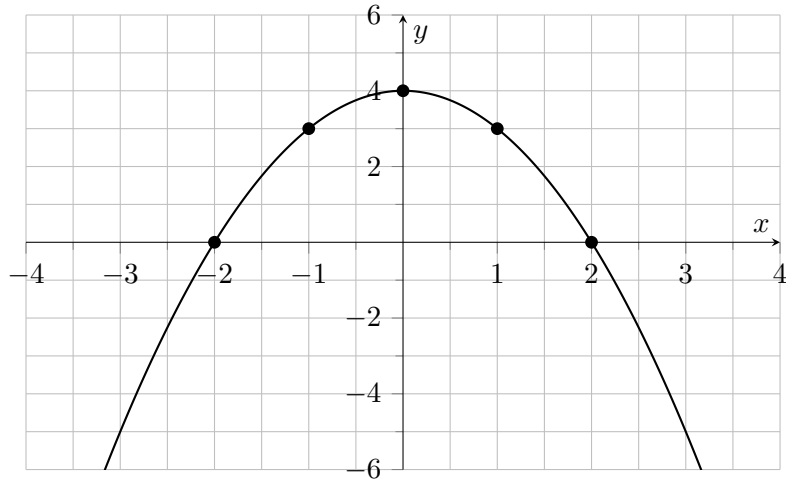
Exercises の解答

Exercise 2.1

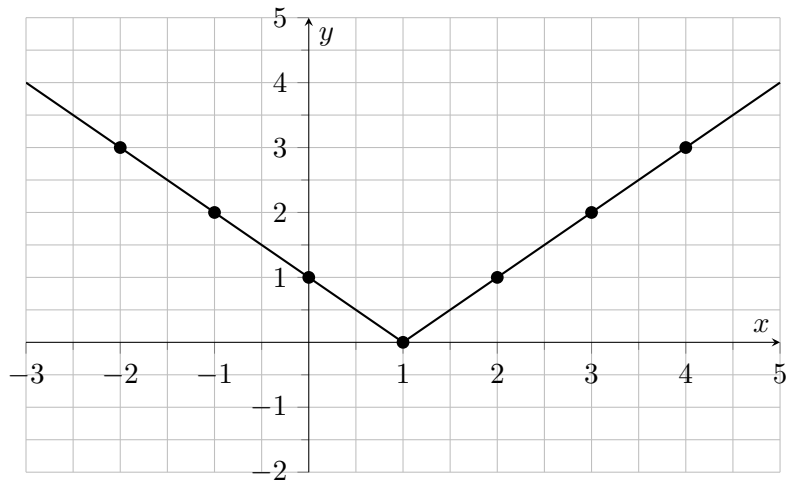
$$(1, 2) : 1 + 3(2) = 7 \neq 6 \Rightarrow \text{解ではない。} \quad (0, 2) : 0 + 3(2) = 6 \Rightarrow \text{解である。}$$

Exercise 2.2

1. 方程式 $x^2 + y = 4$ は $y = 4 - x^2$ と書き直せるので、下に開く放物線である。



2. 絶対値関数 $y = |x - 1|$ は、頂点が $(1, 0)$ にある「V字型」のグラフになる。



Exercise 3.1

$$h(-3) = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5, \quad h(4) = 2(4) + 1 = 9.$$