MAT140 — 第7講ハンドアウト
多項式の演算

前回までの講義では，一次方程式を代数的な視点と幾何学的な視点の両方から学んできました。この講義では，新しい対象である多項式に進みます。これから4 回の講義を使って多項式について学び，そのあとでさらに進んだ内容に進みます。

これまでの基本方針は，数学は言語のようにふるまうという考え方でした。何かを表現するための記号があり，それらの記号には幾何学的な解釈があります。数学という言語において，私たちは次の対応を見てきました：

言語	**数学**
アルファベット	記号
単語	代数式
文	方程式/ 不等式
文法	規則（性質）

一次方程式は，算術演算$+, -, \times, \div$ だけを使って表現し，研究することができます。この講義では，指数を含む代数式を扱います。具体的には，

- **指数**を代数の新しい語彙として導入し，指数式を簡単にするための基本規則を学び，
- 非常に大きい数や非常に小さい数を表すための**科学的記数法** を学び，
- **多項式**を導入し，それらの足し算，引き算，掛け算を学びます。

1 指数とその規則

1.1 指数表記

指数は，繰り返しの掛け算を簡潔に書く方法にすぎないことを思い出しましょう。たとえば，

$$3^2 = 3 \times 3, \qquad 2^3 = 2 \times 2 \times 2, \qquad y^3 = y \cdot y \cdot y.$$

一般に，n が正の整数なら，x^n はx をn 回自分自身に掛けることを意味します。

指数表記

正の整数n に対して，

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{ 個の因子}}.$$

数x を**底**，n を**指数**と呼びます。

1.2 指数法則

次の規則を使うと，指数を含む式を簡単にできます。

指数法則

a とb を0 でない実数とし，m, n を正の整数とする。そのとき：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n),$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

一見すると，なぜこれらが指数の規則なのかはすぐには明らかでないかもしれません。実際，これらの規則はすべて，指数の定義から導くことができます。

例として，$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ を示してみます。左辺を指数の定義を使って書き下すと，

$$(a^m)(a^n) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ 個の因子}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ 個の因子}}.$$

ここにはa がまずm 個並び，その直後にさらにn 個並んでいます。したがって，合計で$(m+n)$ 個のa があることになり，

$$(a^m)(a^n) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{(m+n) \text{ 個の因子}} = a^{m+n}$$

を得ます。

もう一つの例として，$m > n$ のときの規則$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を導きます。指数の定義を使って分数を書き下すと，

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ 個の因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ 個の因子}}}.$$

$m > n$ なので，分子のm 個の因子を，最初のn 個と残りの$(m-n)$ 個に分けることができます。すると，最初のn 個は分母と打ち消し合い，$(m-n)$ 個だけが残ります：

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n \text{ 個の因子}}\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{(m-n) \text{ 個の因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ 個の因子}}} = \frac{\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}^{n \text{ 個の因子}}\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{(m-n) \text{ 個の因子}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ 個の因子}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m-n) \text{ 個の因子}} = a^{m-n}.$$

ほかの規則も同様にして得られます。

上の規則は，変数の指数を含む式を簡単にするのにも使えます。たとえば：

- $(x^2y^4)(3x) = 3x^3y^4$。
- $-2(y^2)^3 = -2y^6$。
- $(-2y^2)^3 = -8y^6$。

Exercise 1

各式を簡単にしなさい。

(a) $(3x^2)(-5x)^3$

(b) $\dfrac{14a^5b^3}{7a^2b^2}$

(c) $\left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^3$

(d) $\dfrac{x^n y^{3n}}{x^2y^4}$

1.3　0 乗と負の指数

前節では，指数m とn が正であると仮定していました。実は，指数として0 や，さらには負の指数も考えることができます。この現象の最も簡単な例は，乗法逆元の性質から来ます。任意の0 でない実数a に対して，$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ を満たす唯一の数a^{-1} があります。もちろん，これは単にa の逆数です：

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

ここでa が0 でないことを仮定する必要があります。0 の逆数は0 で割ることになり，それは定義されていないからです。

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ を使うと，次の指数法則が得られます。

0 乗と負の指数

任意の0 でない実数a と正の整数m に対して：

$$a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

より一般に，$a, b \neq 0$ なら，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

これらの規則も，最初は少し奇妙に見えるかもしれません。しかし，定義から簡単に導けます。たとえば，$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ の証明を繰り返し，今度は$m = n$ として$a^0 = 1$ を示せます：

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\text{ 個の因子}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ 個の因子}}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}} = 1.$$

するとさらに

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

も得られます。

Exercise 2

値を求めなさい。

(a) 5^0
(b) 2^{-2}
(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2　科学的記数法

非常に大きい数は，0 をすべて書き並べると読みにくくなることがよくあります。たとえば，次の数を考えます：

$$33{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000.$$

見てわかるように，通常の数の書き方は便利さを失い始め，正しく読むのが難しくなります。この問題を解決するために，実際には科学的記数法をよく使います。この記法は，たくさんの0を含む数をより短い形にして，読みやすくします。

科学的記数法

数が**科学的記数法**で書かれているとは，それが

$$a \times 10^n$$

の形に書かれていることをいう。ただし，n は整数であり，a は$1 \le |a| < 10$ を満たす数である。

例として，上の数は科学的記数法では

$$33{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000 = 3.3 \times 10^{19}$$

と書けます。10 を掛けると，小数点は一つ右へ動きます。たとえば$7.2 \times 10 = 72$ です。したがって，3.3×10^{19} という式は，数3.3 の小数点を右に19 回動かせば，元の数になるという意味です。

逆に，10 で割ると，小数点は左へ動きます。たとえば$7.2 \div 10 = 0.72$ です。したがって，10 で何度も割ることを使うと，非常に小さい数も科学的記数法で表せます：

$$6.84 \times 10^{-5} = 0.0000684.$$

Exercise 3

各数を科学的記数法で書きなさい。

(a) 0.0072
(b) 937,200,000.0

3　多項式の加法と減法

3.1　多項式の定義

多項式とは，数，変数，そして0 以上の整数の指数から作られる式です。多項式は代数における

最も重要な式の族の一つであり，そのため，これから数回の講義で集中的に扱います。まずは定義から始めます。

多項式と用語

x の**多項式**とは，

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

の形の式のことである。ただし，$a_n \neq 0$ であり，指数は0 以上の整数である。

- 多項式の**次数**はn である。
- **最高次の項**は$a_n x^n$ である。
- **最高次係数**はa_n である。
- **定数項**はa_0 である。
- **標準形**では，項は指数の高い順に並べる。

項が1 個，2 個，3 個の多項式は，それぞれ**単項式**，**二項式**，**三項式** と呼ばれる。

実は，私たちはすでに多項式を見ています。一次式は次数1 の多項式です：

$$mx + b \qquad \text{は} \qquad a_1 = m \text{ および } a_0 = b$$

を持ちます。

下の表は，標準形で書かれた多項式の例です：

多項式	標準形	次数
$5x^2 - 2x^7 + 4 - 2x$	$-2x^7 + 5x^2 - 2x + 4$	7
$16 + x^2$	$x^2 + 16$	2
12	12	0

3.2 多項式の加法

多項式の足し算は簡単です。二つの多項式を足すには，同類項をまとめればよいだけです。これは，まず変数の冪を見て，同じ冪を持つ項の係数どうしを足すことで行います。例として，次を考えます：

$$(2x^3 + x^2 - 5) + (x^2 + x + 6) = 2x^3 + (1+1)x^2 + x + (-5+6) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

この方法は，二つより多い多項式の和にも使えます。たとえば：

$$(3x^2 + 2x + 4) + (3x^2 - 6x + 3) + (-x^2 + 2x - 4) = 5x^2 - 2x + 3.$$

Exercise 4

次の多項式を足し，できるだけ簡単にしなさい。

(a) $(x^2 + x + 2) + (3x^3 + 2x^2 + x)$
(b) $(x^7 + 3) + (x^2 - 3) + (-x^2 + x^5)$

3.3　多項式の減法

通常の引き算は，実は別の形の足し算です。たとえば，3 から2 を引くには，2 の加法逆元を3 に足せばよいので，$3-2=3+(-2)=1$ です。同様に，一つの多項式から別の多項式を引くには，符号を反転させて足し算を行えばよいです。

多項式の減法

$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ と$Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0$ を二つの多項式とする。$P(x)$ から$Q(x)$ を引くには，

$$P(x)-Q(x)=P(x)+\big(-Q(x)\big)$$

と書き直し，そのあと$Q(x)$ のすべての項に負号を分配して，足し算を行う。

多項式の減法の例として，$(3x^3-5x^2+3)$ から(x^3+2x^2-x-4) を引きます：

$$\begin{aligned}(3x^3-5x^2+3)-(x^3+2x^2-x-4)&=(3x^3-5x^2+3)+(-x^3-2x^2+x+4)\\&=2x^3-7x^2+x+7.\end{aligned}$$

よくある間違い

引き算をするときには，負号を，引かれる多項式の**すべての** 項に分配しなければならない。つまり，その多項式の**すべての** 項の符号を反転させる。たとえば：

$$-\big(x^2+3x-2\big)=-x^2-3x+2,\quad \text{であって} \quad -x^2+3x-2 \text{ ではない。}$$

Exercise 5

$(4x^3-x^2+3x+2)$ から(x^4+x^3-2x+1) を引きなさい。

4　多項式の乗法

4.1　単項式を掛ける

多項式の掛け算は，加法や減法より少し複雑です。理解しやすくするために，まず最も簡単な場合から始めて，少しずつ難しくしていきます。

最も簡単なのは，多項式に単項式，つまり一つの項しか持たない多項式を掛ける場合です。このときは分配法則を使って，単項式を多項式の各項に掛ければよいです。たとえば：

$$x(2x+5)=2x^2+5x.$$

分配法則は，もっと多くの項を持つ多項式にも成り立ちます。たとえば：

$$x(x^3+2x^2+4x-2)=x^4+2x^3+4x^2-2x.$$

Exercise 6

分配法則を使って，次の多項式を掛けなさい。

(a) $(3x-7)(-2x)$
(b) $3x^2(5x-x^3+2)$
(c) $(-x)(2x^2-3x)$

4.2　二つの二項式の乗法

次に，二つの二項式，つまりそれぞれ二項からなる多項式どうしを掛ける場合を考えます。この場合は，分配法則を二回使って括弧を展開できます。たとえば：

$$\begin{aligned}(3x-2)(5x+7) &= (3x-2)(5x)+(3x-2)(7)\\ &= (3x)(5x)+(-2)(5x)+(3x)(7)+(-2)(7)\\ &= 15x^2-10x+21x-14\\ &= 15x^2+11x-14.\end{aligned}$$

二項式をもっと少ない手順で掛ける方法もあります。

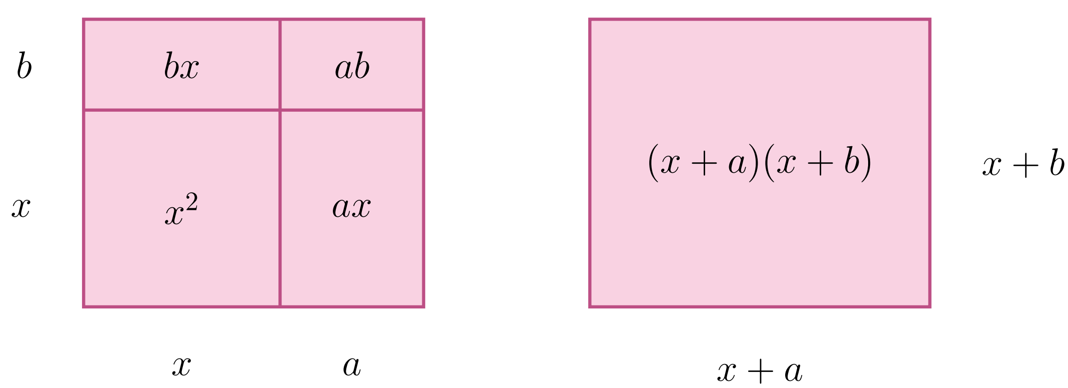
FOIL 法

二つの二項式$(A+B)(C+D)$ に対して：

$$(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD.$$

よく使われる覚え方として**FOIL** があります：First, Outside, Inside, Last.

FOIL 法は幾何学的にも理解できます。簡単のために，$(x+a)$ と$(x+b)$ という単純な二項式を掛けたいとします。正の数の掛け算は長方形の面積を与えるので，$(x+a)(x+b)$ と$x^2+(a+b)x+ab$ を次のように描けます。



見てわかるように，左の長方形の面積はx^2，ax，bx，ab の和で与えられます。しかし，これらの項の和は，全体として$(x+a)(x+b)$ という面積を持つ長方形になっています。

Exercise 7

展開して簡単にしなさい。

(a) $(x-1)(x+5)$
(b) $(2x+3)(x-2)$
(c) $(4x+5)^2$
(d) $(3x^2-2)(4x+7)-(4x)^2$

4.3　そのほかの乗法

上の考え方を使えば，もっと複雑な多項式の積も計算できます。まず

$$(x-4)(x^2-4x+2)$$

を考えます。

ここでは，二つの多項式から取れるすべての項の組を掛けて分配しなければなりません。これもやはり，分配法則を二回使うことと考えられます。たとえば：

$$\begin{aligned}(x-4)(x^2-4x+2) &= x^3-4x^2-4x^2+16x+2x-8\\ &= x^3-8x^2+18x-8.\end{aligned}$$

多項式の掛け算を使うと，多項式の指数も計算できます。たとえば，$(x-3)^3$ は二回の二項式の掛け算で求められます：

$$\begin{aligned}(x-3)^3 &= (x-3)(x-3)(x-3)\\ &= (x-3)\left((x-3)(x-3)\right)\\ &= (x-3)(x^2-6x+9)\\ &= x^3-3x^2-6x^2+18x+9x-27\\ &= x^3-9x^2+27x-27.\end{aligned}$$

Exercise 8

次を計算しなさい。

1. $(2x^2-7x+1)(4x+3)$
2. $(x+2)^3$

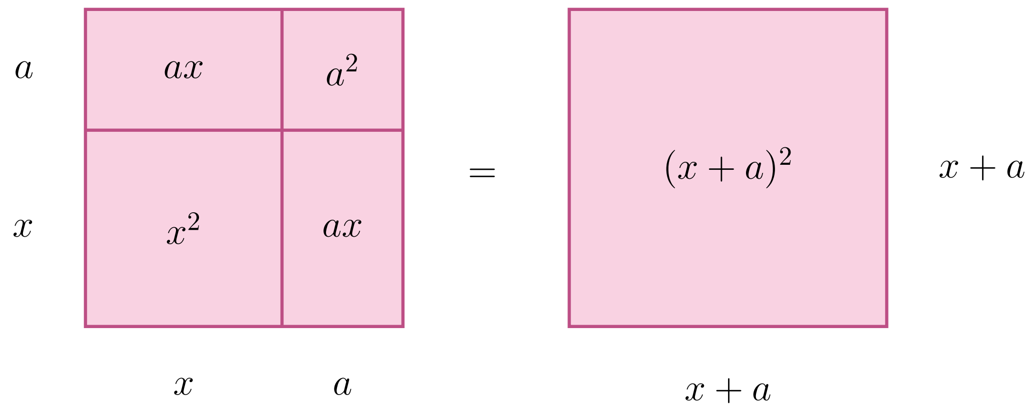
4.4　特殊な積

二項式どうしの積の中には，とても頻繁に現れるので，その形を覚えておく価値があるものがあります。これは，後で扱う因数分解に特に役立ちます。

二項式の平方

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2, \qquad (x-a)^2 = x^2-2ax+a^2.$$

二項式の平方は，図で見ると次のようになります。



見てわかるように，左の正方形の面積はx^2，ax，ax，a^2 の和で与えられます。したがって，全体の面積は

$$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

となり，辺の長さが$x+a$ である右の正方形の面積と一致します。これにより，

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

という等式が得られます。

平方差

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2.$$

Exercise 9 (特殊な積)

展開して簡単にしなさい。

(a) $(5x-6)(5x+6)$
(b) $(3x+7)^2$
(c) $(4x+9)^2$
(d) $(6-5x^2)^2$

Exercises の解答

Exercise 1

(a)

$$(3x^2)(-5x)^3 = 3x^2 \cdot (-125x^3) = -375x^5.$$

(b)

$$\frac{14a^5b^3}{7a^2b^2} = 2a^{5-2}b^{3-2} = 2a^3b.$$

(c)

$$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{x^6}{8y^3}.$$

(d)

$$\frac{x^n y^{3n}}{x^2 y^4} = x^{n-2} y^{3n-4}.$$

Exercise 2

(a) $5^0 = 1$。

(b) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$。

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$。

Exercise 3

(a)

$$0.0072 = 7.2 \times 10^{-3}.$$

(b)

$$937{,}200{,}000.0 = 9.372 \times 10^8.$$

Exercise 4

(a)

$$(x^2 + x + 2) + (3x^3 + 2x^2 + x) = 3x^3 + (x^2 + 2x^2) + (x + x) + 2 = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

(b)

$$(x^7 + 3) + (x^2 - 3) + (-x^2 + x^5) = x^7 + x^5 + (x^2 - x^2) + (3 - 3) = x^7 + x^5.$$

Exercise 5

$$\begin{aligned}(4x^3 - x^2 + 3x + 2) - (x^4 + x^3 - 2x + 1) &= 4x^3 - x^2 + 3x + 2 - x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ &= -x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

Exercise 6

(a)

$$(3x - 7)(-2x) = (3x)(-2x) + (-7)(-2x) = -6x^2 + 14x.$$

(b)

$$3x^2(5x - x^3 + 2) = 15x^3 - 3x^5 + 6x^2 = -3x^5 + 15x^3 + 6x^2.$$

(c)

$$(-x)(2x^2 - 3x) = -2x^3 + 3x^2.$$

Exercise 7

(a)

$$(x-1)(x+5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5.$$

(b)

$$(2x+3)(x-2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6.$$

(c)

$$(4x+5)^2 = (4x+5)(4x+5) = 16x^2 + 20x + 20x + 25 = 16x^2 + 40x + 25.$$

(d)

$$(3x^2-2)(4x+7) - (4x)^2.$$

まず展開すると：

$$(3x^2-2)(4x+7) = 12x^3 + 21x^2 - 8x - 14.$$

そのあと$(4x)^2 = 16x^2$ を引くと：

$$12x^3 + 21x^2 - 8x - 14 - 16x^2 = 12x^3 + 5x^2 - 8x - 14.$$

Exercise 8

1.

$$(2x^2 - 7x + 1)(4x+3) = 8x^3 + 6x^2 - 28x^2 - 21x + 4x + 3 = 8x^3 - 22x^2 - 17x + 3.$$

2.

$$(x+2)^3 = (x+2)^2(x+2) = (x^2+4x+4)(x+2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

Exercise 9

(a)

$$(5x-6)(5x+6) = (5x)^2 - 6^2 = 25x^2 - 36.$$

(b)

$$(3x+7)^2 = 9x^2 + 42x + 49.$$

(c)

$$(4x+9)^2 = 16x^2 + 72x + 81.$$

(d)

$$(6-5x^2)^2 = 6^2 - 2(6)(5x^2) + (5x^2)^2 = 36 - 60x^2 + 25x^4.$$