MAT140 — 第6讲讲义

一次方程的图像

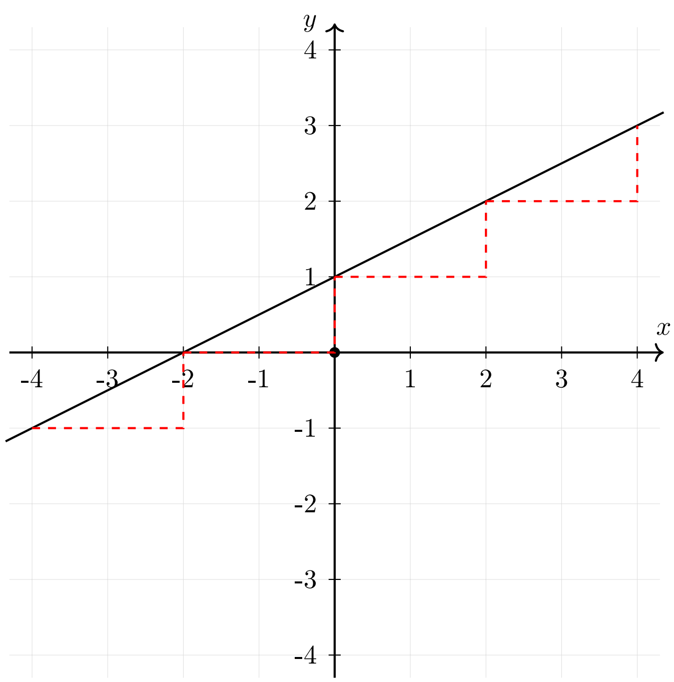
上一次我们看到，如何通过选取样本点并草绘所得形状，来绘制常见方程的基本图像。在这一讲中，我们将开始看到一个更深刻的思想：代数观点与几何观点是同一枚硬币的两面。这是数学中的一个基本主题，通常称为代数-几何对应。今天我们将研究这种对应关系中最简单的情形，也就是一次方程的图像。我们将会：

- 引入斜率的概念，并说明它如何控制一条直线的形状；
- 学习如何在直线的方程与其图像之间来回转换；
- 学习如何草绘一次不等式的图像。

1 一次方程图像的斜率

1.1 什么是斜率？

考虑下图中的直线。



注意这条直线是以恒定的速率变化的：每当我们向右移动2 个格子，直线总是向上移动1 个格子。无论我们从哪里开始，这条直线的变化速率始终相同。直线的斜率正是用来刻画这一点的。

斜率

一条非竖直直线的**斜率**用来衡量它有多陡。

从数学上说，斜率只是一个数，它量化了一条直线有多陡。因此，更陡的直线会有更大的斜率（至少从某种意义上说），而没那么陡的直线则有更小的斜率。

我们可以通过比较直线在竖直方向上的变化与在水平方向上的变化来描述斜率。这个比较本质上只是一个比值，可以简要写成:

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\ \text{的变化量}}{x\ \text{的变化量}} = \frac{\text{竖直变化}}{\text{水平变化}}\Theta$$

如果我们在直线上取两个点，就可以把这个定义写得更精确。此时，斜率可以用下列公式计算。

斜率公式

如果一条非竖直直线经过点(x_1, y_1) 和(x_2, y_2)，那么它的斜率为

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

在上面的公式中，我们必须假设这条直线不是竖直的，因为竖直直线在水平方向上没有变化。这意味着，竖直直线上的任意两点都有相同的x 值，也就是$x_1 = x_2$。但这会导致$x_2 - x_1 = 0$，于是我们在斜率公式中就会除以零，这是不可能的。

不过，两个y 分量y_1 和y_2 完全可以相同，这对应着一条完全没有陡峭程度的水平直线。

在使用斜率公式时，必须注意减法的顺序。给定直线上的两个点，你可以任意把其中一个记作(x_1, y_1)，另一个记作(x_2, y_2)，而且你用哪种顺序去做差都没有关系，因为:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{-1}{-1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

但是，一旦你选择了某种顺序，就必须保证分子和分母都使用**相同**的减法顺序。

常见错误

你可以把任意一个点标成(x_1, y_1)，另一个点标成(x_2, y_2)。但是一旦选定顺序，就必须在分子和分母中都使用**同样**的顺序。

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad \text{但是} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \quad \text{和} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\ \text{都是错的。}$$

例如，我们来求经过点$(-2, 0)$ 和$(3, 1)$ 的直线的斜率。

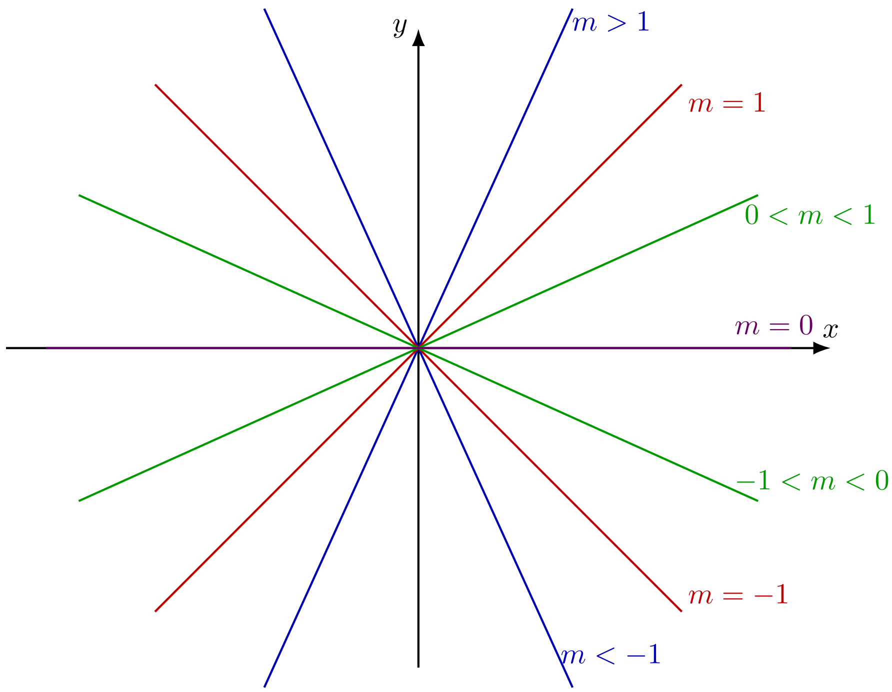
$$m = \frac{1 - 0}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}.$$

练习1

求经过$(0, 0)$ 和$(1, -1)$ 的直线的斜率。

1.2 斜率的可视化

下图展示了若干条经过原点的直线的斜率。注意，其中既有正的m，也有负的m，分别对应从左到右上升的直线以及从左到右下降的直线。图中没有竖直直线，因为竖直直线对应的斜率是未定义的。



斜率的符号

1. 如果$m > 0$，直线从左到右上升。
2. 如果$m < 0$，直线从左到右下降。
3. 如果$m = 0$，直线是水平的。
4. 如果直线是竖直的，那么它的斜率**未定义**。

练习2

求通过下列每一对点的直线的斜率。

1. $(2, 3)$ 和$(6, 7)$
2. $(-1, 4)$ 和$(3, 4)$
3. $(5, -2)$ 和$(5, 1)$

练习3

一把梯子靠在一棵树上。梯子的一端接触树的位置高度为12 m，另一端落在离树5 m 远的地面上。我们可以把树看作y 轴，把地面看作x 轴，因此梯子的两个端点是$(0, 12)$ 和$(5, 0)$。求梯子的斜率。

2　把斜率作为作图工具

2.1　斜率-截距式

现在我们开始理解，如何用斜率来刻画直线。事实上，单靠斜率还不足以完全刻画一条直线。除了斜率之外，我们还必须考虑这条直线与y 轴相交的位置。

事实证明，一条非竖直直线由它的斜率和y 截距唯一确定。结合第1.2 节中的图像，我们可以把斜率想象成一个数字，它告诉我们应当如何“旋转”一条水平直线，从而改变它的倾斜程度。而y 截距则告诉我们要把这条直线从x 轴向上抬起多少。在数学上，直线的方程正是以斜率和y 截距作为输入的。

直线的斜率-截距式

一条非竖直直线可以写成

$$y = mx + b.$$

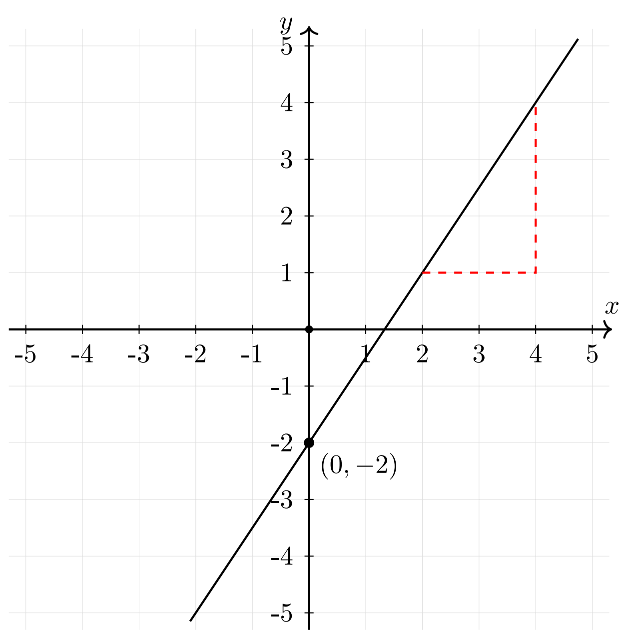
其中:

- m 是**斜率**,
- b 是y **截距**（也就是直线与y 轴相交的位置），即点$(0, b)$。

例如，考虑一次方程$3x - 2y = 4$。这里，我们可以整理方程，把y 单独留下来，从而直接读出这条直线的斜率和y 截距:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ -2y &= -3x + 4 \\ y &= \frac{3}{2}x - 2. \end{aligned}$$

因此，这条直线的斜率是$m = \frac{3}{2}$，而y 截距是$(0, -2)$。这条直线的图像如下所示。注意，每当水平方向变化2 个单位时，这条直线在竖直方向上就会变化3 个单位。

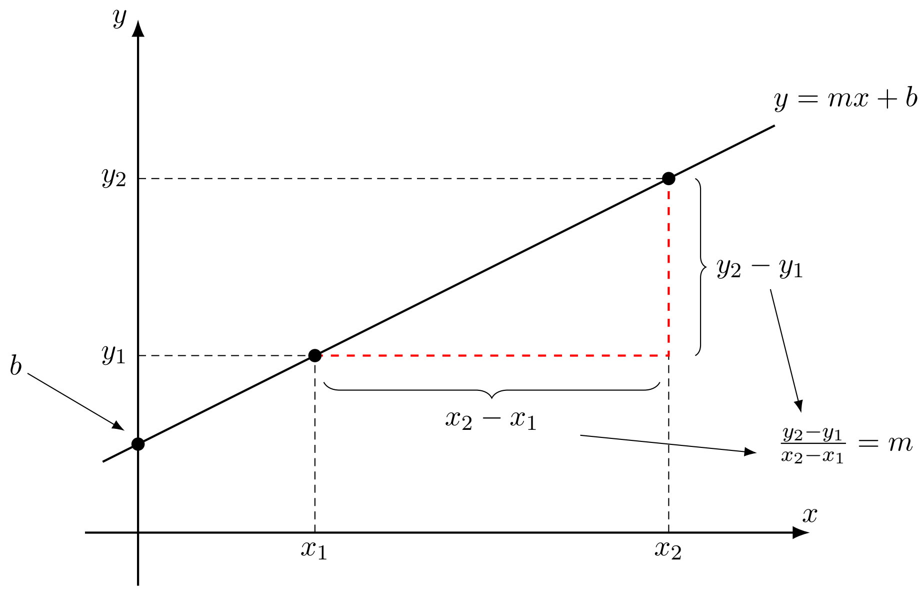


由方程草绘直线

要草绘$y = mx + b$ 的图像:

1. 先画出y 截距$(0, b)$。
2. 把m 看作"竖直变化/ 水平变化"的比值，用它找到第二个点。
3. 通过这两个点画一条直线。

方程$y = mx + b$ 的几何含义可以用下图概括。



练习4

利用斜率-截距式草绘方程$x - 3y = -6$ 的图像。

3 平行线与垂线

在上一节中，我们提到单靠斜率还不足以唯一描述一条直线。为了看清这一点，可以想象这样一种情况：两条直线具有相同的斜率，但有不同的y 截距。在这种情况下，这两条直线的陡峭程度相同，但它们的图像永远不会相交。这样的观察部分地促成了下面的定义。

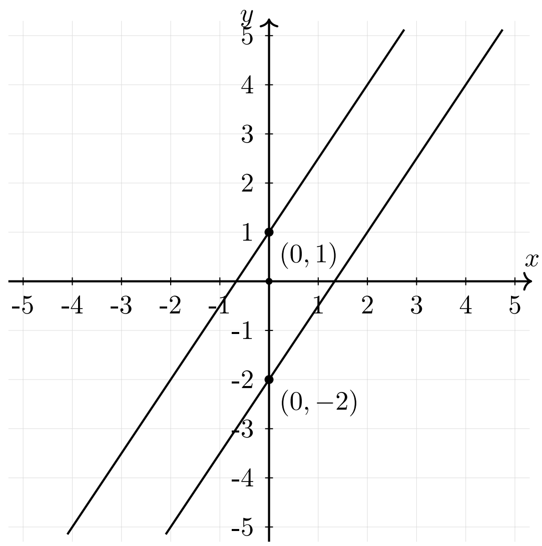
平行线与垂线

对于两条非竖直直线:

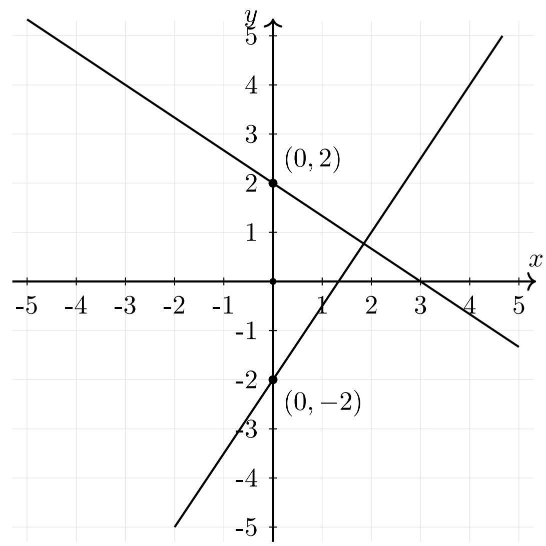
- 它们**平行**，当且仅当它们有**相同的**斜率。
- 它们**垂直**，当且仅当它们的斜率互为**负倒数**。

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad \text{其中 } m_2 \neq 0.$$

从几何上看，两条平行线永远不会相交，而两条垂线会以直角相交，如下图所示。



平行线



垂直线

练习5

判断下列两条直线是平行、垂直，还是都不是：

1. 直线$y = -3x - 2$ 与$y = \frac{1}{3}x + 1$。
2. 直线$y = \frac{1}{2}x + 1$ 与$y = \frac{1}{2}x - 1$。

4 直线的方程

在讨论一次方程时，有两类常见问题:

1. 已知方程，草绘其图像;
2. 已知图像（或几何信息），求它的方程。

现在我们来探究，如何由部分信息来描述直线的图像。

4.1 点-斜率式

作为讨论的开始，我们先来看如何描述一条经过固定点、并且斜率为m 的直线的方程。

点-斜率式

一条斜率为m、经过点(x_1, y_1) 的直线，其方程为

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

虽然上面的公式本身已经正确且有用，但我们也可以用另一种方式得到所需的方程。如果从方程$y = mx + b$ 出发，回忆一下，这个方程的图像（也就是我们要描述的直线）正是所有满足$y = mx + b$ 的点所组成的集合。因此，如果给定一个点(x_1, y_1)，我们可以把它代入方程，从而解出b 的值。

举一个这种策略的例子，我们来写出经过点$(1, -2)$ 且斜率为$m = 3$ 的直线方程。根据题目给出的信息，我们知道这个方程的形式应当是$y = 3x + b$，其中b 的值未知。因此，把点$(1, -2)$ 代入，并整理得到b:

$$-2 = 3(1) + b \;\Rightarrow\; b = -5.$$

因此，这条直线的方程是$y = 3x - 5$。我们还可以用上面给出的点-斜率式来再次检验:

$$y - (-2) = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 5.$$

注意，这只是这条直线的一个方程，而不是它的**唯一**方程。事实上，同一条直线可以写成许多等价形式。例如，下面这些方程:

$$y = 3x - 5, \quad 3x - y = 5, \quad \text{以及} \quad 3x - y - 5 = 0$$

都有同样的图像。

4.2 两点式

现在，假设我们想找一条经过两点(x_1, y_1) 和(x_2, y_2) 的直线方程。为此，我们可以先计算它的斜率

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

然后使用前面的方法。把这些步骤合在一起，就得到**两点式**:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

例如，我们来写出经过$(3,1)$ 和$(-3,4)$ 的直线方程。

首先，计算斜率：

$$m=\frac{4-1}{-3-3}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}.$$

然后，我们可以任选这两个点中的一个来解出b：

$$1=-\frac{1}{2}(3)+b \quad\Rightarrow\quad b=\frac{5}{2}.$$

综合起来，经过这两点的直线方程是

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\Theta$$

或者，也可以使用点-斜率式，并取$(x_1,y_1)=(3,1)$：

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-3) \quad\Rightarrow\quad y-1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

4.3 经过已知点的平行线与垂线

我们也可以利用第4.1 节中的点-斜率式，来求经过某个给定点的平行线或垂线的方程。例如，我们来推导经过点$(2,-1)$ 且满足以下条件的直线方程：

1. 与$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ 平行；
2. 与$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ 垂直。

由于平行线有相同的斜率，我们知道第一条所求直线的斜率也是$m=\frac{2}{3}$。无论是手动解出b，还是使用点-斜率式，都可以得到：

$$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-2) \quad\Rightarrow\quad y+1=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}.$$

相反，我们知道垂线的斜率应是负倒数。因此，所求垂线的斜率是$\frac{2}{3}$ 的负倒数，也就是$-\frac{3}{2}$。再次使用点-斜率式，或者手动解出b，都得到：

$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-2) \quad\Rightarrow\quad y+1=-\frac{3}{2}x+3 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{3}{2}x+2.$$

4.4 水平线与竖直线

水平线与竖直线

- 一条**水平线**的斜率为0，其方程是$y=b$。
- 一条**竖直线**的斜率未定义，其方程是$x=a$。
- y 轴的方程是$x=0$，而x 轴的方程是$y=0$。

练习6

为下列每条直线写出一个方程。

1. 经过$(-3,2)$ 的竖直线
2. 经过$(-1,2)$ 和$(4,2)$ 的直线
3. 经过$(0,2)$ 和$(0,-2)$ 的直线
4. 经过$(0,-4)$ 的水平线

5 一次不等式的图像

两变量的一次不等式

关于x 和y 的**一次不等式**可以写成下列形式之一（其中a 和b 不同时为零）：

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c.$$

如果把$x = x_1$ 与$y = y_1$ 代入后，不等式变成真命题，那么有序对(x_1, y_1) 就是一个**解**。例如，$(3,2)$ 满足$x - y > 0$，因为$3 - 2 > 0$ 成立。

作一次不等式的图像

要草绘一个一次不等式的图像：

1. 把不等号替换成$=$，先画出**边界线**。
2. 如果是不等号$<$ 或$>$，则边界线画成**虚线**；如果是不等号$\leq$ 或$\geq$，则边界线画成**实线**。
3. 选取一个**测试点**（如果原点$(0,0)$ 不在边界线上，通常就选它）。
4. 如果测试点满足该不等式，就涂阴影于包含该点的一侧；否则，给另一侧涂阴影。

边界线会把坐标平面分成两个区域（两个**半平面**）。在其中一个半平面里，**所有**点都满足不等式，而在另一个半平面里，**没有**点满足不等式。因此，测试一个点就足够了。

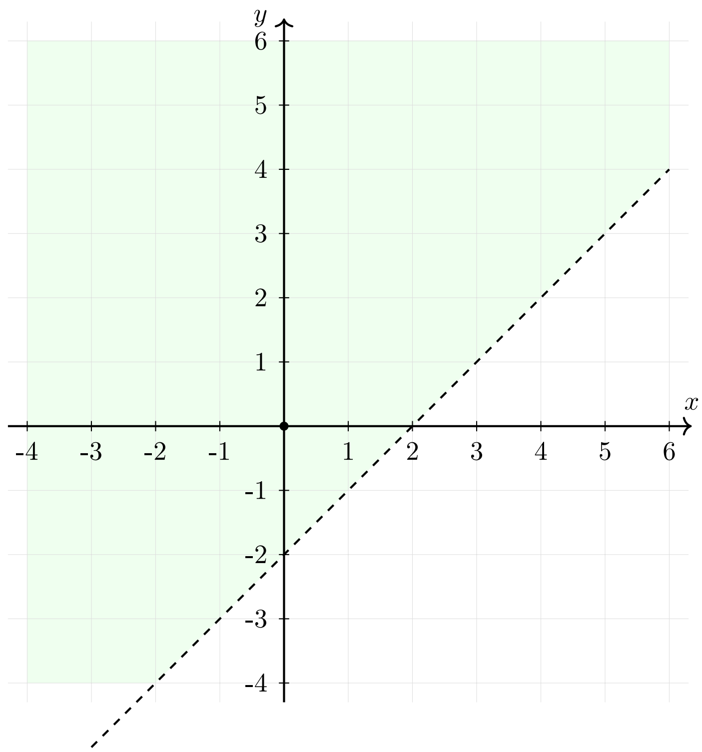
例如，我们来草绘不等式$x - y < 2$ 的图像。按照上面的步骤，首先应该画出直线$x - y = 2$，它等价于$y = x - 2$。因为不等式是$<$，所以边界线应该画成虚线。为了判断该给哪一侧涂阴影，我们使用测试点$(0,0)$。代入可得：

$$0 - 0 < 2 \quad \text{这是真的。}$$

因此，我们给包含原点的区域涂阴影。用斜率-截距式语言来说，

$$x - y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad y > x - 2,$$

所以我们应当在直线$y = x - 2$ 的**上方**涂阴影。这个一次不等式的图像如下所示。



练习7

利用斜率-截距式草绘不等式$5x + 4y \leq 12$。

练习8

对于下列每个不等式，判断给定点是否是它的解。

1. 在$(0, 0)$ 处检验$x + y > 1$
2. 在$(2, 3)$ 处检验$2x - y \leq 0$
3. 在$(3, -10)$ 处检验$x \geq 4$

练习答案

练习1

直线经过$(0, 0)$ 和$(1, -1)$，所以

$$m = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1.$$

练习2

1. 经过$(2,3)$ 和$(6,7)$:
$$m=\frac{7-3}{6-2}=\frac{4}{4}=1.$$
2. 经过$(-1,4)$ 和$(3,4)$:
$$m=\frac{4-4}{3-(-1)}=\frac{0}{4}=0.$$
因此这条直线是水平的。
3. 经过$(5,-2)$ 和$(5,1)$:两点的x 值相同,因此这条直线是竖直的,斜率**未定义**。

练习3

梯子的两个端点是$(0,12)$ 和$(5,0)$。因此,

$$m=\frac{0-12}{5-0}=-\frac{12}{5}.$$

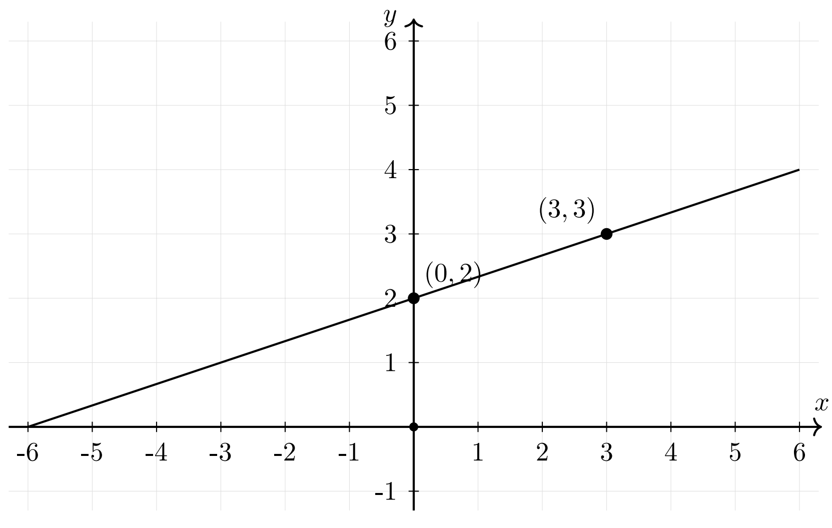
练习4

先改写成斜率-截距式:

$$x-3y=-6 \quad\Rightarrow\quad -3y=-x-6 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{3}x+2.$$

所以斜率是$m=\frac{1}{3}$,而y 截距是$(0,2)$。

要草绘这条直线:先画出$(0,2)$,然后利用"竖直变化/ 水平变化"的比。由于$m=\frac{1}{3}$,向右移动3 个单位,再向上移动1 个单位,就到达点$(3,3)$,然后通过这两个点画出直线。



练习5

1. 直线$y = -3x - 2$ 的斜率是$m_1 = -3$。直线$y = \frac{1}{3}x + 1$ 的斜率是$m_2 = \frac{1}{3}$。由于$m_1 m_2 = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$，所以这两条直线**互相垂直**。
2. 两条直线$y = \frac{1}{2}x + 1$ 和$y = \frac{1}{2}x - 1$ 的斜率都等于$\frac{1}{2}$，所以它们**互相平行**。

练习6

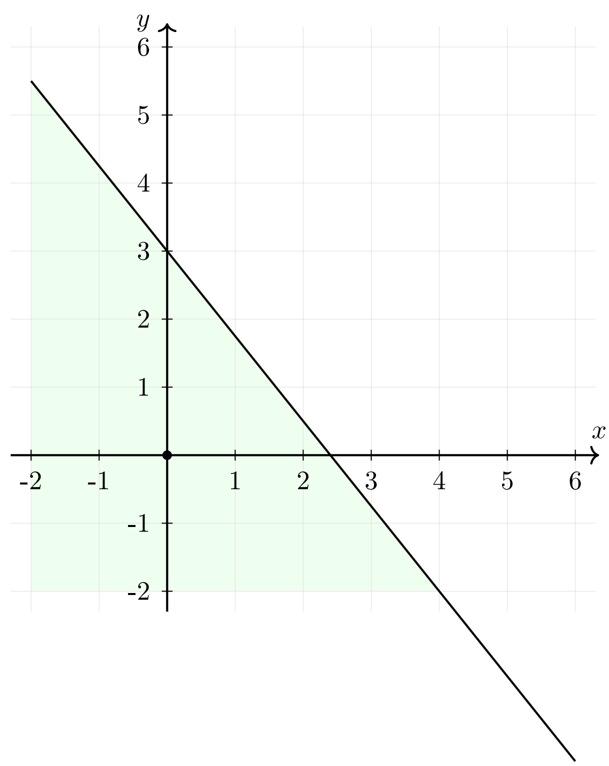
1. 经过$(-3, 2)$ 的竖直线：$x = -3$。
2. 经过$(-1, 2)$ 和$(4, 2)$（y 值相同）：$y = 2$。
3. 经过$(0, 2)$ 和$(0, -2)$（x 值相同）：$x = 0$。
4. 经过$(0, -4)$ 的水平线：$y = -4$。

练习7

改写成斜率-截距式：

$$5x + 4y \leq 12 \quad \Rightarrow \quad 4y \leq -5x + 12 \quad \Rightarrow \quad y \leq -\frac{5}{4}x + 3.$$

因此边界线是$y = -\frac{5}{4}x + 3$，并且因为是不等式$\leq$，所以边界线应当画成**实线**，并且我们要在直线的**下方及其本身**涂阴影。



（快速检验$(0, 0)$：$5(0) + 4(0) \leq 12$ 为真，所以阴影区域应当包含原点，图中也确实如此。）

练习8

1. 在$(0,0)$ 处：$0+0>1$ 为假，因此$(0,0)$ 不是一个解。
2. 在$(2,3)$ 处：$2(2)-3=1\leq 0$ 为假，因此$(2,3)$ 不是一个解。
3. 在$(3,-10)$ 处：$3\geq 4$ 为假，因此$(3,-10)$ 不是一个解。