MAT140 — 第6講ハンドアウト
一次方程式のグラフ

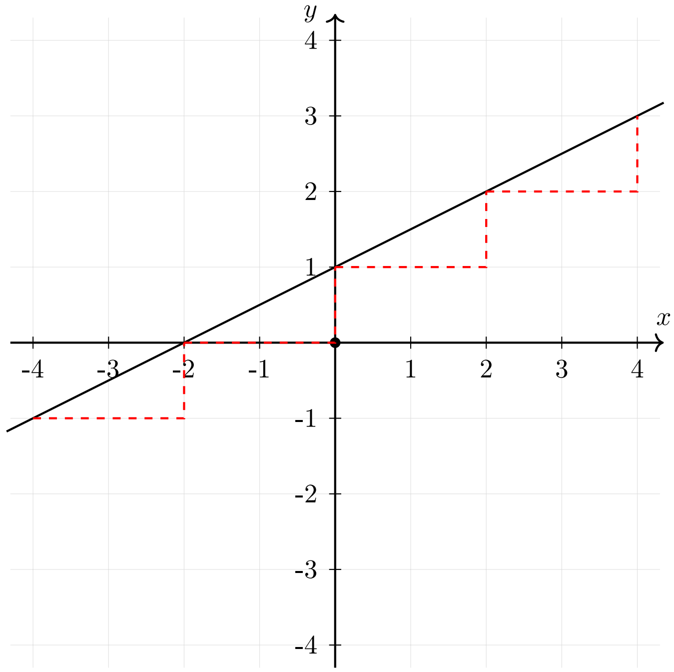
前回は，いくつかの代表的な点を選び，そこから形をスケッチすることで，よくある方程式の基本的なグラフを描く方法を見ました。この講義では，そこからさらに深い考え方に進みます。代数的な見方と幾何学的な見方は，同じ一つのものの二つの側面だという考えです。これは数学の基本的な主題であり，しばしば代数と幾何の対応 と呼ばれます。今日は，この対応の最も簡単な場合，すなわち一次方程式のグラフ を学びます。具体的には，

- 傾きという概念を導入し，それがどのように直線の形を決めるかを説明し，
- 直線の方程式とそのグラフのあいだを行き来する方法を学び，
- 一次不等式のグラフをスケッチする方法を学びます。

1 傾きと一次方程式のグラフ

1.1 傾きとは何か

下に描かれた直線を考えます。



この直線が一定の割合で変化していることに注目してください。右へ2 マス動くたびに，直線はいつも上へ1 マス動きます。どこから始めても，直線の変化のしかたはつねに同じです。直線の傾きは，この考えを表すものです。

傾き

垂直でない直線の**傾き**は，その直線の急さを表す量です。

数学的には，傾きとは直線がどれくらい急であるかを数量化する一つの数です。したがって，より急な直線は，ある意味でより大きな傾きを持ち，それほど急でない直線はより小さな傾きを持ちます。

直線の傾きは，縦方向の変化と横方向の変化を比べることで表せます。この比は単なる割合であり，模式的には次のように書けます。

$$\text{傾き} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\ \text{の変化}}{x\ \text{の変化}} = \frac{\text{縦の変化}}{\text{横の変化}}.$$

さらに正確に言うには，直線上の二点を選べばよいです。そのとき，傾きは次の公式で計算できます。

傾きの公式

垂直でない直線が点(x_1, y_1) と(x_2, y_2) を通るなら，その傾きは

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

で与えられます。

上の公式では，直線が垂直でないことを仮定する必要があります。垂直な直線は横方向にまったく変化しないからです。つまり，垂直な直線上のどの二点も同じx 座標を持つので，$x_1 = x_2$ です。すると$x_2 - x_1 = 0$ となり，m の公式では0 で割ることになってしまいます。これはできません。

ただし，二つのy 成分y_1 とy_2 が同じであることはまったく問題ありません。これはまったく傾きのない水平な直線に対応します。

傾きの公式を使うときには，引き算の順序をきちんとそろえることが大切です。直線上の二点が与えられたとき，どちらを(x_1, y_1)，どちらを(x_2, y_2) と呼んでもかまいません。また，差をどちらの順序で取っても，結果は同じです。なぜなら

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{-1}{-1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

だからです。しかし，いったん順序を決めたら，分子と分母の両方で**同じ**順序の引き算を使わなければなりません。

よくある間違い

どちらの点を(x_1, y_1)，どちらを(x_2, y_2) としてもかまいません。ただし，順序を決めたら，分子と分母で**同じ**順序を使わなければなりません。

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad \text{しかし} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \quad \text{や} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\ \text{は誤りです。}$$

例として，$(-2,0)$ と$(3,1)$ を通る直線の傾きを求めます。

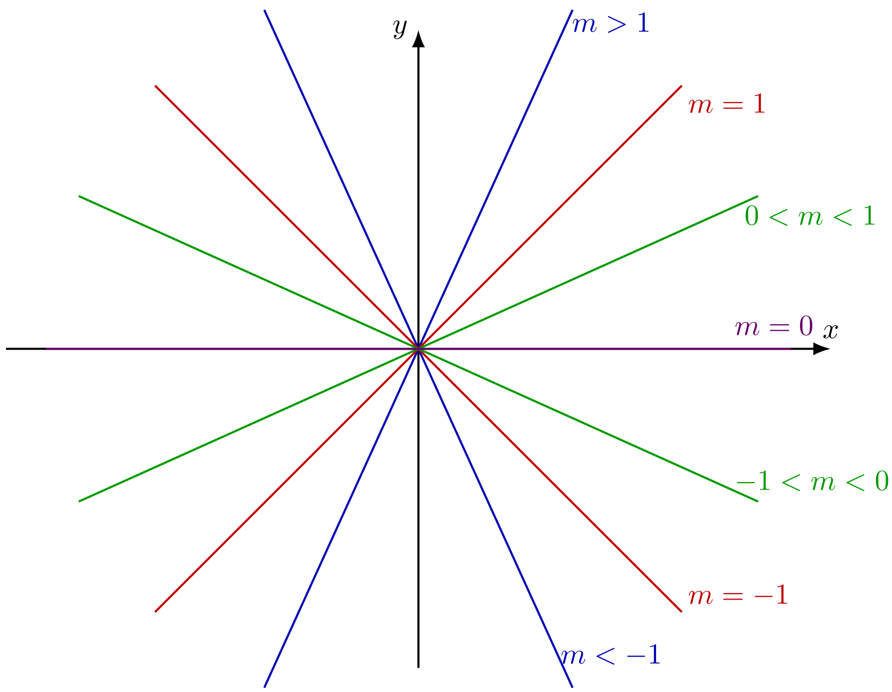
$$m = \frac{1-0}{3-(-2)} = \frac{1}{5}.$$

Exercise 1

$(0,0)$ と$(1,-1)$ を通る直線の傾きを求めなさい。

1.2　傾きの視覚化

下の図は，原点を通るさまざまな直線の傾きを示しています。m に正の値と負の値の両方があり，それぞれ左から右へ上がる直線と，下がる直線に対応していることに注意してください。垂直な直線は描かれていません。垂直な直線は傾きが定義されないからです。



傾きの符号

1. $m > 0$ なら，直線は左から右へ上がる。
2. $m < 0$ なら，直線は左から右へ下がる。
3. $m = 0$ なら，直線は水平である。
4. 直線が垂直なら，その傾きは**定義されない**。

Exercise 2

それぞれの二点を通る直線の傾きを求めなさい。

1. $(2,3)$ と$(6,7)$
2. $(-1,4)$ と$(3,4)$
3. $(5,-2)$ と$(5,1)$

Exercise 3

はしごが木に立てかけられている。はしごの一端は木の高さ12 m のところに接し，もう一端は木から5 m 離れた地面に接している。木をy 軸，地面をx 軸とみなせば，はしごの両端は$(0,12)$と$(5,0)$ である。はしごの傾きを求めなさい。

2　グラフを描くための手がかりとしての傾き

2.1　傾き切片形

ここから，傾きが直線をどのように特徴づけるのかを理解していきます。実際のところ，傾きだけでは直線を完全には特徴づけられません。傾きに加えて，直線がy 軸とどこで交わるかも考えなければなりません。

実は，垂直でない直線は，その傾きとy 切片によって一意に決まります。Section 1.2 の図を思い浮かべると，傾きとは，水平な直線をどれだけ「回転」させればその急さになるかを表す数だと考えられます。そしてy 切片は，その直線をx 軸からどれだけ持ち上げるかを表します。数学的には，直線の方程式は傾きとy 切片を入力として持ちます。

直線の傾き切片形

垂直でない直線は

$$y = mx + b$$

と書けます。ここで：

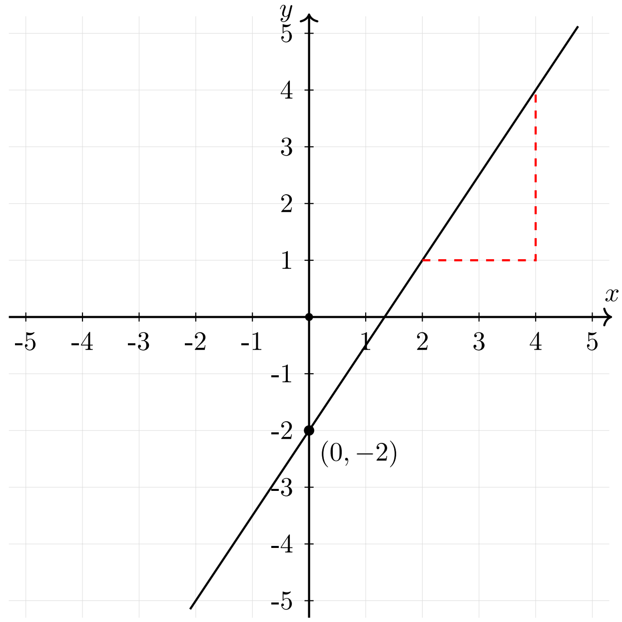
- m は**傾き**，
- b はy **切片**（直線がy 軸と交わる点），すなわち$(0,b)$

です。

この例として，一次方程式$3x-2y=4$ を考えます。これをy について解いて，その直線の傾きとy 切片を直接読み取ることができます。

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ -2y &= -3x + 4 \\ y &= \frac{3}{2}x - 2. \end{aligned}$$

したがって，この直線の傾きは$m=\frac{3}{2}$，y 切片は$(0,-2)$ です。この直線のグラフを下に示します。横方向に2 動くごとに，縦方向に3 動いていることに注意してください。

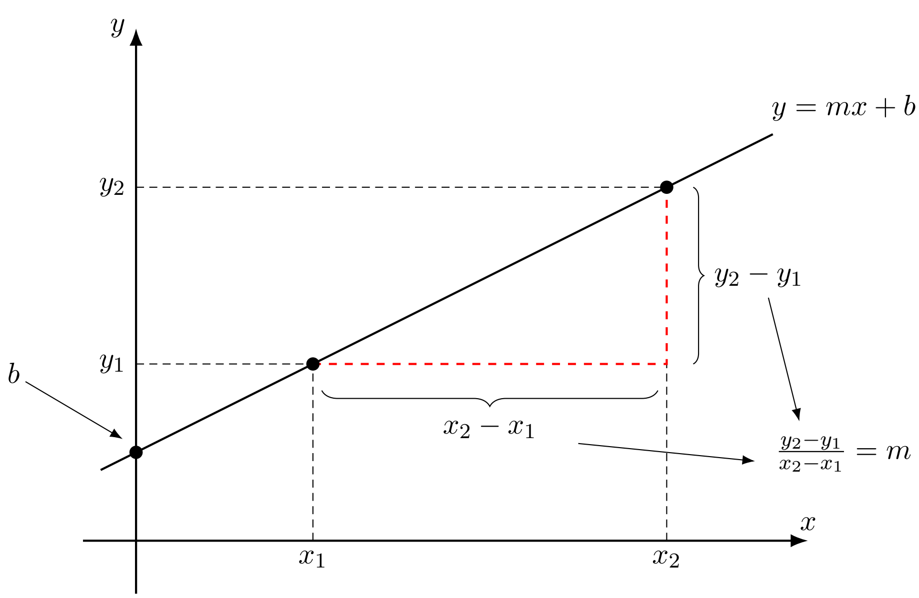


方程式から直線をスケッチする

$y = mx + b$ のグラフをスケッチするには：

1. y 切片$(0, b)$ を打つ。
2. m をrise-over-run の比として使い，二つ目の点を見つける。
3. その二点を通る直線を引く。

方程式$y = mx + b$ の幾何は，次の図でまとめられます。



Exercise 4

傾き切片形を使って，$x - 3y = -6$ のグラフをスケッチしなさい。

3　平行線と垂直線

前の節では，傾きだけでは直線を一意には決められないと述べました。これを見るには，二本の直線が同じ傾きを持ちながら，異なるy 切片を持つ場合を考えればよいです。このとき，二本の直線は同じ急さを持ちますが，そのグラフが交わることはありません。こうした観察は，次の定義の動機の一部になります。

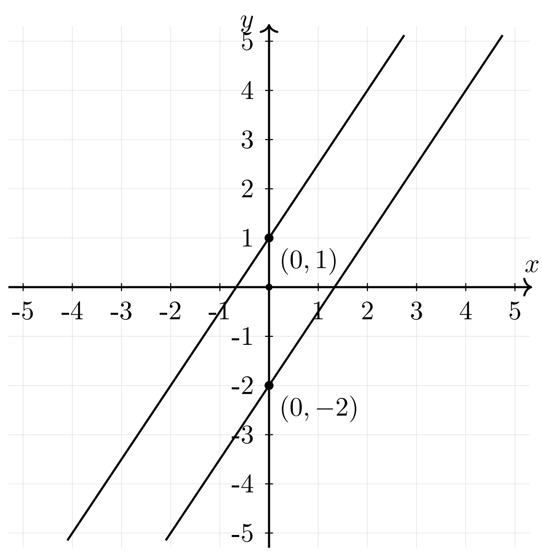
平行線と垂直線

垂直でない二本の直線について：

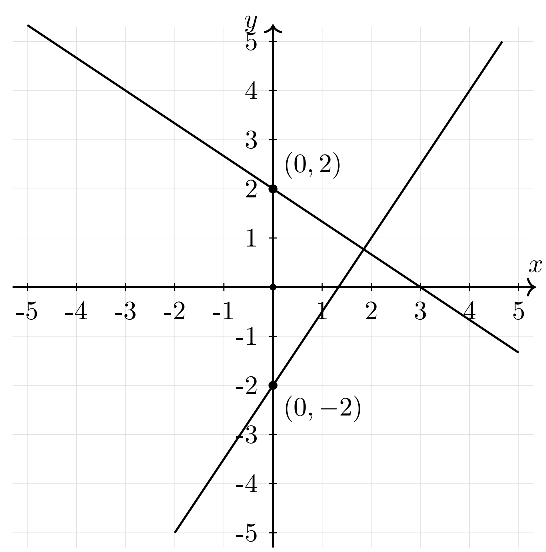
- 傾きが**同じ**とき，かつそのときに限り，二本の直線は**平行** である。
- 傾きが**負の逆数**であるとき，かつそのときに限り，二本の直線は**垂直** である。

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad \text{ただし } m_2 \neq 0.$$

幾何学的には，二本の平行線は決して交わらず，二本の垂直な直線は下図のように直角で交わります。



平行線



垂直線

Exercise 5

次の直線が平行か，垂直か，それともどちらでもないかを判定しなさい。

1. 直線$y = -3x - 2$ と$y = \frac{1}{3}x + 1$
2. 直線$y = \frac{1}{2}x + 1$ と$y = \frac{1}{2}x - 1$

4　直線の方程式

一次方程式については，よく次の二種類の問題があります。

1. 方程式が与えられて，そのグラフをスケッチする。
2. グラフ（あるいは幾何学的な情報）が与えられて，その方程式を求める。

ここからは，部分的な情報から直線のグラフを記述する方法を見ていきます。

4.1　点傾き形

まず，傾きm を持ち，固定された一点を通る直線の方程式をどのように書くかを見ます。

点傾き形

傾きm で点(x_1, y_1) を通る直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

である。

上の公式は正しく有用ですが，求める方程式を得る別の方法もあります。方程式$y = mx + b$ から始めると，この方程式のグラフ（つまり今記述したい直線）は，方程式$y = mx + b$ を満たすすべての点の集まりであることを思い出します。したがって，点(x_1, y_1) が与えられていれば，それを方程式に代入してb の値を求めればよいのです。

この考え方の例として，点$(1, -2)$ を通り，傾き$m = 3$ を持つ直線の方程式を書いてみます。与えられた情報から，方程式は$y = 3x + b$ の形であり，必要なのはb を求めることだとわかります。そこで，点$(1, -2)$ を代入してb を求めます：

$$-2 = 3(1) + b \;\Rightarrow\; b = -5.$$

したがって，この直線の方程式は$y = 3x - 5$ です。これは，上で述べた点傾きの公式を使っても確かめられます：

$$y - (-2) = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 5.$$

これはその直線の**ある**方程式ではありますが，**唯一の**方程式ではありません。実際，同じ直線は多くの同値な形で書けます。たとえば，方程式

$$y = 3x - 5, \quad 3x - y = 5, \quad \text{および} \quad 3x - y - 5 = 0$$

はすべて同じグラフを持ちます。

4.2　二点を使う形

次に，二点(x_1, y_1) と(x_2, y_2) を通る直線の方程式を求めたいとします。そのためには，まず傾き

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

を計算し，そのあと前の方法を使えばよいです。これらをまとめると，**二点を使う形**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

が得られます。例として，$(3, 1)$ と$(-3, 4)$ を通る直線の方程式を書いてみます。

まず，傾きを計算します：

$$m = \frac{4 - 1}{-3 - 3} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

次に，二点のうちどちらか一方を使ってb を求められます：

$$1 = -\frac{1}{2}(3) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{2}.$$

したがって，この二点を通る直線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

です。別の方法として，$(x_1, y_1) = (3, 1)$ を使って点傾き形を用いてもよいです：

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

4.3　ある点を通る平行線と垂直線

Section 4.1 の点傾き形を使うと，与えられた点を通る平行線や垂直線の方程式も求められます。例として，点$(2, -1)$ を通り，

1. $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ に平行な直線，
2. $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ に垂直な直線

の方程式を導きます。

平行線は同じ傾きを持つので，最初の方程式の傾きは$m = \frac{2}{3}$ です。b を直接求めてもよいですし，点傾き形を使ってもよく，すると

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

一方，垂直な直線の傾きは負の逆数です。したがって，欲しい垂直線の傾きは$\frac{2}{3}$ の負の逆数，すなわち$-\frac{3}{2}$ です。これについても，点傾き形またはb を直接求める方法を使えば

$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = -\frac{3}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

を得ます。

4.4　水平線と垂直線

水平線と垂直線

- **水平線**の傾きは0 で，方程式は$y = b$ である。
- **垂直線**の傾きは定義されず，方程式は$x = a$ である。
- y 軸は$x = 0$，x 軸は$y = 0$ である。

Exercise 6

それぞれの直線の方程式を書きなさい。

1. $(-3,2)$ を通る垂直線
2. $(-1,2)$ と $(4,2)$ を通る直線
3. $(0,2)$ と $(0,-2)$ を通る直線
4. $(0,-4)$ を通る水平線

5　一次不等式のグラフ

二変数の一次不等式

x と y に関する**一次不等式**は，a と b が同時に 0 ではないとき，次のいずれかの形に書けます：

$$ax+by<c,\quad ax+by>c,\quad ax+by\le c,\quad ax+by\ge c.$$

順序対 (x_1,y_1) は，$x=x_1$，$y=y_1$ を代入したときに不等式が真になるなら，その不等式の**解**です。たとえば，$(3,2)$ は $x-y>0$ を満たします。なぜなら $3-2>0$ は真だからです。

一次不等式のグラフの描き方

一次不等式のグラフをスケッチするには：

1. 不等号を $=$ に置き換えて，**境界線**を描く。
2. $<$ または $>$ のときは**破線**，$\le$ または $\ge$ のときは**実線** を使う。
3. **テスト点** を一つ選ぶ（境界線上にないなら，しばしば $(0,0)$ が便利）。
4. テスト点が不等式を満たすなら，その点を含む側を塗る。そうでなければ，反対側を塗る。

境界線は座標平面を二つの領域（二つの**半平面**）に分けます。一方の半平面では**すべての** 点が不等式を満たし，もう一方の半平面では**どの** 点も不等式を満たしません。したがって，一点だけ調べれば十分です。

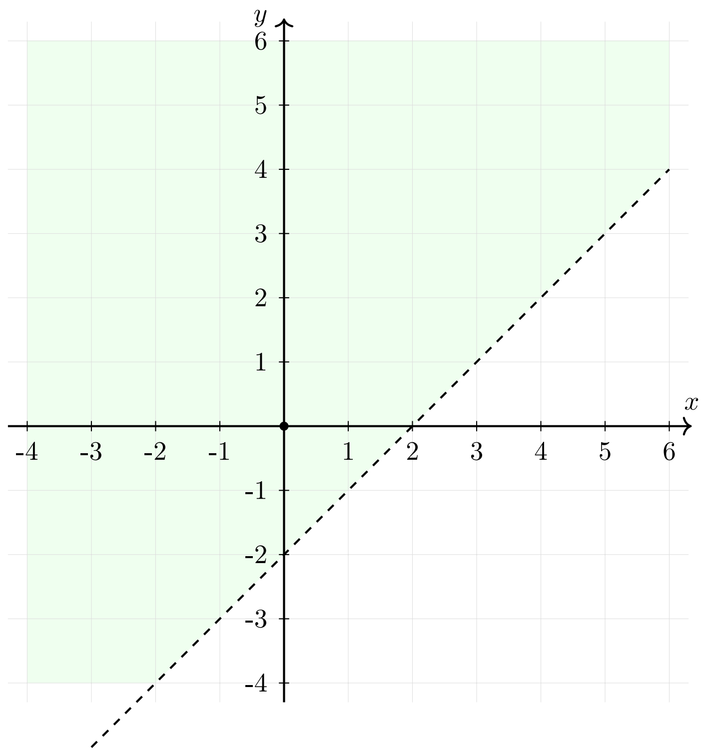
例として，不等式 $x-y<2$ のグラフをスケッチします。上の手順によれば，まず $x-y=2$ を描けばよく，これは $y=x-2$ と同値です。不等式が $<$ なので，境界線は破線です。どちら側を塗るか決めるために，テスト点 $(0,0)$ を使います。代入すると：

$$0-0<2\quad \text{これは真である。}$$

したがって，原点を含む側の領域を塗ります。傾き切片形で書けば：

$$x-y<2\quad\Leftrightarrow\quad y>x-2,$$

なので，$y=x-2$ の直線の**上側**を塗ります。この一次不等式のグラフを下に示します。



Exercise 7

傾き切片形を使って$5x + 4y \leq 12$ をスケッチしなさい。

Exercise 8

それぞれの不等式について，指定された点が解であるかどうかを判定しなさい。

1. $x + y > 1$ における$(0, 0)$
2. $2x - y \leq 0$ における$(2, 3)$
3. $x \geq 4$ における$(3, -10)$

Exercises の解答

Exercise 1

直線は$(0, 0)$ と$(1, -1)$ を通るので，

$$m = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1.$$

Exercise 2

1. $(2,3)$ と$(6,7)$ を通る場合：
$$m = \frac{7-3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1.$$
2. $(-1,4)$ と$(3,4)$ を通る場合：
$$m = \frac{4-4}{3-(-1)} = \frac{0}{4} = 0.$$
したがって，この直線は水平である。
3. $(5,-2)$ と$(5,1)$ を通る場合：x 座標が等しいので，この直線は垂直であり，傾きは**定義されない**。

Exercise 3

はしごの両端は$(0,12)$ と$(5,0)$ である。したがって，

$$m = \frac{0-12}{5-0} = -\frac{12}{5}.$$

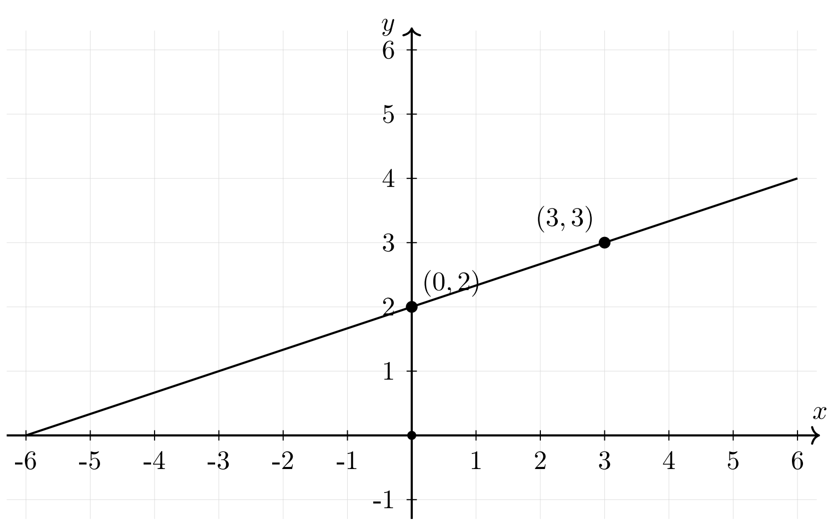
Exercise 4

まず傾き切片形に書き直す：

$$x - 3y = -6 \quad \Rightarrow \quad -3y = -x - 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + 2.$$

したがって，傾きは$m = \frac{1}{3}$，y 切片は$(0,2)$ である。

スケッチするには，$(0,2)$ を打ち，次にrise-over-run を使う。$m = \frac{1}{3}$ なので，右へ3，そのあと上へ1 動いて$(3,3)$ に着く。最後に，これら二点を通る直線を引く。



Exercise 5

1. $y=-3x-2$ の傾きは$m_1=-3$。直線$y=\frac{1}{3}x+1$ の傾きは$m_2=\frac{1}{3}$。

$$m_1 m_2 = -3\cdot\frac{1}{3} = -1$$

   なので，この二本の直線は**垂直** である。
2. 直線$y=\frac{1}{2}x+1$ と$y=\frac{1}{2}x-1$ はどちらも傾きが$\frac{1}{2}$ なので，**平行** である。

Exercise 6

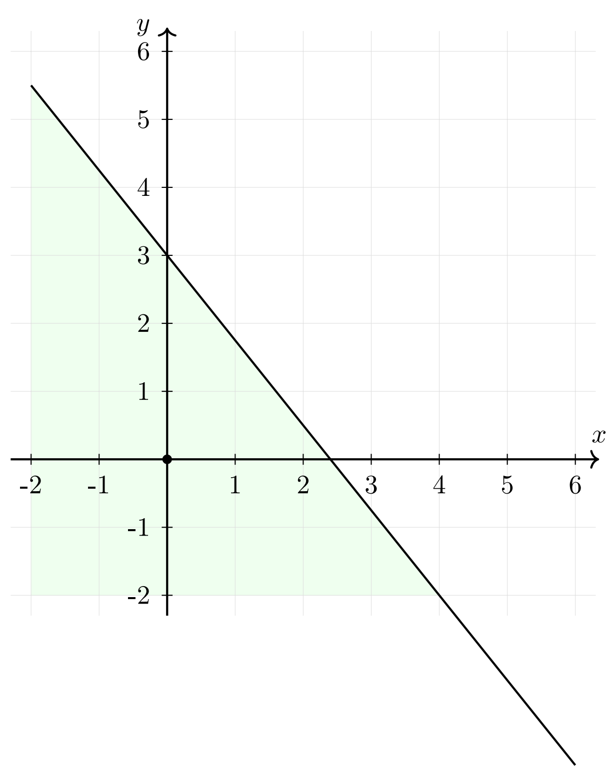
1. $(-3,2)$ を通る垂直線：$x=-3$。
2. $(-1,2)$ と$(4,2)$ を通る直線（y 座標が同じ）：$y=2$。
3. $(0,2)$ と$(0,-2)$ を通る直線（x 座標が同じ）：$x=0$。
4. $(0,-4)$ を通る水平線：$y=-4$。

Exercise 7

傾き切片形に書き直す：

$$5x+4y\le 12 \quad\Rightarrow\quad 4y\le -5x+12 \quad\Rightarrow\quad y\le -\frac{5}{4}x+3.$$

したがって，境界線は$y=-\frac{5}{4}x+3$ であり，$\le$ なので**実線** で描く。また，直線の**下側および直線上** を塗る。



（$(0,0)$ を使って簡単に確認すると，$5(0)+4(0) \leq 12$ は真なので，塗る側は原点を含む側でなければならず，実際そうなっている。）

Exercise 8

1. $(0,0)$ では：$0+0>1$ は偽なので，$(0,0)$ は**解ではない**。
2. $(2,3)$ では：$2(2)-3=1 \leq 0$ は偽なので，$(2,3)$ は**解ではない**。
3. $(3,-10)$ では：$3 \geq 4$ は偽なので，$(3,-10)$ は**解ではない**。