MAT140 — 第8講ハンドアウト
多項式の除法

Lecture 7 では，多項式の計算の大部分を終えました。つまり，多項式の加法，減法，乗法を学びました。この講義では，その全体像を完成させるために，**一つの多項式を別の多項式で割る方法** を学びます。

割り算を考えるうえで役に立つ見方の一つは，割り算がしばしば*アルゴリズム* であるということです。つまり，決まった手順に従えば，正しく手順を実行したかぎり，毎回正しい答えが得られるということです。多項式の筆算は，まさにこの種の過程です。したがって，少なくとも学生は，正しい結果を得るためにこの*アルゴリズム*を適用する方法を理解できるべきです。

それに加えて，理想的には学生は，割り算の主要な考え方も理解できるべきです。何かを何かで割るということは，掛け算を「逆向きに」たどることであり，「これはあれの中に何回入るか」と問うことです。この種の問題は，少しずつよりよい見当をつけていくことで解け，その過程が最終的に正しい答えへ導きます。多項式の割り算の中心にあるのは割り算*そのもの* であり，したがって学生は，*なぜ* この*アルゴリズム*がうまくいくのかも理解すべきです。

今日は次のことを行います：

1. 多項式を単項式（つまり一つの項しか持たない多項式）で割る最も簡単な場合を復習する。
2. 割り算の一般的な考え方を復習し，その観察を使って，多項式を第一原理から割る。
3. 多項式の割り算のための筆算*アルゴリズム* を提示する。これは本質的には，多項式の割り算を見やすく整理した方法である。

1　多項式を単項式で割る

まず，最も簡単な場合である，多項式を単項式で割る場合から始めます。単項式とは一つの項しか持たない多項式です。したがって，多項式をそれで割るには，分数の基本法則を使って，割り算を和の集まりに分ければよいです。

単項式で割る

$m(x)$ を単項式，$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ を多項式とする。このとき，

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{m(x)} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{m(x)} \\ &= \frac{a_n x^n}{m(x)} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{m(x)} + \cdots + \frac{a_1 x}{m(x)} + \frac{a_0}{m(x)}.\end{aligned}$$

単項式はつねにbx^m の形なので，多項式を単項式で割る計算は，前回の講義の指数法則，特に

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

（ただしm, n は正，$x \neq 0$）を使えば，各項ごとに計算できます。

例として，多項式$4x^2+2x$を単項式xで割るとします。上の形に従うと，

$$\frac{4x^2+2x}{x}=\frac{4x^2}{x}+\frac{2x}{x}=4x+2.$$

もう少し複雑な例として，多項式$4x^4+3x^2+x$を単項式$2x^2$で割ってみます。やはり各項ごとに割り算を行えばよいです：

$$\frac{4x^4+3x^2+x}{2x^2}=\frac{4x^4}{2x^2}+\frac{3x^2}{2x^2}+\frac{x}{2x^2}=2x^2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}.$$

Exercise 1

割り算を行い，簡単にしなさい。

1. $\frac{x^5}{x}$
2. $\frac{x^3+x}{x}$
3. $\frac{x^3+2x^2}{x}$
4. $\frac{7x^3+4x^2}{x^2}$

2　一般の多項式の割り算

2.1　余りなく割り切れる場合

通常の割り算は，掛け算の逆演算として定義されます。たとえば$8\div 2$と書くとき，私たちは2を掛けると8になる第三の数を探しているので，

$$8\div 2=4 \quad \text{なぜなら} \quad 4\times 2=8.$$

前回の講義では，多項式どうしを掛けると，いつでも第三の，より大きな多項式が得られることを見ました。たとえば，多項式$(x+1)$と$(x+2)$を掛けると

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2.$$

多項式の割り算も通常の割り算と同様に定義されます。つまり，多項式の掛け算の逆演算 です。したがって，少なくとも概念的には，

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2 \quad \text{なぜなら} \quad x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

のように書けます。

Section 3 では，多項式の「割り算アルゴリズム」を詳しく説明します。しかしその前に，多項式の割り算の性質をいくつか見ておきます。

多項式が余りなく割り切れること

多項式$P(x)$ と$D(x)$ が与えられたとき，$D(x)$ が0 でなく，ある第三の多項式$Q(x)$ が存在して

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x)$$

となるなら，$D(x)$ は$P(x)$ を余りなく割り切る という。このとき，$P(x)$ を**被除式**，$D(x)$ を**除式**，$Q(x)$ を**商** と呼ぶ。

割り算

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = x + 2$$

においては，除式は多項式$x + 1$，被除式は多項式$x^2 + 3x + 2$，商は$x + 2$ です。

多項式の筆算に進む前に，通常の割り算について少し思い出しておくと役に立ちます。大きい数をそれより小さい数で割ることを考えましょう。

たとえば，$60 \div 4$ を考えます。これを行う一つの方法は，いくつかの見当を立て，それを順に改善していくことです。たとえば「4 は6 に何回入るか」と考えると，答えは1 回です。したがって，4 は60 に少なくとも10 回は入るはずです。これはよい最初の見当ですが，もちろん4 は60 に10 回より多く入ります。なぜなら4×10 は40 にすぎないからです。ここで「余り」を，r と書くことにすると：

$$60 = 10 \cdot 4 + r \quad \Rightarrow \quad r = 20.$$

あとは，4 が20 に何回入るかを調べればよいです。実際，$5 \cdot 4 = 20$ であり，これは$5 \cdot 4 = r$ と書くのと同じです。これを使うと，

$$60 = 10 \cdot 4 + r = 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = (10 + 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4.$$

もし$60 = 15 \times 4$ なら，同じこととして$60 \div 4$ は15 です。

$60 \div 4$ の場合と同じ考え方で，多項式も妥当な最初の見当を立て，それを順に改善していくことで割ることができます。もう一度，多項式の割り算

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

を考えます。ここでは，第三の多項式$Q(x)$ を見つけて

$$x^2 + 3x + 2 = Q(x)(x + 1)$$

としたいわけです。左辺の被除式にはx^2 の項があるので，$Q(x)$ には必ず x の項が含まれていなければなりません。そうでなければ，$Q(x)$ と$(x + 1)$ を掛けてもx^2 の項は作れないからです。そこで，最初の見当として$Q(x) = x$ を試します。$x(x + 1)$ を計算すると右辺は$x^2 + x$ になり，これはobviously 等しくありません：

$$x^2 + 3x + 2 \neq x^2 + x.$$

これは，先ほどの例で$60 \neq 40$ だったのとまったく同じです。そのときは$60 - 40 = 20$ と引いて余り20 を求めました。ここでも同じように，別の多項式$R(x)$ を「余り」として

$$x^2 + 3x + 2 = x(x+1) + R(x)$$

と考えます。そして，$R(x)$ の形を求めるために引き算をします。ただし今度は，通常の引き算ではなく多項式の引き算 を行います：

$$R(x) = x^2 + 3x + 2 - (x^2 + x) = 2x + 2.$$

したがって，これは

$$x^2 + 3x + 2 = x(x+1) + 2x + 2$$

とも書けます。次に，余り多項式$R_1(x) = 2x + 2$ に注目します。これを$(x+1)$ を使った積に書き直したいのです（ちょうど先ほど$20 = 5 \cdot 4$ と書いたのと同じように）。実際，

$$2x + 2 = 2(x+1), \quad \text{したがって} \quad \frac{2x+2}{x+1} = 2.$$

これにより，余り多項式$R(x) = 2x + 2$ は$2(x+1)$ と等しく表せるとわかります。すべてをまとめると，

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x(x+1) + 2(x+1) \\ &= (x+2)(x+1). \end{aligned}$$

2.2　余りのある割り算

今度は，25 を4 で割ることを考えましょう。この場合，答えは6.25 です。なぜでしょうか。$25 = 6 \cdot 4 + 1$ であり，この式の両辺を4 で割ると

$$\frac{25}{4} = \frac{6 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 0.25 = 6.25.$$

となるからです。

ここでは「4 は25 に6 回入り，余りは1」と言います。この余り1 をさらに4 で割ると，小数表示0.25 が得られます。

同じように，多項式の割り算もいつもぴったり割り切れるわけではなく，先ほどの0.25 のような「余りの項」が現れることがあります。この場合には，その余りを除式で割り，多項式の分数 を得ます。重要な点を以下にまとめます。

余りのある多項式の割り算

多項式$P(x)$ と$D(x)$ が与えられたとき，$D(x)$ が0 でなく，ある多項式$Q(x)$ と$R(x)$ が存在して

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

となるなら，$D(x)$ は$P(x)$ を余りつきで割る という。このとき$R(x)$ は$D(x)$ **より次数が小さい** ことを要求する。この追加の，より小さい多項式$R(x)$ を余り と呼ぶ。

余りがある場合，割り算全体は

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

と表します。

例として，次の多項式の割り算を考えます：

$$\frac{2x^2 - 1}{x + 2}.$$

最終的には，多項式$Q(x)$ と$R(x)$ を見つけて

$$2x^2 - 1 = Q(x)(x + 2) + R(x), \qquad \deg(R) < \deg(x + 2) = 1$$

としたいわけです。まず$\deg(R) < 1$ なので，余り$R(x)$ は定数項だけになるはずだとわかります。

この割り算を行うために，まず商$Q(x)$ の値を，ある適当な多項式$Q_1(x)$ を賢く選ぶことで見当づけます。$Q_1(x)$ は，必要な次数を数えることで作り，あとでそこから改善していきます。私たちは

$$2x^2 - 1 = Q_1(x)(x + 2)$$

となるような多項式$Q_1(x)$ を探していることを思い出します。

この等式が成り立つためには，$Q_1(x)$ の最高次の項が$x + 2$ のx と掛かって，左辺の最高次項$2x^2$ を作らなければなりません。したがって，$Q_1(x)$ には必ず $2x$ の項が含まれます。そこで$Q_1(x) = 2x$ と仮定し，誤差としての「余り」$R_1(x)$ を考えます：

$$2x^2 - 1 = 2x(x + 2) + R_1(x).$$

$R_1(x)$ の正確な形を求めるために，$2x(x + 2)$ を$2x^2 - 1$ から引きます：

$$R_1(x) = (2x^2 - 1) - 2x(x + 2) = 2x^2 - 1 - 2x^2 - 4x = -4x - 1.$$

したがって，これは

$$2x^2 - 1 = 2x(x + 2) - 4x - 1.$$

とも書けます。次に，多項式$R_1(x) = -4x - 1$ に注目します。この「余り」を，$(x+2)$ を使った積に表したいのです。そこで，$R_1(x)$ を$x + 2$ で割って，$x + 2$ が全体の被除式$P(x)$ にさらに何回入るかを調べます。つまり

$$-4x - 1 = Q_2(x)(x + 2) + R_2(x).$$

もしR_2 の次数が$x + 2$ より小さいなら，この等式が成り立つためには，Q_2 の最高次項は-4 でなければなりません。したがって，$Q_2 = -4$ と仮定して，R_2 を逆算します：

$$-4x - 1 = -4(x + 2) + R_2(x) \quad \Rightarrow \quad R_2 = -4x - 1 - (-4)(x + 2) = -4x - 1 + 4x + 8 = 7.$$

したがって$R_2(x)$ は単なる定数7 であり，これは除式$x + 2$ の次数1 より小さい次数を持つ多項式です。言い換えれば，このR_2 は$x + 2$ より「小さい」ので（ちょうど先ほどの例で余り1 が4 よ

り小さかったのと同じ），ここで過程を止めます。これらをすべてまとめると：

$$\begin{aligned}
2x^2-1 &= Q_1(x)(x+2)+R_1(x)\\
&= (2x)(x+2)+(-4x-1)\\
&= (2x)(x+2)+(-4)(x+2)+7\\
&= (2x-4)(x+2)+7.
\end{aligned}$$

これは$P(x)=Q(x)D(x)+R(x)$ の形であり，この場合：

- 被除式は$P(x)=2x^2-1$，
- 除式は$D(x)=x+2$，
- 商は$Q(x)=2x-4$（これはQ_1+Q_2 にも等しい），
- 余りは$R(x)=7$（これは最後の余りR_2 に等しい）

です。この多項式の割り算の最終結果は，

$$\frac{2x^2-1}{x+2}=2x-4+\frac{7}{x+2}.$$

とまとめられます。

前の例では，余り$R_2=7$ に達したところで過程を止めました。なぜでしょうか。これは，その余りの次数が除式$x+2$ より真に小さいからです。これは強調しておく価値のある重要な規則です。

余りに関する規則

$P(x)$ を$D(x)$ で割るとき，余り$R(x)$ は

$$\deg(R)<\deg(D)$$

を満たさなければならない。もし余りの次数が除式の次数以上なら，さらに割り続けることができる。

3 多項式の筆算アルゴリズム

3.1 整数の筆算

多項式の筆算アルゴリズムは，整数の筆算と同じ考え方を移したものです。したがって，まずその過程を簡単に思い出します。例として$377\div 13$，すなわち$13\overline{)377}$ を計算します：

$$\begin{array}{r}
0\\
13\,\overline{)377}\\
\underline{0}
\end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{r}
0\\
13\,\overline{)377}\\
\underline{0}{\downarrow}\\
37
\end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{r}
02\\
13\,\overline{)377}\\
\underline{0}\\
37\\
26
\end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{r}
02\\
13\,\overline{)377}\\
\underline{0}{\downarrow}\\
37{\downarrow}\\
-\ \underline{26}{\downarrow}\\
117
\end{array}
\xrightarrow{(4)}
\begin{array}{r}
029\\
13\,\overline{)377}\\
\underline{0}{\downarrow}\\
37{\downarrow}\\
-\ \underline{26}{\downarrow}\\
117\\
\underline{117}\\
0
\end{array}$$

(1) 13 は3 に入らない（つまり0 回入る）ので，百の位に0 を書き，$3-0$ を引く。十の位の7 を下ろして37 を作る。
(2) 13 は37 に2 回入る。つまり$13 \times 2 = 26$ なので，十の位に2 を書き，37 の下に26 を書く。
(3) 引き算$37 - 26 = 11$ を行い，一の位の7 を下ろして117 を作る。
(4) 13 は117 に9 回入る。つまり$13 \times 9 = 117$ である。したがって，上の一の位に9 を書けば終わりである。

Exercise 2

筆算を使って次を計算しなさい。

1. $514 \div 12$
2. $6230 \div 15$
3. $1234 \div 3$
4. $14302 \div 11$

3.2 多項式の筆算

多項式の割り算も整数の割り算と同じ考え方であり，ただしここで「小さい」とは**次数が低い**ことを意味します。多項式$P(x)$ を別の多項式$D(x)$ で割りたいとき，私たちの仕事は実質的には

$$P(x) = Q(x)\,D(x) + R(x)$$

と書くことです。ここで$Q(x)$ は商，$R(x)$ は余りであり，その次数は$D(x)$ より真に小さくなければなりません。多項式の筆算アルゴリズムとは，Section 2 で行ったように，連続する見当$Q_1(x), Q_2(x)$ などを順に見つけていくことによって$Q(x)$ を求める方法です。毎回，商の正しい値についての「見当」は，余りが生じるので，それだけでは不十分でした。そこで，その余りを$D(x)$ で割り，さらに続けていき，最後には$D(x)$ でこれ以上割れないほど小さい余りに到達します。全体の流れはだいたい次のようになります：

$$P(x) = Q_1(x)D(x) + \underbrace{R_1(x)}$$
$$\downarrow$$
$$R_1(x) = Q_2(x)D(x) + \underbrace{R_2(x)}$$
$$\downarrow$$
$$R_2(x) = Q_3(x)D(x) + \underbrace{R_3(x)}$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$

この過程では，余りの次数がだんだん小さくなっていくので，有限回の手順で必ず止まります。[1] 最終的な商$Q(x)$ は，この過程で現れたすべてのQ を集めたものであり，最終的な余

[1]実際には，この過程は高々$\deg(P) - \deg(D) + 1$ 回で終わります。

り$R(x)$ は，最終的に$D(x)$ より次数の小さくなった余りそのものです。記号で書くと：

$$
\begin{aligned}
P(x) &= Q_1(x)D(x) + R_1(x) \\
&= Q_1(x)D(x) + \bigl(Q_2(x)D(x) + R_2(x)\bigr) \\
&= Q_1(x)D(x) + \bigl(Q_2(x)D(x) + (Q_3(x)D(x) + R_3(x))\bigr) \\
&\vdots \ (\text{有限回の手順 } m) \\
&= Q_1(x)D(x) + Q_2(x)D(x) + \cdots + Q_m(x)D(x) + R_m(x) \\
&= \underbrace{\Bigl(Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_m(x)\Bigr)}_{Q(x)} D(x) \ + \ \underbrace{R_m(x)}_{R(x)}.
\end{aligned}
$$

これらは次のようにまとめられます。

> **多項式の筆算（アルゴリズム）**
>
> $P(x)$ を$D(x)$ で割るには：
> 1. 両方の多項式を**標準形**（降べきの順）に並べる。
> 2. $P(x)$ の**最高次の項** を$D(x)$ の**最高次の項** で割って，商$Q(x)$ の次の項Q_i を得る。
> 3. $D(x)$ にその新しい項を掛けて，$P(x)$ から引く。
> 4. 余りの次数が除式より小さくなるまで，この操作を繰り返す。

多項式の筆算アルゴリズムは，前節で行ったQ とR の繰り返しの導出を，見やすく整理したものにすぎません。各Q の項は，一つ前の余りR の最高次の項を，除式$D(x)$ の最高次の項で割ることで，一つずつ得られます。そうして得たQ を$D(x)$ 全体に掛け，次の余りR を作ります。この過程を整数の筆算と非常によく似たやり方で繰り返すことで，最終的な商Q が徐々に組み立てられます。

$$
\begin{array}{r|l}
 & Q_1(x) + Q_2(x) + \quad \cdots \quad + Q_m(x) \\ \hline
D(x) & \quad\quad \longleftarrow P(x) \longrightarrow \\
- & Q_1(x)D(x) \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad R_1(x) \\
 & - \quad Q_2(x)D(x) \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad R_2(x) \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad \ddots \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad R_{m-1}(x) \\
 & \quad\quad\quad\quad - \quad Q_m(x)D(x) \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad R_m(x)
\end{array}
$$

3.3 例題

ここでは，筆算アルゴリズムを段階ごとに丁寧に確認します。Section 2 では，

$$
\frac{x^2+3x+2}{x+1} = x+2 \quad \text{および} \quad \frac{2x^2-1}{x+2} = 2x-4+\frac{7}{x+2}
$$

という二つの多項式の割り算を見ました。まず，これらの結果を多項式の筆算アルゴリズムでどのように導くかを示し，そのあとで新しい例を見ます。

Example 1

$\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$ を計算します。これは

$$x+1\overline{)x^2+3x+2}$$

と書けます。この場合，被除式は多項式x^2+3x+2，除式は多項式$x+1$ です。まず，被除式と除式の最高次の項を見ます。この場合，被除式の最高次の項はx^2，除式の最高次の項はx です。そこで$x^2 \div x = x$ を計算し，その答えを上の商の行に書きます：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \end{array}$$

次に，除式$x+1$ 全体にx を掛け，その答えをx^2+3x の下に書きます：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \\ & x^2 & +x & \end{array}$$

ここから，次の手順を行います：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \\ & x^2 & +x & \\ \hline \end{array}
\xrightarrow{(1)}
\begin{array}{rlll} & x & & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \\ - & x^2 & +x & \downarrow \\ \hline & & 2x & +2 \end{array}
\xrightarrow{(2)}
\begin{array}{rlll} & x & +2 & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \\ & x^2 & +x & \\ \hline & & 2x & +2 \\ & & 2x & +2 \end{array}
\xrightarrow{(3)}
\begin{array}{rlll} & x & +2 & \\ x+1) & \overline{x^2} & \overline{+3x} & \overline{+2} \\ & x^2 & +x & \\ \hline & & 2x & +2 \\ - & & 2x & +2 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

(1) $(x^2+3x+2)-(x^2+x)=2x+2$ を引きます。これで割り算からx^2 の項が消え，より簡単な多項式$2x+2$ が残ります。ここでは定数項+2 を下ろして次の行に含めています。記号$\downarrow$ は，定数項が下りてくることを示しています。

(2) 再び，除式$x+1$ の最高次の項を使って割り算を行います。この場合は$2x \div x = 2$ です。答えの行の上に+2 を書き，それを多項式$x+1$ 全体に掛けます。すると$2(x+1)=2x+2$ を得るので，それを下の行に書きます。

(3) 二つの行を引きます：$(2x+2)-(2x+2)=0$。引き算の結果が0 になったので，ここで終了です。

最後に，上の答えの行から多項式を読み取ると，

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2$$

が得られます。これが正しいかどうかは，除式を掛けて確かめられます：

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2,$$

したがって，答えは正しいです。

Example 2

$\dfrac{2x^2-1}{x+2}$ を計算します。これは

$$x+2\,\overline{\smash{)}\,2x^2+0x-1}$$

と書けます。ここで必要な追加の注意点は，被除式を$2x^2+0x-1$ という標準形で書き，x の各冪にそれぞれの「列」を与えることです。あとは先ほどと同様に，被除式と除式の最高次の項を見ます。被除式は$2x^2$ から始まり，除式はx から始まるので，$2x^2 \div x = 2x$ を計算し，$2x$ を上の答えの行に書きます：

$$\begin{array}{rlll} & 2x & & \\ \cline{2-4} x+2) & 2x^2 & +0x & -1 \end{array}$$

次に，除式全体に$2x$ を掛けます：

$$2x(x+2) = 2x^2+4x.$$

これを対応する列の下に書きます：

$$\begin{array}{rlll} & 2x & & \\ \cline{2-4} x+2) & 2x^2 & +0x & -1 \\ & 2x^2 & +4x & \end{array}$$

ここから先は，Example 1 と同じように，引き算をして次の余りを出し，次の項を下ろし，同じ過程を続けます。完成した計算は下の通りです。

$$\begin{array}{rlll} & 2x & & \\ \cline{2-4} x+2) & 2x^2 & +0x & -1 \\ & 2x^2 & +4x & \\ \cline{1-3} \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{rlll} & 2x & & \\ \cline{2-4} x+2 &)\,2x^2 & +0x & -1 \\ - & 2x^2 & +4x & \downarrow \\ \cline{2-3} & & -4x & -1 \end{array} \xrightarrow{(2)} \begin{array}{rlll} & 2x & -4 & \\ \cline{2-4} x+2) & 2x^2 & +0x & -1 \\ & 2x^2 & +4x & \\ \cline{1-3} & & -4x & -1 \\ & & -4x & -8 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{rlll} & 2x & -4 & \\ \cline{2-4} x+2) & 2x^2 & +0x & -1 \\ & 2x^2 & +4x & \\ \cline{1-3} & & -4x & -1 \\ - & & -4x & -8 \\ \cline{3-4} & & & 7 \end{array}$$

(1) 最初の二行を引きます：$(2x^2+0x-1)-(2x^2+4x) = -4x-1$。これが新しい余りです。$\downarrow$ は，定数項-1 がそのまま次の行に下りてくることを示しています。

(2) 新しくできた余りの最高次の項を見て，それを除式の最高次の項で割ります。ここでは$(-4x)\div x = -4$ です。したがって，答えの上の行に-4 を書き，それを除式全体に掛けます：$-4(x+2) = -4x-8$。その結果を下に書きます。

(3) 再び引き算を行います：$(-4x-1)-(-4x-8) = 7$。7 は次数0 の多項式であり，除式$x+2$ は次数1 なので，ここで終了です。

最終的に，上の行に書かれた$2x-4$ が商であり，この場合は余り7 もあります。これらをまとめると：

$$2x^2-1 = (2x-4)(x+2)+7, \qquad \text{同値に} \qquad \frac{2x^2-1}{x+2} = 2x-4+\frac{7}{x+2}.$$

Example 3

$\dfrac{x^2+2x+4}{x-1}$ を計算します。これは

$$x-1\,\overline{\smash{)}\,x^2+2x+4}$$

と書けます。ここで，被除式はx^2+2x+4，除式は$x-1$ です。最初は同じように，最高次の項を比較します。$x^2 \div x = x$ なので，まず上の答えの行にx を書きます：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \end{array}$$

次に，除式にx を掛けると

$$x(x-1) = x^2 - x$$

なので，これを最初の二列の下に書きます：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \\ & x^2 & -x & \end{array}$$

ここから，引き算を行い，定数項を下ろして，同じ手順を繰り返します：

$$\begin{array}{rlll} & x & & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \\ & x^2 & -x & \\ \cline{1-3} \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{rlll} & x & & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \\ - & x^2 & -x & \downarrow \\ \cline{2-3} & & 3x & +4 \end{array} \xrightarrow{(2)} \begin{array}{rlll} & x & +3 & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \\ & x^2 & -x & \\ \cline{2-3} & & 3x & +4 \\ & & 3x & -3 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{rlll} & x & +3 & \\ \cline{2-4} x-1\,\big) & x^2 & +2x & +4 \\ & x^2 & -x & \\ \cline{2-3} & & 3x & +4 \\ & - & 3x & -3 \\ \cline{3-4} & & & 7 \end{array}$$

(1) 引き算すると，$(x^2+2x+4)-(x^2-x) = 3x+4$ です。$\downarrow$ は，定数+4 が次の行に下りてくることを示しています。

(2) 再び最高次の項どうしで割ります。ここでは余り$3x+4$ の最高次の項は$3x$ なので，$(3x) \div x = 3$ を計算します。その答え+3 を上の行に書き，それを除式$x-1$ 全体に掛けます：$3(x-1) = 3x-3$。これを下に書きます。

(3) さらに引き算をすると，$(3x+4)-(3x-3) = 7$ です。7 は次数0，除式$x-1$ は次数1 なので，これ以上は進めません。

したがって，筆算アルゴリズムによれば，商は$x+3$，余りは7 です：

$$x^2+2x+4 = (x+3)(x-1)+7, \qquad \text{同値に} \qquad \frac{x^2+2x+4}{x-1} = x+3+\frac{7}{x-1}.$$

もちろん，答えはいつでも掛け戻して確認できます：$(x+3)(x-1) = x^2+2x-3$ であり，そこに7 を足すとx^2+2x+4 になります。

Exercise 3

筆算アルゴリズムを使って，次を計算しなさい。答えは$\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ の形で書きなさい。

1. $\dfrac{4x^2-3}{x+6}$
2. $\dfrac{2x^3-3x}{x+3}$

3. $\dfrac{2x^4 - 3x^2 - x}{x+2}$

4. $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x}{x+1}$

Exercises の解答

Exercise 1

1. $\dfrac{x^5}{x} = x^4$。
2. $\dfrac{x^3 + x}{x} = x^2 + 1$。
3. $\dfrac{x^3 + 2x^2}{x} = x^2 + 2x$。
4. $\dfrac{7x^3 + 4x^2}{x^2} = 7x + 4$。

Exercise 2

1.

$$
\begin{array}{rr|rrr}
 & & & 4 & 2 \\ \cline{3-5}
1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\
 & & 4 & 8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 & 4 \\
 & & & 2 & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & 1 & 0
\end{array}
$$

したがって$514 \div 12 = 42$ 余り10，すなわち

$$514 \div 12 = 42 + \frac{10}{12} = 42 + \frac{5}{6}.$$

2.

$$
\begin{array}{rr|rrrr}
 & & & 4 & 1 & 5 \\ \cline{3-6}
1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 0 \\
 & & 6 & 0 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 3 & \\
 & & & 1 & 5 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 8 & 0 \\
 & & & & 7 & 5 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 5
\end{array}
$$

したがって$6230 \div 15 = 415$ 余り5，すなわち

$$6230 \div 15 = 415 + \frac{5}{15} = 415 + \frac{1}{3}.$$

3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 4 & 1 & 1 \\ \cline{2-5}
3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & 1 & 2 & & \\ \cline{2-3}
 & & & 3 & \\
 & & & 3 & \\ \cline{4-4}
 & & & & 4 \\
 & & & & 3 \\ \cline{5-5}
 & & & & 1
\end{array}
$$

したがって$1234 \div 3 = 411$ 余り1，すなわち

$$1234 \div 3 = 411 + \frac{1}{3}.$$

4.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \cline{2-6}
1\ \ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\
 & 1 & 1 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3 & 3 & & \\
 & & 3 & 3 & & \\ \cline{3-4}
 & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & \\ \cline{5-5}
 & & & & & 2
\end{array}
$$

したがって$14302 \div 11 = 1300$ 余り2，すなわち

$$14302 \div 11 = 1300 + \frac{2}{11}.$$

Exercise 3

1.

$$
\begin{array}{rr|lll}
 & & 4x & -24 & \\ \cline{3-5}
x+6 & & 4x^2 & +0x & -3 \\
 & - & 4x^2 & +24x & \\ \cline{3-4}
 & & & -24x & -3 \\
 & & - & -24x & -144 \\ \cline{4-5}
 & & & & 141
\end{array}
$$

よって

$$\frac{4x^2-3}{x+6} = 4x - 24 + \frac{141}{x+6}.$$

2.

$$
\begin{array}{rr|llll}
 & & 2x^2 & -6x & +15 & \\ \cline{3-6}
x+3 & & 2x^3 & +0x^2 & -3x & +0 \\
 & - & 2x^3 & +6x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x^2 & -3x & \\
 & & - & -6x^2 & -18x & \\ \cline{4-5}
 & & & & 15x & +0 \\
 & & & - & 15x & +45 \\ \cline{5-6}
 & & & & & -45
\end{array}
$$

よって

$$\frac{2x^3-3x}{x+3} = 2x^2-6x+15-\frac{45}{x+3}.$$

3.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2x^3 & -\,4x^2 & +\,5x & -\,11 & \\ \cline{3-7}
x+2 & \big) & 2x^4 & +\,0x^3 & -\,3x^2 & -\,x & +\,0 \\
 & - & 2x^4 & +\,4x^3 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,4x^3 & -\,3x^2 & & \\
 & & - & -\,4x^3 & -\,8x^2 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 5x^2 & -\,x & \\
 & & & - & 5x^2 & +\,10x & \\ \cline{5-6}
 & & & & & -\,11x & \\
 & & & & - & -\,11x & -\,22 \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 22
\end{array}
$$

よって

$$\frac{2x^4-3x^2-x}{x+2} = 2x^3-4x^2+5x-11+\frac{22}{x+2}.$$

4.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^2 & -\,4x & +\,3 & \\ \cline{3-6}
x+1 & \big) & x^3 & -\,3x^2 & -\,x & +\,0 \\
 & - & x^3 & +\,x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,4x^2 & -\,x & \\
 & & - & -\,4x^2 & -\,4x & \\ \cline{4-5}
 & & & & 3x & +\,0 \\
 & & & - & 3x & +\,3 \\ \cline{5-6}
 & & & & & -\,3
\end{array}
$$

よって

$$\frac{x^3-3x^2-x}{x+1} = x^2-4x+3-\frac{3}{x+1}.$$