

在前面的几讲中，我们已经从代数和几何两个角度研究了一次方程。在这一讲中，我们将转向一个新的对象：多项式。接下来的四讲里，我们将重点讨论它们，然后再进入更高阶的内容。

到目前为止，我们一直遵循的指导原则是：数学的行为很像一种语言，其中有一些符号用来表达事物，而这些符号又具有几何上的解释。在数学这门语言中，我们已经看到：

语言	数学
字母	符号
单词	代数表达式
句子	方程/ 不等式
语法	规则（性质）

一次方程只需要使用算术运算 $+$, $-$, \times 和 \div 就可以表达和研究。在这一讲中，我们将研究含有指数的代数表达式。具体来说，我们将：

- 引入**指数**作为代数中的一部分新词汇，并学习化简指数表达式的关键规则；
- 学习用来表示非常大和非常小数字的**科学记数法**；
- 引入**多项式**，以及如何对它们进行加法、减法和乘法。

1 指数及其运算规则

1.1 指数记号

回忆一下，指数只是把重复乘法写得更紧凑的一种方式。例如，

$$3^2 = 3 \times 3, \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2, \quad y^3 = y \cdot y \cdot y.$$

一般地，如果 n 是一个正整数，那么 x^n 表示把 x 自身连乘 n 次。

指数记号

对于正整数 n ,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ 个因子}}.$$

其中，数 x 称为**底数**，而 n 称为**指数**。

1.2 指数运算规则

下面这些规则使我们能够化简含有指数的表达式。

指数运算规则

设 a 和 b 是非零实数， m, n 是正整数。那么：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n),$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

乍一看，这些为什么会恰好是指数的规则，也许并不那么明显。实际上，上述所有规则都可以从指数的定义推导出来。

例如，我们来证明 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 。先利用指数的定义把左边写开：

$$(a^m)(a^n) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ 个因子}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ 个因子}}.$$

总共我们先有 m 个 a 的因子，接着又有 n 个 a 的因子。因此，总共有 $(m+n)$ 个 a 的因子，所以

$$(a^m)(a^n) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{(m+n) \text{ 个因子}} = a^{m+n}.$$

再举一个例子，我们来推导当 $m > n$ 时的规则 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 。同样先用指数的定义把分式写开：

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ 个因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个因子}}}.$$

由于 $m > n$ ，我们可以把分子中的 m 个因子分成两部分：前面 n 个因子，以及剩下的 $(m-n)$ 个因子。于是前面这 n 个因子会和分母约掉，只剩下后面的 $(m-n)$ 个因子：

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{n \text{ 个因子}} \overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{(m-n) \text{ 个因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个因子}}} = \frac{\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a})}^{n \text{ 个因子}} \overbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{(m-n) \text{ 个因子}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ 个因子}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m-n) \text{ 个因子}} = a^{m-n}.$$

其余规则也可以用类似的方法得到。

上述规则也可以用来化简含有变量指数的表达式。例如：

- $(x^2 y^4)(3x) = 3x^3 y^4$ 。
- $-2(y^2)^3 = -2y^6$ 。
- $(-2y^2)^3 = -8y^6$ 。

练习1

化简下列表达式。

- (a) $(3x^2)(-5x)^3$
- (b) $\frac{14a^5b^3}{7a^2b^2}$
- (c) $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3$
- (d) $\frac{x^ny^{3n}}{x^2y^4}$

1.3 零指数与负指数

在上一节中，我们假设指数 m 和 n 都是正的。事实上，我们也可以考虑零指数，甚至负指数。这个现象最简单的例子来自乘法逆元性质：对于任意非零实数 a ，存在唯一的数 a^{-1} ，使得 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ 。当然，这个数正是 a 的倒数：

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

我们需要假设 a 非零，因为0的倒数会涉及除以零，而这是没有定义的。

利用 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 这一事实，我们可以得到下面这些指数规则。

零指数与负指数

对于任意非零实数 a 和任意正整数 m ：

$$a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

更一般地，如果 $a, b \neq 0$ ，那么

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

同样地，这些规则一开始也许看起来有些奇怪。但它们也很容易从指数的定义中得到。例如，我们可以重复前面证明 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 的思路，这一次取 $m = n$ ，从而证明 $a^0 = 1$ ：

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ 个因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ 个因子}}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}} = 1.$$

然后我们也有

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}.$$

练习2

求值。

- (a) 5^0
- (b) 2^{-2}

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2 科学记数法

如果把一个很大的数连同所有的零都完整写出来，它通常会很难读。例如，考虑这个数：

$$33,000,000,000,000,000,000.$$

正如我们看到的，通常的记数方式开始失去便利性，而且这个数会变得很难正确阅读。为了解决这个问题，实际中我们常常使用科学记数法。这种记法把含有许多零的数字写成更短的形式，从而更容易阅读。

科学记数法

一个数如果被写成下面的形式，就称为**科学记数法**：

$$a \times 10^n,$$

其中 n 是整数，而 a 满足 $1 \leq |a| < 10$ 。

例如，上面的那个数字可以改写成科学记数法：

$$33,000,000,000,000,000,000 = 3.3 \times 10^{19}.$$

乘以10会使一个数的小数点向右移动一位，例如 $7.2 \times 10 = 72$ 。因此，表达式 3.3×10^{19} 的意思就是：把数字3.3的小数点向右移动十九次，就得到原来的那个数。

相反，除以10会使小数点向左移动，例如 $7.2 \div 10 = 0.72$ 。因此，我们也可以利用反复除以10来用科学记数法表示非常小的数：

$$6.84 \times 10^{-5} = 0.0000684.$$

练习3

把下列各数写成科学记数法。

(a) 0.0072

(b) 937,200,000.0

3 多项式的加法与减法

3.1 定义多项式

多项式是由数字、变量和非负整数指数构成的表达式。它们是代数中最重要的一类表达式之一，因此在接下来的几讲中我们会反复研究它们。我们先从定义开始。

多项式与相关术语

关于变量 x 的一个**多项式**是任何形如

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

的表达式，其中 $a_n \neq 0$ ，并且指数都是非负整数。

- 多项式的**次数**是 n 。
- **首项**是 $a_n x^n$ 。
- **首项系数**是 a_n 。
- **常数项**是 a_0 。
- 在**标准形式**中，各项按指数从大到小排列。

只含1项、2项或3项的多项式，分别称为**单项式**、**二项式**和**三项式**。

事实上，我们已经见过多项式：一次表达式是1次多项式：

$$mx + b \quad \text{其中} \quad a_1 = m \text{ 且 } a_0 = b.$$

下表给出了一些处于标准形式的多项式例子：

多项式	标准形式	次数
$5x^2 - 2x^7 + 4 - 2x$	$-2x^7 + 5x^2 - 2x + 4$	7
$16 + x^2$	$x^2 + 16$	2
12	12	0

3.2 多项式的加法

多项式的加法很直接：要把两个多项式相加，我们只需把同类项合并起来。具体做法是先观察变量的幂次，再把相同幂次项的系数相加。例如，考虑下面这个式子：

$$(2x^3 + x^2 - 5) + (x^2 + x + 6) = 2x^3 + (1 + 1)x^2 + x + (-5 + 6) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

这种方法也可以用于两个以上多项式的和，例如：

$$(3x^2 + 2x + 4) + (3x^2 - 6x + 3) + (-x^2 + 2x - 4) = 5x^2 - 2x + 3.$$

练习4

把下列多项式相加，并尽可能化简答案。

- $(x^2 + x + 2) + (3x^3 + 2x^2 + x)$
- $(x^7 + 3) + (x^2 - 3) + (-x^2 + x^5)$

3.3 多项式的减法

通常的减法本质上只是另一种加法。例如，要从3中减去2，我们只是把2的加法逆元加到3上： $3 - 2 = 3 + (-2) = 1$ 。同样地，我们也可以通过改变符号并进行加法，来把一个多项式从另一个多项式中减去。

多项式的减法

设 $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ， $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ 是两个多项式。要从 $P(x)$ 中减去 $Q(x)$ ，把

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)),$$

然后把负号分配到 $Q(x)$ 的每一项中，再做加法。

作为多项式减法的一个例子，我们来从 $(3x^3 - 5x^2 + 3)$ 中减去 $(x^3 + 2x^2 - x - 4)$ ：

$$\begin{aligned}(3x^3 - 5x^2 + 3) - (x^3 + 2x^2 - x - 4) &= (3x^3 - 5x^2 + 3) + (-x^3 - 2x^2 + x + 4) \\ &= 2x^3 - 7x^2 + x + 7.\end{aligned}$$

常见错误

做减法时，负号必须分配到被减去的那个多项式中的**每一项**上。这意味着我们要改变该多项式中每一项的符号。例如：

$$-(x^2 + 3x - 2) = -x^2 - 3x + 2, \quad \text{而不是} \quad -x^2 + 3x - 2.$$

练习5

从 $(4x^3 - x^2 + 3x + 2)$ 中减去 $(x^4 + x^3 - 2x + 1)$ 。

4 多项式的乘法

4.1 与单项式相乘

多项式的乘法比加法或减法更复杂。为了更容易理解，我们将先从最简单的情形开始，然后慢慢增加难度。

最简单的情形，是把一个多项式与一个单项式相乘，也就是与一个只有一项的多项式相乘。在这种情况下，我们可以使用分配律，让单项式依次乘以多项式的每一项。例如：

$$x(2x + 5) = 2x^2 + 5x.$$

分配律同样适用于项数更多的多项式。例如：

$$x(x^3 + 2x^2 + 4x - 2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x.$$

练习6

利用分配律计算下列多项式的乘法。

- (a) $(3x - 7)(-2x)$
- (b) $3x^2(5x - x^3 + 2)$
- (c) $(-x)(2x^2 - 3x)$

4.2 两个二项式相乘

接下来，我们考虑两个二项式相乘的情形，也就是两个各有两项的多项式相乘。在这种情况下，我们可以两次使用分配律，把括号完全展开。例如：

$$\begin{aligned}(3x - 2)(5x + 7) &= (3x - 2)(5x) + (3x - 2)(7) \\ &= (3x)(5x) + (-2)(5x) + (3x)(7) + (-2)(7) \\ &= 15x^2 - 10x + 21x - 14 \\ &= 15x^2 + 11x - 14.\end{aligned}$$

还有一种方法可以用更少的步骤来计算二项式乘法。

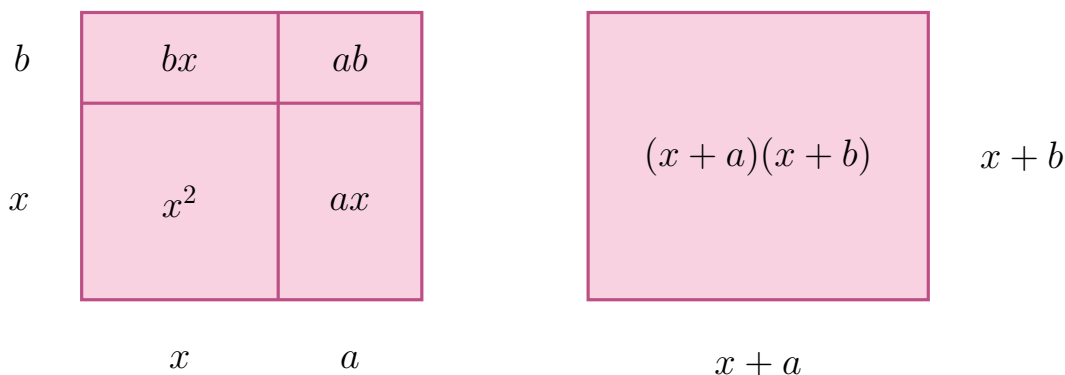
FOIL 方法

对于两个二项式 $(A + B)(C + D)$ ：

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

一个常见的记忆方法是**FOIL**：First、Outside、Inside、Last。

FOIL 方法也可以从几何上理解。为了方便起见，假设我们有两个简单的二项式 $x + a$ 和 $x + b$ ，并且想把它们相乘。我们知道，正数的乘法可以表示长方形的面积，因此可以把表达式 $(x + a)(x + b)$ 和 $x^2 + (a + b)x + ab$ 画成下图。



正如你所看到的，左边那个长方形的面积由 x^2 、 ax 、 bx 和 ab 这几部分相加得到。然而，这些部分的和恰好构成了一个总面积为 $(x + a)(x + b)$ 的长方形。

练习7

展开并化简。

- (a) $(x - 1)(x + 5)$
- (b) $(2x + 3)(x - 2)$
- (c) $(4x + 5)^2$
- (d) $(3x^2 - 2)(4x + 7) - (4x)^2$

4.3 其他类型的乘法

利用上面的原理，我们还可以计算更复杂的多项式乘积。先考虑下面这个乘积：

$$(x - 4)(x^2 - 4x + 2).$$

在这里，我们必须使用分配律，把来自两个多项式的所有可能的项对都相乘。再次强调，这本质上就是对分配律的两次应用。例如，考虑这个乘积：

$$\begin{aligned}(x - 4)(x^2 - 4x + 2) &= x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 16x + 2x - 8 \\ &= x^3 - 8x^2 + 18x - 8.\end{aligned}$$

我们也可以利用多项式乘法来计算多项式的幂。例如，表达式 $(x - 3)^3$ 可以通过两步二项式乘法来完成：

$$\begin{aligned}(x - 3)^3 &= (x - 3)(x - 3)(x - 3) \\ &= (x - 3)((x - 3)(x - 3)) \\ &= (x - 3)(x^2 - 6x + 9) \\ &= x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 18x + 9x - 27 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27.\end{aligned}$$

练习8

计算下列各式。

- 1. $(2x^2 - 7x + 1)(4x + 3)$
- 2. $(x + 2)^3$

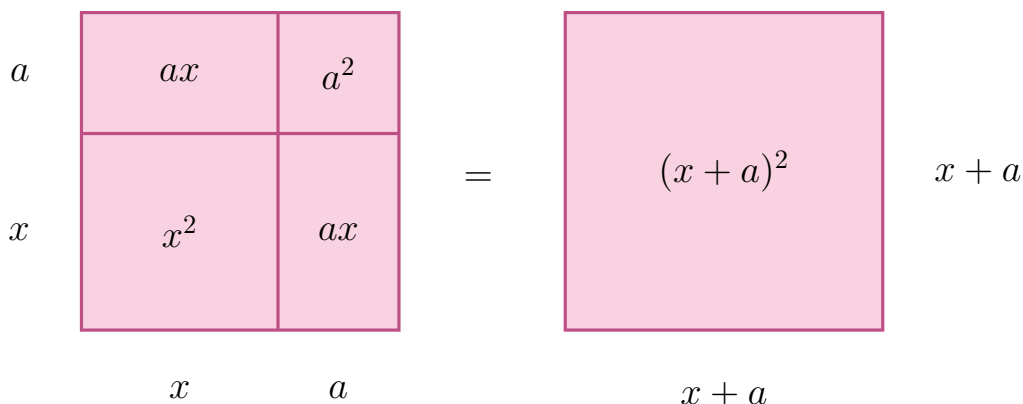
4.4 特殊乘积

有些二项式乘积出现得非常频繁，因此值得把它们模式记下来。这一点在后面要讲的因式分解中会特别有用。

二项式的平方

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2, \quad (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

二项式平方的几何图像如下。



正如你所看到的，左边那个正方形的面积由 x^2 、 ax 、 ax 和 a^2 的和构成。因此总面积是

$$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

这与右边那个边长为 $x + a$ 的正方形面积完全一致。于是就得到等式

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

平方差

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2.$$

练习9 (特殊乘积)

展开并化简。

- (a) $(5x - 6)(5x + 6)$
- (b) $(3x + 7)^2$
- (c) $(4x + 9)^2$
- (d) $(6 - 5x^2)^2$

练习答案

练习1

(a) $(3x^2)(-5x)^3 = 3x^2 \cdot (-125x^3) = -375x^5.$

(b) $\frac{14a^5b^3}{7a^2b^2} = 2a^{5-2}b^{3-2} = 2a^3b.$

(c) $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{x^6}{8y^3}.$

(d)

$$\frac{x^n y^{3n}}{x^2 y^4} = x^{n-2} y^{3n-4}.$$

练习2

(a) $5^0 = 1$ 。

(b) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ 。

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ 。

练习3

(a)

$$0.0072 = 7.2 \times 10^{-3}.$$

(b)

$$937,200,000.0 = 9.372 \times 10^8.$$

练习4

(a)

$$(x^2 + x + 2) + (3x^3 + 2x^2 + x) = 3x^3 + (x^2 + 2x^2) + (x + x) + 2 = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

(b)

$$(x^7 + 3) + (x^2 - 3) + (-x^2 + x^5) = x^7 + x^5 + (x^2 - x^2) + (3 - 3) = x^7 + x^5.$$

练习5

$$\begin{aligned}(4x^3 - x^2 + 3x + 2) - (x^4 + x^3 - 2x + 1) &= 4x^3 - x^2 + 3x + 2 - x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ &= -x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

练习6

(a)

$$(3x - 7)(-2x) = (3x)(-2x) + (-7)(-2x) = -6x^2 + 14x.$$

(b)

$$3x^2(5x - x^3 + 2) = 15x^3 - 3x^5 + 6x^2 = -3x^5 + 15x^3 + 6x^2.$$

(c)

$$(-x)(2x^2 - 3x) = -2x^3 + 3x^2.$$

练习7

(a)

$$(x-1)(x+5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5.$$

(b)

$$(2x+3)(x-2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6.$$

(c)

$$(4x+5)^2 = (4x+5)(4x+5) = 16x^2 + 20x + 20x + 25 = 16x^2 + 40x + 25.$$

(d)

$$(3x^2-2)(4x+7) - (4x)^2.$$

先展开:

$$(3x^2-2)(4x+7) = 12x^3 + 21x^2 - 8x - 14.$$

然后减去 $(4x)^2 = 16x^2$:

$$12x^3 + 21x^2 - 8x - 14 - 16x^2 = 12x^3 + 5x^2 - 8x - 14.$$

练习8

1.

$$(2x^2 - 7x + 1)(4x + 3) = 8x^3 + 6x^2 - 28x^2 - 21x + 4x + 3 = 8x^3 - 22x^2 - 17x + 3.$$

2.

$$(x+2)^3 = (x+2)^2(x+2) = (x^2+4x+4)(x+2) = x^3+6x^2+12x+8.$$

练习9

(a)

$$(5x-6)(5x+6) = (5x)^2 - 6^2 = 25x^2 - 36.$$

(b)

$$(3x+7)^2 = 9x^2 + 42x + 49.$$

(c)

$$(4x+9)^2 = 16x^2 + 72x + 81.$$

(d)

$$(6-5x^2)^2 = 6^2 - 2(6)(5x^2) + (5x^2)^2 = 36 - 60x^2 + 25x^4.$$