MAT140 — 第8讲讲义
多项式除法

在第7 讲中，我们完成了多项式的大部分算术运算：我们已经学会了如何对多项式进行加法、减法和乘法。在这一讲中，我们将通过学习如何**用一个多项式去除另一个多项式**来把这幅图景补全。

理解除法的一个有用方式是：它通常是一种算法。你遵循一套固定步骤，而只要这些步骤做对了，你每次都会得到正确答案。多项式长除法正是这样一种过程。因此，至少从最低要求来说，学生应当能够理解如何应用这个算法，从而得到正确结果。

除此之外，理想情况下，学生也应当理解除法的主要思想：为了用一个东西去除另一个东西，我们实际上是在"反过来"看乘法，也就是在问："这个东西能装进那个东西多少次？" 我们可以通过不断改进自己有根据的猜测来解决这个问题，而这种过程最终会把我们引向真正的答案。多项式除法的核心就是除法本身，因此学生应当理解为什么这个算法成立。

今天我们将会：

1. 复习多项式除法中最简单的情形，也就是用单项式（只有一项的多项式）去除。
2. 回顾除法的一般思想，并利用这些观察从最基本原理出发去除多项式。
3. 给出多项式除法的长除法算法，它本质上是一种漂亮而直观的方式，用来整理多项式的除法过程。

1 用单项式去除多项式

我们从多项式除法中最简单的情形开始：用单项式去除多项式。单项式只是一个只有一项的多项式，因此当我们用它去除一个多项式时，只需利用分式的基本规则，把整个除法拆成若干个和即可。

用单项式除

如果$m(x)$ 是一个单项式，而$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ 是一个多项式，那么

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{m(x)} &= \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{m(x)} \\ &= \frac{a_nx^n}{m(x)} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{m(x)} + \cdots + \frac{a_1x}{m(x)} + \frac{a_0}{m(x)}.\end{aligned}$$

由于单项式始终都是形如bx^m 的形式，所以把一个多项式除以单项式时，我们只需利用上一讲的指数运算规则，尤其是下面这条：

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

其中m, n 为正整数，且$x \neq 0$。

例如，假设我们想把多项式$4x^2 + 2x$ 除以单项式x。按照上面的思路，有：

$$\frac{4x^2 + 2x}{x} = \frac{4x^2}{x} + \frac{2x}{x} = 4x + 2.$$

再看一个更复杂一点的例子，把多项式$4x^4+3x^2+x$ 除以单项式$2x^2$。我们仍然可以逐项进行除法：

$$\frac{4x^4+3x^2+x}{2x^2}=\frac{4x^4}{2x^2}+\frac{3x^2}{2x^2}+\frac{x}{2x^2}=2x^2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}.$$

练习1

进行除法并化简。

1. $\dfrac{x^5}{x}$
2. $\dfrac{x^3+x}{x}$
3. $\dfrac{x^3+2x^2}{x}$
4. $\dfrac{7x^3+4x^2}{x^2}$

2 一般的多项式除法

2.1 多项式的整除

普通除法本质上就是乘法的逆运算，也就是说，当我们写出像$8\div 2$ 这样的式子时，我们是在寻找第三个数，这个数乘以2 会得到8，于是我们写：

$$8\div 2=4 \quad 因为 \quad 4\times 2=8.$$

上一讲中我们提到，多项式总可以彼此相乘，从而得到第三个、次数更高的多项式。例如，我们可以把多项式$(x+1)$ 和$(x+2)$ 相乘，得到：

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2.$$

多项式除法与普通除法的定义方式类似：它是多项式乘法的逆运算。从概念上讲，这意味着我们可以写出类似这样的式子：

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2 \quad 因为 \quad x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

稍后在第3 节中，我们会详细介绍多项式的"除法算法"。但在那之前，我们先花一些时间研究多项式除法的若干性质。

多项式的整除

给定两个多项式$P(x)$ 和$D(x)$，如果$D(x)$ 非零，并且存在第三个多项式$Q(x)$ 使得

$$P(x)=Q(x)\cdot D(x),$$

那么我们就说$D(x)$ 整除 $P(x)$。我们称$P(x)$ 为**被除式**，$D(x)$ 为**除式**，$Q(x)$ 为**商**。

在除法

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2$$

中，除式是多项式$x+1$，被除式是多项式x^2+3x+2，商是$x+2$。

在进入多项式长除法之前，先回忆一些普通整数除法的事实会有所帮助。假设我们尝试把一个较大的数除以一个较小的数。

例如，考虑除法$60\div 4$。一种做法是先给出一系列估计，然后逐步修正。我们可以先问："4 能装进6 多少次？" 其答案是1。因此，4 至少可以装进60 里10 次。这是一个不错的初步猜测，但显然4 装进60 的次数不止10 次，因为4×10 只有40。我们可以直接计算"余数"，记为r：

$$60=10\cdot 4+r \quad\Rightarrow\quad r=20.$$

现在，我们只需要弄清楚4 能装进20 多少次。事实上，$5\cdot 4=20$，这等价于写成$5\cdot 4=r$。于是我们可以把60 重写为：

$$60=10\cdot 4+r=10\cdot 4+5\cdot 4=(10+5)\cdot 4=15\cdot 4.$$

如果60 等于15×4，那么等价地，$60\div 4$ 必须等于15。

与$60\div 4$ 的情形类似，我们也可以通过作出一个合理的初步猜测，并逐步修正，来做多项式除法。再看这个多项式除法：

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}.$$

在这里，我们其实是在寻找一个第三个多项式$Q(x)$，使得

$$x^2+3x+2=Q(x)(x+1).$$

由于上式左边的被除式中有一个x^2 项，我们观察到$Q(x)$ 必定含有一个x 项。否则，$Q(x)$ 与$(x+1)$ 相乘就不可能产生x^2 项。因此，作为第一步猜测，我们先考虑多项式$Q(x)=x$，看看会发生什么。如果计算$x(x+1)$，就会发现等式右边变成了x^2+x，这显然并不相等：

$$x^2+3x+2\neq x^2+x.$$

这与前一个例子中我们注意到$60\neq 40$ 是完全类似的。在那个例子中，我们通过$60-40=20$ 得到了余数20。在这里，我们也可以把"余数"看作另一个多项式$R(x)$，使得：

$$x^2+3x+2=x(x+1)+R(x).$$

和刚才一样，我们可以通过做减法来求出$R(x)$ 的值。只不过这次需要做的是多项式减法，而不是普通整数减法：

$$R(x)=x^2+3x+2-(x^2+x)=2x+2.$$

于是我们也可以把这件事写成：

$$x^2+3x+2=x(x+1)+2x+2.$$

现在我们把注意力转向多项式$R_1(x) = 2x + 2$。我们希望像刚才把20 写成$5 \cdot 4$ 一样，把这个“余式”写成某个东西与$x + 1$ 的乘积。因此，我们去除$2x + 2$ 以$x + 1$，看看$x + 1$ 还能再装进整个多项式多少次。这个除法是：

$$2x + 2 = 2(x + 1), \quad \text{因此} \quad \frac{2x + 2}{x + 1} = 2.$$

由此我们知道，余式多项式$R(x) = 2x + 2$ 也可以等价地表示成$2(x + 1)$。把所有结果合起来，就有：

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x(x + 1) + 2(x + 1) \\ &= (x + 2)(x + 1). \end{aligned}$$

2.2 带余式的除法

现在考虑把整数25 除以4。在这种情况下，我们知道答案是6.25。为什么？因为$25 = 6 \cdot 4 + 1$，而当我们把这个等式两边都除以4 时，就得到：

$$\frac{25}{4} = \frac{6 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 0.25 = 6.25.$$

这里，我们会说：“4 装进25 里6 次，余1。” 这个余数1 再除以4，就给出了小数部分0.25。

同样地，多项式除法也并不总是恰好除尽，因此有时也会出现类似刚才那个0.25 的“余式项”。在这种情况下，我们必须再把这个余式除以除式，这样就得到一个多项式分式。重要的内容总结如下。

带余式的多项式除法

给定一对多项式$P(x)$ 和$D(x)$，如果$D(x)$ 非零，并且存在多项式$Q(x)$ 和$R(x)$ 使得

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x),$$

那么我们就说$D(x)$ 带余式地除 $P(x)$。我们要求$R(x)$ 的**次数小于** $D(x)$ 的次数。这个额外出现的较小多项式$R(x)$ 就称为余式。

当出现余式时，我们就把整个除法写成

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\Theta$$

例如，考虑多项式除法：

$$\frac{2x^2 - 1}{x + 2}.$$

我们最终是在寻找多项式$Q(x)$ 和$R(x)$，使得

$$2x^2 - 1 = Q(x)(x + 2) + R(x), \qquad \deg(R) < \deg(x + 2) = 1.$$

首先注意，由于$\deg(R) < 1$，这意味着我们预期$R(x)$ 只能是一个常数项。

现在，为了计算这个多项式除法，我们先通过一个聪明的猜测来估计商$Q(x)$ 的值，也就是先猜一个多项式$Q_1(x)$。构造$Q_1(x)$ 的方式，是先判断它应当有怎样的次数，然后再在此基础上不断修正。我们先提醒自己，我们正在寻找一个多项式$Q_1(x)$，使得：

$$2x^2 - 1 = Q_1(x)(x+2).$$

若要让这个等式成立，那么$Q_1(x)$ 的首项必须和x 相乘，从而产生左边被除式中的首项$2x^2$。因此，$Q_1(x)$ 必须含有项$2x$。不过，这个第一步猜测往往不会完全正确，也就是说，通常会有某个"余式项"，记作$R_1(x)$，使得：

$$2x^2 - 1 = 2x(x+2) + R_1(x).$$

为了求出$R_1(x)$ 的具体形式，我们从$2x^2 - 1$ 中减去$2x(x+2)$，看还剩下什么：

$$R_1(x) = (2x^2 - 1) - 2x(x+2) = 2x^2 - 1 - 2x^2 - 4x = -4x - 1.$$

等价地，我们也可以写成：

$$2x^2 - 1 = 2x(x+2) - 4x - 1\Theta$$

现在我们来处理多项式$R_1(x) = -4x - 1$。我们希望像刚才在第2.1 节中把20 写成$5 \cdot 4$ 一样，把这个"余式项"写成某个东西与$x+2$ 的乘积。因此，我们去除$R_1(x)$ 以$x+2$，看看$x+2$ 还能再装进整体多项式$P(x)$ 多少次。这个除法是：

$$-4x - 1 = Q_2(x)(x+2) + R_2(x).$$

如果R_2 的次数小于多项式$x+2$ 的次数，那么要使这个等式成立，Q_2 的首项必定是-4。于是，我们先假设$Q_2 = -4$，再反推R_2 的值：

$$-4x - 1 = -4(x+2) + R_2(x) \quad \Rightarrow \quad R_2 = -4x - 1 - (-4)(x+2) = -4x - 1 + 4x + 8 = 7.$$

因此，$R_2(x)$ 就是常数项7，它是一个次数低于除式$x+2$ 的多项式。换句话说，R_2 比除式$x+2$"更小"（就像前面例子中余数1 比4 更小一样），因此我们在这里停止。把一切合在一起，就得到：

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= Q_1(x)(x+2) + R_1(x) \\ &= (2x)(x+2) + (-4x-1) \\ &= (2x)(x+2) + (-4)(x+2) + 7 \\ &= (2x-4)(x+2) + 7. \end{aligned}$$

这正是形如$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$ 的表达式，其中这里：

- 被除式$P(x) = 2x^2 - 1$，
- 除式$D(x) = x + 2$，
- 商是$Q(x) = 2x - 4$（它也等于我们两次猜测$Q_1 + Q_2$ 的和），
- 余式是$R(x) = 7$（它也等于我们最后得到的余式R_2）。

多项式除法的最终结果可以重新写成：

$$\frac{2x^2 - 1}{x+2} = 2x - 4 + \frac{7}{x+2}.$$

在前面的例子中，我们知道当得到余式$R_2 = 7$ 时就该停止。为什么？因为这个余式的次数严格小于除式$x + 2$ 的次数。这是一条非常重要的规则，值得再次强调。

余式规则

当用$D(x)$ 去除$P(x)$ 时，余式$R(x)$ 必须满足

$$\deg(R) < \deg(D).$$

如果余式的次数至少和除式一样高，那么我们就还可以继续除下去。

3 多项式长除法算法

3.1 整数的长除法

多项式长除法是通常整数长除法算法的一种改编。因此，我们先简要回顾一下整数长除法。作为例子，我们计算$377 \div 13$，也就是$13\overline{)377}$

$$
\begin{array}{rccc} & 0 & & \\ \cline{2-4} 13\,) & 3 & 7 & 7 \\ & 0 & & \\ \cline{2-2} \end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{rccc} & 0 & & \\ \cline{2-4} 13\,) & 3 & 7 & 7 \\ & 0 & \downarrow & \\ \cline{2-3} & 3 & 7 & \end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{rccc} & 0 & 2 & \\ \cline{2-4} 13\,) & 3 & 7 & 7 \\ & 0 & & \\ \cline{2-3} & 3 & 7 & \\ & 2 & 6 & \end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{rccc} & 0 & 2 & \\ \cline{2-4} 13\,) & 3 & 7 & 7 \\ & 0 & & \downarrow \\ \cline{2-3} & 3 & 7 & \downarrow \\ - & 2 & 6 & \downarrow \\ \cline{2-3} & 1 & 1 & 7 \end{array}
\xrightarrow{(4)}
\begin{array}{rccc} & 0 & 2 & 9 \\ \cline{2-4} 13\,) & 3 & 7 & 7 \\ & 0 & & \downarrow \\ \cline{2-3} & 3 & 7 & \downarrow \\ - & 2 & 6 & \downarrow \\ \cline{2-4} & 1 & 1 & 7 \\ & 1 & 1 & 7 \\ \cline{2-4} & & & 0 \end{array}
$$

(1) 13 不能整除3（也就是整除0 次），所以我们在百位上写零，并计算$3 - 0$。然后把十位上的7 放下来，组成37。
(2) 13 能整除37 两次，也就是$13 \times 2 = 26$，所以我们在十位上写2，并把26 写在37 的下面。
(3) 做减法：$37 - 26 = 11$，再把个位上的7 放下来，得到117。
(4) 13 能整除117 九次，也就是$13 \times 9 = 117$。因此，在最上面的个位位置写9，这样我们就完成了。

练习2

利用长除法完成下列计算。

1. $514 \div 12$
2. $6230 \div 15$
3. $1234 \div 3$
4. $14302 \div 11$

3.2 多项式长除法

多项式除法和整数除法的思想相同，只不过现在"更小"意味着**次数更低**。如果我们想用一个多项式$D(x)$ 去除另一个多项式$P(x)$，那么我们的任务实际上是写出

$$P(x) = Q(x)\,D(x) + R(x),$$

其中$Q(x)$ 是商，而$R(x)$ 是余式，并且它的次数严格低于$D(x)$ 的次数。多项式长除法算法本质上就是一种寻找$Q(x)$ 的方法：它通过依次得到$Q_1(x), Q_2(x)$ 等，就像我们在第2 节中做的那样。在每一步里，我们都发现自己对于正确商的“猜测”并不完全正确，因为总会留下一个余式项。于是，我们就拿这个余式继续去除$D(x)$，不断重复，直到余式的次数低到再也不能除为止。整个过程看起来大致如下：

$$P(x) \;=\; Q_1(x)D(x) \;+\; \underbrace{R_1(x)}$$

$$R_1(x) \;=\; Q_2(x)D(x) \;+\; \underbrace{R_2(x)}$$

$$R_2(x) \;=\; Q_3(x)D(x) \;+\; \underbrace{R_3(x)}$$

$$\vdots$$

这个过程会产生次数越来越低的余式，因此在有限步之后一定会终止。[1] 最终的商$Q(x)$ 可以通过把整个过程中出现的所有商项收集起来得到，而最后那个次数已经低于$D(x)$ 的余式项，就是最终余式$R(x)$。用符号表示：

$$\begin{aligned}
P(x) &= Q_1(x)D(x) + R_1(x) \\
&= Q_1(x)D(x) + \big(Q_2(x)D(x) + R_2(x)\big) \\
&= Q_1(x)D(x) + \big(Q_2(x)D(x) + (Q_3(x)D(x) + R_3(x))\big) \\
&\vdots \text{(有限步 } m\text{)} \\
&= Q_1(x)D(x) + Q_2(x)D(x) + \cdots + Q_m(x)D(x) + R_m(x) \\
&= \underbrace{\Big(Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_m(x)\Big)}_{Q(x)} \, D(x) \;+\; \underbrace{R_m(x)}_{R(x)}.
\end{aligned}$$

所有这些内容可以总结如下。

多项式长除法（算法）

要用$D(x)$ 去除$P(x)$：

1. 先把两个多项式都写成**标准形式**（按幂次递减）。
2. 用$P(x)$ 的**首项**去除$D(x)$ 的**首项**，得到商$Q(x)$ 的下一项Q_i。
3. 用这个新得到的项去乘$D(x)$，再从$P(x)$ 中减去。
4. 对新的多项式重复以上过程，直到余式的次数低于除式的次数为止。

多项式长除法算法其实只是把上一节中不断求出Q 和R 的过程，以一种整齐的视觉方式排列出来。各个Q 项是通过“用前一个余式的首项去除除式$D(x)$ 的首项”逐步得到的。得到新的Q 之后，

[1]事实上，这个过程最多只需要$\deg(P) - \deg(D) + 1$ 步。

再把它乘以$D(x)$，从而求出下一个余式R。不断重复这一过程（非常类似于整数长除法），就会一步一步构造出最终的商Q。

$$
\begin{array}{rlllll}
 & Q_1(x) & + Q_2(x) + & \cdots & + Q_m(x) \\ \cline{2-5}
D(x) & \big) & \longleftarrow P(x) \longrightarrow & & \\
- & Q_1(x)D(x) & & & \\ \cline{2-3}
 & R_1(x) & & & \\
 - & Q_2(x)D(x) & & & \\ \cline{2-3}
 & & R_2(x) & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & R_{m-1}(x) \\
 & & & - & Q_m(x)D(x) \\ \cline{5-5}
 & & & & R_m(x)
\end{array}
$$

3.3 例题详解

现在我们将一步一步地详细演示长除法算法。在第2 节中，我们已经见过两个多项式除法的例子，即

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1} = x+2 \quad \text{和} \quad \frac{2x^2-1}{x+2} = 2x-4+\frac{7}{x+2}.$$

首先，我们将演示如何利用多项式长除法算法推导出这些结果。然后，我们再看一个新的例子。

例1

我们来计算除法$\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$，它等价地可以写成

$$x+1\overline{\big)x^2+3x+2}$$

在这里，被除式是多项式x^2+3x+2，除式是多项式$x+1$。我们首先识别两个多项式的首项，然后做除法。在这个例子里，被除式的首项是x^2，除式的首项是x。于是我们做除法$x^2 \div x = x$，并把结果写在上方的答案行中：

$$
\begin{array}{r|lll}
 & x & & \\ \hline
x+1 & x^2 & +3x & +2
\end{array}
$$

接着，我们把整个除式$x+1$ 乘以这个x，并把结果写在x^2+3x 的下面：

$$
\begin{array}{r|lll}
 & x & & \\ \hline
x+1 & x^2 & +3x & +2 \\
 & x^2 & +x &
\end{array}
$$

从这里开始，我们做如下步骤：

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & & \\ \cline{2-4}
x+1\big) & x^2 & +3x & +2 \\
 & x^2 & +x & \\ \cline{2-3}
\end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{rrlll}
 & & x & & \\ \cline{3-5}
x+1\big) & & x^2 & +3x & +2 \\
 & - & x^2 & +x & \downarrow \\ \cline{3-4}
 & & & 2x & +2
\end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{rlll}
 & x & +2 & \\ \cline{2-4}
x+1\big) & x^2 & +3x & +2 \\
 & x^2 & +x & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & +2 \\
 & & 2x & +2
\end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{rrlll}
 & & x & +2 & \\ \cline{3-5}
x+1\big) & & x^2 & +3x & +2 \\
 & & x^2 & +x & \\ \cline{2-4}
 & & & 2x & +2 \\
 & - & & 2x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

(1) 我们做减法$(x^2+3x+2)-(x^2+x)=2x+2$。这一步消去了除法中最高次的x^2 项，留下一个更简单的多项式$2x+2$。这里我们把常数项+2 放下来并并入答案中，符号$\downarrow$ 表示常数项被“放下来了”。

(2) 我们再次用除式$x+1$ 的首项去做除法。这一次，我们算的是$2x \div x = 2$。把+2 写在最上面的答案行里，然后用它去乘整个多项式$x+1$。于是得到：$2(x+1)=2x+2$，并把它写在最下面那一行。

(3) 我们把现有的两行相减：$(2x+2)-(2x+2)=0$。减法结果是零，因此我们完成了。

最后，读取数组最上方答案行中的多项式，就得到：

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2.$$

我们可以通过把商与除式重新相乘来检验答案：

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2,$$

因此我们的解答是正确的。

例2

我们来计算除法$\dfrac{2x^2-1}{x+2}$，写成长除法形式就是

$$x+2\big)\overline{2x^2+0x-1}$$

这里唯一额外要做的一步，是把被除式写成标准形式$2x^2+0x-1$，这样每一个x 的幂次都有自己的“列”。接下来，我们和前面一样，先识别被除式与除式的首项。被除式从项$2x^2$ 开始，而除式从项x 开始。因此，计算$2x^2 \div x = 2x$，并把$2x$ 写到上方的答案行中：

$$
\begin{array}{rlll}
 & 2x & & \\ \cline{2-4}
x+2\big) & 2x^2 & +0x & -1
\end{array}
$$

接着，我们用$2x$ 去乘整个除式：

$$2x(x+2)=2x^2+4x.$$

把它写到对应的列下方：

$$
\begin{array}{rlll}
 & 2x & & \\ \cline{2-4}
x+2\big) & 2x^2 & +0x & -1 \\
 & 2x^2 & +4x &
\end{array}
$$

从这里开始，我们重复与例1 相同的过程：做减法求出新的余式，把下一项放下来，然后继续重复。完成后的过程如下。

$$
\begin{array}{rllll}
 & & 2x & & \\
x+2\,\big) & & \overline{2x^2} & \overline{+0x} & \overline{-1} \\
 & & \underline{2x^2} & \underline{+4x} &
\end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{rllll}
 & & 2x & & \\
x+2\,\big) & & \overline{2x^2} & \overline{+0x} & \overline{-1} \\
 & - & \underline{2x^2} & \underline{+4x} & \downarrow \\
 & & & -4x & -1
\end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{rllll}
 & & 2x & -4 & \\
x+2\,\big) & & \overline{2x^2} & \overline{+0x} & \overline{-1} \\
 & & \underline{2x^2} & \underline{+4x} & \\
 & & & -4x & -1 \\
 & & & -4x & -8
\end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{rllll}
 & & 2x & -4 & \\
x+2\,\big) & & \overline{2x^2} & \overline{+0x} & \overline{-1} \\
 & & \underline{2x^2} & \underline{+4x} & \\
 & & & -4x & -1 \\
 & - & & \underline{-4x} & \underline{-8} \\
 & & & & 7
\end{array}
$$

(1) 我们把前两行相减：$(2x^2+0x-1)-(2x^2+4x)=-4x-1$，从而得到新的余式。这里的$\downarrow$ 只是提醒我们常数项-1 被直接带到了下一行。

(2) 观察新余式的首项，并把它除以除式的首项。这里我们做的是$(-4x)\div x=-4$，把结果-4 写在上方答案行中。然后用这个结果去乘整个除式：$-4(x+2)=-4x-8$，再把它写在下方。

(3) 再次做减法：$(-4x-1)-(-4x-8)=7$。由于7 是一个0 次多项式，而除式$x+2$ 是一个1 次多项式，因此我们到此为止。

按照算法，商是$2x-4$，余式是7：

$$2x^2-1=(2x-4)(x+2)+7, \qquad \text{等价地} \qquad \frac{2x^2-1}{x+2}=2x-4+\frac{7}{x+2}.$$

例3

我们来计算除法$\dfrac{x^2+2x+4}{x-1}$，写成长除法形式就是

$$x-1\,\big)\overline{\,x^2+2x+4\,}$$

这里，被除式是x^2+2x+4，除式是$x-1$。我们仍然从同样的地方开始：比较首项。由于$x^2\div x=x$，所以先在答案行里写下x：

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & & \\
x-1\,\big) & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4}
\end{array}
$$

然后，我们用x 去乘除式：

$$x(x-1)=x^2-x,$$

并把它写到前两列下面：

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & & \\
x-1\,\big) & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4} \\
 & x^2 & -x &
\end{array}
$$

现在我们做减法，把常数项放下来，然后再重复同样的过程：

$$
\begin{array}{rllll}
 & & x & & \\
x-1\,\big) & & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4} \\
 & & \underline{x^2} & \underline{-x} &
\end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{rllll}
 & & x & & \\
x-1\,\big) & & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4} \\
 & - & \underline{x^2} & \underline{-x} & \downarrow \\
 & & & 3x & +4
\end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{rllll}
 & & x & +3 & \\
x-1\,\big) & & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4} \\
 & & \underline{x^2} & \underline{-x} & \\
 & & & 3x & +4 \\
 & & & 3x & -3
\end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{rllll}
 & & x & +3 & \\
x-1\,\big) & & \overline{x^2} & \overline{+2x} & \overline{+4} \\
 & & \underline{x^2} & \underline{-x} & \\
 & & & 3x & +4 \\
 & - & & \underline{3x} & \underline{-3} \\
 & & & & 7
\end{array}
$$

(1) 做减法：$(x^2+2x+4)-(x^2-x)=3x+4$。符号$_\downarrow$ 表示常数项+4 被带到了新的这一行。

(2) 再次对首项做除法：这里新余式$3x+4$ 的首项是$3x$，所以我们算$(3x)\div x=3$。把答案+3 写在最上方一行，然后用它去乘整个除式$x-1$：$3(x-1)=3x-3$，并把结果写在下方。

(3) 接着再减一次：$(3x+4)-(3x-3)=7$。由于7 的次数是0，而除式$x-1$ 的次数是1，所以不能再继续除了，于是到此停止。

按照算法，商是$x+3$，余式是7：

$$x^2+2x+4=(x+3)(x-1)+7, \qquad \text{等价地} \qquad \frac{x^2+2x+4}{x-1}=x+3+\frac{7}{x-1}.$$

我们总可以通过把各项重新乘开来检验答案：$(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$，再加上7 就得到x^2+2x+4。

练习3

利用长除法算法计算下列各式。把答案写成$\dfrac{P(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$ 的形式。

1. $\dfrac{4x^2-3}{x+6}$
2. $\dfrac{2x^3-3x}{x+3}$
3. $\dfrac{2x^4-3x^2-x}{x+2}$
4. $\dfrac{x^3-3x^2-x}{x+1}$

练习答案

练习1

1. $\dfrac{x^5}{x}=x^4$。
2. $\dfrac{x^3+x}{x}=x^2+1$。
3. $\dfrac{x^3+2x^2}{x}=x^2+2x$。
4. $\dfrac{7x^3+4x^2}{x^2}=7x+4$。

练习2

1.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\;\;\;4\;\;2 \\ \hline 1\;\;2 & 5\;\;1\;\;4 \\ & 4\;\;8 \\ \hline & \;\;\;\;\;3\;\;4 \\ & \;\;\;\;\;2\;\;4 \\ \hline & \;\;\;\;\;1\;\;0 \end{array}$$

所以$514 \div 12 = 42$ 余10，也就是

$$514 \div 12 = 42 + \frac{10}{12} = 42 + \frac{5}{6}.$$

2.

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & 4 & 1 & 5 \\ \cline{3-6}
1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 0 \\
 & & 6 & 0 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 3 & \\
 & & & 1 & 5 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 8 & 0 \\
 & & & & 7 & 5 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 5
\end{array}
$$

所以$6230 \div 15 = 415$ 余5，也就是

$$6230 \div 15 = 415 + \frac{5}{15} = 415 + \frac{1}{3}.$$

3.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & 4 & 1 & 1 \\ \cline{2-5}
3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & 1 & 2 & & \\ \cline{2-3}
 & & & 3 & \\
 & & & 3 & \\ \cline{4-4}
 & & & & 4 \\
 & & & & 3 \\ \cline{5-5}
 & & & & 1
\end{array}
$$

所以$1234 \div 3 = 411$ 余1，也就是

$$1234 \div 3 = 411 + \frac{1}{3}.$$

4.

$$
\begin{array}{cc|ccccc}
 & & & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \cline{3-7}
1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\
 & & 1 & 1 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 & 3 & & \\
 & & & 3 & 3 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & 0 & \\ \cline{6-6}
 & & & & & & 2
\end{array}
$$

所以$14302 \div 11 = 1300$ 余2，也就是

$$14302 \div 11 = 1300 + \frac{2}{11}.$$

练习3

1.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 4x & -24 & \\
\cline{2-4}
x+6 \,\big) & 4x^2 & +0x & -3 \\
- & 4x^2 & +24x & \\
\cline{2-3}
 & & -24x & -3 \\
- & & -24x & -144 \\
\cline{3-4}
 & & & 141
\end{array}
$$

因此

$$\frac{4x^2-3}{x+6} = 4x - 24 + \frac{141}{x+6}.$$

2.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 & -6x & +15 & \\
\cline{2-5}
x+3 \,\big) & 2x^3 & +0x^2 & -3x & +0 \\
- & 2x^3 & +6x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -6x^2 & -3x & \\
- & & -6x^2 & -18x & \\
\cline{3-4}
 & & & 15x & +0 \\
- & & & 15x & +45 \\
\cline{4-5}
 & & & & -45
\end{array}
$$

因此

$$\frac{2x^3-3x}{x+3} = 2x^2 - 6x + 15 - \frac{45}{x+3}.$$

3.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^3 & -4x^2 & +5x & -11 & \\
\cline{2-6}
x+2 \,\big) & 2x^4 & +0x^3 & -3x^2 & -x & +0 \\
- & 2x^4 & +4x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -4x^3 & -3x^2 & & \\
- & & -4x^3 & -8x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 5x^2 & -x & \\
- & & & 5x^2 & +10x & \\
\cline{4-5}
 & & & & -11x & \\
- & & & & -11x & -22 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 22
\end{array}
$$

因此

$$\frac{2x^4-3x^2-x}{x+2} = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 11 + \frac{22}{x+2}.$$

4.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -4x & +3 & \\
\cline{2-5}
x+1 \,\big) & x^3 & -3x^2 & -x & +0 \\
- & x^3 & +x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -4x^2 & -x & \\
- & & -4x^2 & -4x & \\
\cline{3-4}
 & & & 3x & +0 \\
- & & & 3x & +3 \\
\cline{4-5}
 & & & & -3
\end{array}
$$

因此

$$\frac{x^3-3x^2-x}{x+1}=x^2-4x+3-\frac{3}{x+1}.$$