MAT140 — 第9讲讲义
因式分解

在第8 讲中，我们学习了如何用一个多项式去除另一个多项式。这完成了一个重要观察：多项式与数有相似之处，因为它们可以像数字一样做加法、减法、乘法和除法。当然，其中确实有一些细微差别，但总体上，我们可以把多项式的集合理解为与整数集合$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ 有相似行为的对象。

在这一讲中，我们将开始讨论某种更像多项式"数论"的内容：**因式分解**。

理解因式分解的一个好方法，是把它看成**展开括号**的反向过程。例如，我们知道如何展开

$$(x-1)(x+1)(x-2) \quad \longrightarrow \quad x^3-2x^2-x+2.$$

而因式分解要求的正是反方向：

$$x^3-2x^2-x+2 \quad \longrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x-2).$$

正如整数可以分解成素因数一样，多项式也常常可以分解成若干更简单"构件"的乘积。

今天我们将会：

1. 学习如何通过提出**最大公单项式因子**来对多项式进行因式分解。
2. 学习如何分解形如x^2+bx+c 的**三项式**（以及含有两个变量的三项式）。
3. 学习如何**完全因式分解**，并学习当$a\neq 1$ 时，如何分解形如ax^2+bx+c 的三项式。

1 提取公因式

1.1 整数的最大公因数

回忆一下，整数的一个**因数**是能够整除它的较小整数。例如，数字8 的因数有$1,2,4,$ 和8，因为$1\times 8=2\times 4=8$。给定两个数，我们可以列出它们各自的因数，并查看这两个列表是否有共同元素。例如，考虑数字72 和84：

- 72 的因数有$1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36$ 和72。
- 84 的因数有$1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42$ 和84。

从这两个列表中，我们看到72 和84 有一些共同因数，即：$1,2,3,4,6$ 和12。例如，6 是72 和84 的一个公因数，因为$72\div 6$ 和$84\div 6$ 都是整数；但7 不是72 和84 的公因数，因为$72\div 7$ 不是整数。

在化简分数时，我们见过"最大公因数"，它使我们能够通过同时把分子和分母除以尽可能大的数，来化简像$\frac{72}{84}$ 这样的表达式。一般而言，这非常有用：找出**最大**公因数（也就是最大的公因数），可以让我们的化简尽可能强。

练习1

求下列各组数的最大公因数。

1. 10 和50
2. 14 和49
3. 10、25 和50
4. 7 和13

1.2 最大公单项式因子

由于我们可以对多项式进行乘法和除法，所以“多项式因子”这个概念同样是有意义的。

多项式的因子

如果存在某个多项式$Q(x)$，使得

$$P(x) = Q(x)\,D(x),$$

那么称非零多项式$D(x)$ 是多项式$P(x)$ 的一个**因子**。等价地说：如果$D(x)$ 能够**整除**$P(x)$（也就是没有余式），那么$D(x)$ 就是$P(x)$ 的一个因子。

在这一节中，我们将关注一种特殊而且极其常见的因子：**单项式因子**。[1] 与整数情况相比，这里的情形稍微更微妙一些，因为单项式之间并不存在一种天然的、从“小”到“大”的唯一排序方式。因此，当我们说最大公单项式因子时，我们并不是在通常的数值意义上指“最大”。相反，我们指的是那个既能整除每一项、又尽可能包含更多变量幂次的公单项式因子。具体来说，我们按以下方式来做。

最大公单项式因子

给定一个由若干单项式项组成的多项式，它的**最大公单项式因子**（GCMF）是：

- 所有**整数系数**的最大公因数；
- 每个变量在**每一项**中都出现时所能取到的最高公共幂次。

例如，考虑单项式$8x^5$ 和$16x^4$。按照上面的规则，最大公单项式因子由系数8 和16 的最大公因数8，以及在$8x^5$ 与$16x^4$ 中都出现的x 的最高公共幂次x^4 共同组成。因此，最大公单项式因子是$8x^4$。

为了完整起见，我们也可以通过把所有正整数系数的单项式因子都列出来，再比较两张表来验证这一点：

$$\begin{aligned}\text{Monomial factors of } 8x^5: &\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ x^2,\ 2x^2,\ 4x^2,\ 8x^2,\\ &\ x^3,\ 2x^3,\ 4x^3,\ 8x^3,\ x^4,\ 2x^4,\ 4x^4,\ \color{red}{8x^4},\ x^5,\ 2x^5,\ 4x^5,\ 8x^5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Monomial factors of } 16x^4: &\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ 16x,\ x^2,\ 2x^2,\ 4x^2,\ 8x^2,\ 16x^2,\\ &\ x^3,\ 2x^3,\ 4x^3,\ 8x^3,\ 16x^3,\ x^4,\ 2x^4,\ 4x^4,\ \color{red}{8x^4},\ 16x^4.\end{aligned}$$

一般地，我们可以利用分配律的逆过程，把一个公共单项式因子提取出来：

$$D(x)Q_1(x) + D(x)Q_2(x) = D(x)\big(Q_1(x) + Q_2(x)\big).$$

因此，我们可以从多项式和中“提出”一个公因子，从而完成因式分解。

[1]回忆一下，单项式只是一个只有一项的多项式，例如$6x^3$ 或$-2y^2$。

例如，考虑多项式$6x-18$。6 和18 的最大公因数是6，而x^1 和x^0 都能被整除的最高公共幂是$x^0=1$。因此，公单项式因子只是6。我们可以利用上面的“逆分配律”来进行因式分解：

$$6x-18=6(x)-6(3)=6(x-3).$$

这可以通过重新展开来检验：$6(x-3)=6x-6\cdot 3=6x-18$，确实正确。

再看一个例子，考虑多项式$10y^3-25y^2$。这里，10 和25 的最大公因数是5，而两项共有的y 的最高幂次是y^2。因此，最大公单项式因子是$5y^2$。于是我们可以通过“把这个$5y^2$ 提出来”来分解多项式$10y^3-25y^2$：

$$10y^3-25y^2=5y^2(2y)-5y^2(5)=5y^2(2y-5).$$

同样，这也可以通过重新展开所得表达式，并与原式$10y^3-25y^2$ 比较来检验。

1.3 提出负的单项式因子

通常我们会选择把系数为正的最大公单项式因子提出来。不过，有时候为了方便或者为了书写更美观，也会提取一个负的公因式，尤其是为了让括号内的首项变成正的。

例如，我们可以把多项式$-2x^2+8x-12$ 用两种不同方式分解：

(a) 提取公单项式因子2：

$$-2x^2+8x-12=2(-x^2+4x-6).$$

(b) 提取公单项式因子-2：

$$-2x^2+8x-12=-2(x^2-4x+6).$$

这两种写法都完全正确，只是风格上的差异。

练习2

提取最大公单项式因子。

1. x^2+3x
2. $6x^4+2x^2$
3. x^3-x
4. $12y^5-18y^3$
5. $-8x^3+4x^2-12x$
6. $15a^2b-10ab^2$

2 分解形如x^2+bx+c 的三项式

现在我们来考虑因式分解中稍微更复杂一点的情形，也就是分解形如x^2+bx+c 的三项式。在这种情况下，我们实际上可以尝试“一般地解决它”，方法是反向推导各个因子的值。关键观察是，两个二项式的乘积往往会产生一个三项式：

$$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn.$$

因此，如果我们想分解x^2+bx+c，我们就是在寻找两个数m 和n，使它们能同时重现中间项和常数项。

分解x^2+bx+c

要把
$$x^2+bx+c$$
分解成两个二项式的乘积，我们需要找到两个数m 和n，使得
$$m+n=b \qquad \text{并且} \qquad mn=c.$$
然后
$$x^2+bx+c=(x+m)(x+n).$$

于是我们得到一个很有用的提示语：

> 哪一对数相加得到中间项，而相乘又得到最后一项？

例如，考虑三项式x^2+5x+6。为了分解它，我们要找两个数m 和n，使得$m+n=5$ 且$mn=6$。只要把可能的组合列一列，很快就会发现所需的数是2 和3。所以：
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

如果c 很大（或为负数），那么把c 的因数对列出来，再通过试验它们的和，通常会更容易。最终（希望如此）会有一对满足因式分解所需的条件。

再看一个例子，考虑三项式$x^2-5x-24$。这里，我们要找一对异号的数m 和n，因为它们的乘积必须等于-24。24 有若干对因数，因此我们可以把它们列出来，再看看哪一对恰好相加得到-5。这些因数对是：
$$-24=(-1)(24),\ (-2)(12),\ (-3)(8),\ (-4)(6).$$
结果恰好和为-5 的那一对是3 和-8。因此，分解结果为：
$$x^2-5x-24=(x+3)(x-8).$$

练习3

对下列式子作因式分解。

1. $x^2+7x+12$
2. $x^2+2x-15$
3. $x^2-9x+20$
4. $x^2-3x-18$
5. $x^2+11x-26$
6. $x^2-13x+36$

3 两变量三项式的因式分解

有些三项式长得像
$$x^2+bxy+cy^2.$$
虽然这里有两个变量，但逻辑与前面完全一样：
$$(x+my)(x+ny)=x^2+(m+n)xy+mny^2.$$

因此，我们依然寻找两个数m, n，使得

$$m + n = b, \qquad mn = c,$$

只是这一次必须记得，在操作中要把y^2 看成$y \times y$。

分解$x^2 + bxy + cy^2$

要分解

$$x^2 + bxy + cy^2,$$

我们需要找到数m, n，使得

$$m + n = b, \qquad mn = c.$$

然后：

$$x^2 + bxy + cy^2 = (x + my)(x + ny).$$

例如，考虑这个二元三项式$x^2 - xy - 12y^2$。这里，我们寻找两个数m 和n，使得$m + n = -1$ 且$mn = -12$。经过一些试算，我们会发现这两个数是-4 和3。因此，因式分解结果为：

$$x^2 - xy - 12y^2 = (x - 4y)(x + 3y).$$

练习4

对下列式子作因式分解。

1. $x^2 + 11xy + 10y^2$
2. $y^2 - 6xy + 8x^2$
3. $x^2 - 7xy + 12y^2$
4. $y^2 + 9xy + 20x^2$

4 完全因式分解

有时，一个三项式既有公单项式因子，同时剩下的部分仍然还能继续分解成三项式。当我们把所有可能的步骤都做完时，这就称为**完全因式分解**。

完全因式分解

要把一个多项式**完全**分解：

1. 先提取最大公单项式因子。
2. 再对剩下的部分继续分解（通常是一个三项式）。
3. 重复这一过程，直到用当前工具无法再继续分解为止。

例如，考虑看起来稍微复杂一些的多项式$2x^2 - 4x - 6$。这并不是一个首项系数为1 的三项式，因此我们不能立刻使用上一节的方法。不过，我们注意到可以先把公因子2 提出来：

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3).$$

这样一来，就把原来的三项式化成了一个首项系数为1 的三项式。接着，对剩余三项式继续分解：

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1),$$

于是就得到完全因式分解：

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x + 1).$$

练习5

完全因式分解。

1. $2x^2 - 12x + 10$
2. $3x^3 - 27x^2 + 54x$
3. $4y^4 - 32y^3 + 28y^2$
4. $6x^2 + 18x - 24$

5 分解某些形如$ax^2 + bx + c$ 的三项式

到目前为止，我们主要专注于首项系数为1 的三项式，或者至少能够巧妙地把问题化归到那种情形。现在，我们来处理更一般、更复杂的情形：

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{其中 } a \neq 1.$$

由于我们仍然在处理二次式，所以可以继续使用"逆FOIL"的思想，就像前面那样。只不过这次情况更复杂，因为首项系数a 不再是1，因此它本身也可以有非平凡的因子。最一般地说，我们现在不是在寻找两个数m 和n，而是在寻找四个数m, n, p, q。因此，一个一般的一次式乘积会写成：

$$(px + m)(qx + n).$$

我们依旧可以通过展开FOIL 并与a, b, c 对照，来"反向推导"这些未知数之间应满足的条件：

$$(px + m)(qx + n) = pq\,x^2 + pn\,x + qm\,x + mn = pq\,x^2 + (pn + qm)\,x + mn.$$

如果这个多项式要等于一般的三项式$ax^2 + bx + c$，那么我们就必须逐项匹配系数：

$$pq\,x^2 + (pn + qm)\,x + mn = ax^2 + bx + c,$$

也就是说，我们需要满足：

$$pq = a, \qquad mn = c, \qquad \text{并且} \qquad pn + qm = b.$$

在实际操作中，这往往是一个有控制的试算过程，起点通常是一个有根据的猜测。一种做法是把a 和c 的所有因数对都列出来，然后检验"外项+ 内项"是否有哪一次恰好等于b。

分解$ax^2 + bx + c$（试错法）

要分解$ax^2 + bx + c$：

1. 如果存在公单项式因子，先把它提出来。
2. 列出a 的因数对（以决定首项部分）。
3. 列出c 的因数对（以决定常数项；注意符号）。
4. 逐个测试组合，直到**外项**+ **内项** 等于b。

例

我们来分解$4x^2 - 4x - 3$。这里没有公因子，因此不能指望先提一个东西出来，把问题化成首项系数为1 的三项式。于是我们直接接受这一点，并寻找一个乘积$(px + m)(qx + n)$，其中$a = 4$

且$c=-3$。一种自然的候选结构是$(2x+\square)(2x+\square)$，因为$2\cdot 2=4$。再考虑常数项乘积应为-3，所以尝试常数对$(+1,-3)$ 或$(-1,+3)$。检验：

$$(2x+1)(2x-3)=4x^2-6x+2x-3=4x^2-4x-3.$$

因此：

$$4x^2-4x-3=(2x+1)(2x-3).$$

例

现在来分解$6x^2+5x-4$。因为$a=6$，我们可以先尝试像$(2x+\square)(3x+\square)$ 这样的结构。注意到$c=-4$，所以常数项必须一正一负。我们尝试$(2x-1)(3x+4)$：

$$(2x-1)(3x+4)=6x^2+8x-3x-4=6x^2+5x-4.$$

这正好成立，因此：

$$6x^2+5x-4=(2x-1)(3x+4).$$

练习6

对下列式子作因式分解。

1. $4x^2+4x-3$
2. $6x^2-7x-3$
3. $8x^2+2x-3$
4. $9x^2-12x+4$
5. $10x^2+11x-6$
6. $12x^2-5x-2$

练习答案

练习1

1. $\mathrm{GCF}(10,50)=10$。
2. $\mathrm{GCF}(14,49)=7$。
3. $\mathrm{GCF}(10,25,50)=5$。
4. $\mathrm{GCF}(7,13)=1$。

练习2

1. $x^2+3x=x(x+3)$。
2. $6x^4+2x^2=2x^2(3x^2+1)$。
3. $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$。
4. $12y^5-18y^3=6y^3(2y^2-3)$。
5. $-8x^3+4x^2-12x=-4x(2x^2-x+3)$。
6. $15a^2b-10ab^2=5ab(3a-2b)$。

练习3

1. $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$。
2. $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$。
3. $x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$。
4. $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$。
5. $x^2 + 11x - 26 = (x + 13)(x - 2)$。
6. $x^2 - 13x + 36 = (x - 9)(x - 4)$。

练习4

1. $x^2 + 11xy + 10y^2 = (x + y)(x + 10y)$。
2. $y^2 - 6xy + 8x^2 = (y - 4x)(y - 2x)$。
3. $x^2 - 7xy + 12y^2 = (x - 3y)(x - 4y)$。
4. $y^2 + 9xy + 20x^2 = (y + 4x)(y + 5x)$。

练习5

1. $2x^2 - 12x + 10 = 2(x^2 - 6x + 5) = 2(x - 5)(x - 1)$。
2. $3x^3 - 27x^2 + 54x = 3x(x^2 - 9x + 18) = 3x(x - 3)(x - 6)$。
3. $4y^4 - 32y^3 + 28y^2 = 4y^2(y^2 - 8y + 7) = 4y^2(y - 1)(y - 7)$。
4. $6x^2 + 18x - 24 = 6(x^2 + 3x - 4) = 6(x + 4)(x - 1)$。

练习6

1. $4x^2 + 4x - 3 = (2x + 3)(2x - 1)$。
2. $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$。
3. $8x^2 + 2x - 3 = (4x + 3)(2x - 1)$。
4. $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$。
5. $10x^2 + 11x - 6 = (5x - 2)(2x + 3)$。
6. $12x^2 - 5x - 2 = (4x + 1)(3x - 2)$。