MAT140 — 第9講ハンドアウト
因数分解

Lecture 9 では，一つの多項式を別の多項式で割る方法を見ました。これによって，ある観察が完成しました。つまり，多項式は数とよく似ている ということです。足し算，引き算，掛け算，割り算が，数に対するものと似たやり方でできるからです。もちろん細かな違いはありましたが，一般には，多項式全体の集合は整数全体の集合$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ に似たふるまいをすると考えられます。

この講義では，多項式にとっての「数論」にずっと近いものに見える話題を始めます：**因数分解** です。

因数分解を考えるよい見方は，それが**括弧を展開する** ことの逆の手続きだということです。たとえば，私たちは

$$(x-1)(x+1)(x-2) \quad\longrightarrow\quad x^3-2x^2-x+2$$

と展開することができます。因数分解は，これを逆向きに行うことを求めます：

$$x^3-2x^2-x+2 \quad\longrightarrow\quad (x-1)(x+1)(x-2).$$

整数が素因数に分解できるのと同じように，多項式も，しばしばより単純な「基本部品」の積へと分解できます。

今日は次のことを行います：

1. **最大公単項式因子** をくくり出して多項式を因数分解する方法を学ぶ。
2. x^2+bx+c の形の**三項式**（および二変数の三項式）を因数分解する方法を学ぶ。
3. **完全に因数分解する** 方法と，$a\neq 1$ のときのax^2+bx+c 型の三項式を因数分解する方法を学ぶ。

1　共通因子をくくり出す因数分解

1.1　整数の最大公約数

整数の因子 とは，その整数を余りなく割り切るより小さい整数のことでした。たとえば，数8の因子は$1,2,4,8$ です。なぜなら$1\times 8=2\times 4=8$ だからです。二つの数が与えられたとき，それぞれの因子を並べて，共通するものがあるかどうかを見ることができます。たとえば，72と84 を考えます：

- 72 の因子は$1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72$。
- 84 の因子は$1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84$。

この二つの一覧を見ると，72 と84 には$1,2,3,4,6,12$ という共通の因子があることがわかります。たとえば，6 は72 と84 の共通因子です。なぜなら$72\div 6$ も$84\div 6$ も整数だからです。しかし，7 は72 と84 の共通因子ではありません。なぜなら$72\div 7$ は整数ではないからです。

分数を簡単にするときには，「最大公約数」を使いました。これにより，$\frac{72}{84}$ のような式を，分子と分母を両方ともできるだけ大きい数で割ることで，強く簡単にすることができました。一般に，これはとても便利です。**最大の**共通因子（つまり最も大きい共通因子）を見つけることで，簡単化をできるだけ強く行えるからです。

Exercise 1

次の組の最大公約数を求めなさい。

1. 10 と50
2. 14 と49
3. 10, 25, 50
4. 7 と13

1.2 最大公単項式因子

多項式についても掛け算や割り算ができるので，「多項式の因子」という考え方も意味を持ちます。

多項式の因子

多項式$P(x)$ の**因子**とは，ある多項式$Q(x)$ が存在して

$$P(x) = Q(x)\,D(x)$$

となるような0 でない多項式$D(x)$ のことである。同値に言えば，$D(x)$ が$P(x)$ の因子であるとは，$D(x)$ が$P(x)$ を**余りなく** 割り切るということである。

この節では，特別で，しかも非常によく現れる種類の因子に注目します：**単項式因子** です。[1] ここでは，整数の場合より少し微妙です。単項式全体を「小さい」から「大きい」へと一列に自然に並べる方法はありません。したがって，最大公単項式因子と言うとき，それは通常の数の意味での「最も大きい」という意味ではありません。ここで意味しているのは，すべての項を割り切る範囲で，できるだけ多くの変数の冪を含む共通の単項式因子のことです。具体的には，次のように行います。

最大公単項式因子

項が単項式である多項式に対して，**最大公単項式因子**（GCMF）は：

- **整数係数**のGCF と，
- **すべての項**に現れる各変数の最高の共通冪

を掛け合わせたものである。

たとえば，多項式$8x^5$ と$16x^4$ を考えます。上の規則に従えば，最大公単項式因子は，係数8 と16 のGCF である8 と，$8x^5$ と$16x^4$ の両方に現れるx の最高の共通冪であるx^4 を組み合わせたものです。したがって，最大公単項式因子は$8x^4$ です。

念のため，正の整数係数を持つ単項式因子をすべて書き出して，二つの一覧を比較して確かめることもできます：

[1] 単項式とは，単に$6x^3$ や$-2y^2$ のように，一つの項しか持たない多項式のことでした。

$$
\begin{aligned}
8x^5 \text{ の単項式因子}: &\ 1, 2, 4, 8,\ x, 2x, 4x, 8x,\ x^2, 2x^2, 4x^2, 8x^2,\\
&\ x^3, 2x^3, 4x^3, 8x^3,\ x^4, 2x^4, 4x^4, {\color{red}8x^4},\ x^5, 2x^5, 4x^5, 8x^5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
16x^4 \text{ の単項式因子}: &\ 1, 2, 4, 8, 16,\ x, 2x, 4x, 8x, 16x,\ x^2, 2x^2, 4x^2, 8x^2, 16x^2,\\
&\ x^3, 2x^3, 4x^3, 8x^3, 16x^3,\ x^4, 2x^4, 4x^4, {\color{red}8x^4}, 16x^4.
\end{aligned}
$$

一般に，和の中から共通の単項式因子をくくり出すには，分配法則を逆向きに使えます：

$$D(x)Q_1(x) + D(x)Q_2(x) = D(x)\big(Q_1(x) + Q_2(x)\big).$$

したがって，共通の因子を「外に引き出す」ことで，式を因数分解できます。

例として，多項式$6x - 18$ を考えます。6 と18 の最大公約数は6 であり，x^1 とx^0 の両方を割るx の最高の冪は$x^0 = 1$ です。したがって，共通の単項式因子は単に6 です。これを使うと，分配法則を逆向きに用いて

$$6x - 18 = 6(x) - 6(3) = 6(x - 3)$$

と因数分解できます。これは，得られた因数分解を展開して$6(x - 3) = 6x - 6 \cdot 3 = 6x - 18$ となることで確かめられます。

もう一つの例として，多項式$10y^3 - 25y^2$ を考えます。ここでは，10 と25 の最大公約数は5 であり，両方の項に共通するy の最高冪はy^2 です。したがって，最大公単項式因子は$5y^2$ です。これを「外に引き出す」と，

$$10y^3 - 25y^2 = 5y^2(2y) - 5y^2(5) = 5y^2(2y - 5)$$

と因数分解できます。これも，右辺を展開してもとの$10y^3 - 25y^2$ に戻ることで確かめられます。

1.3 負の単項式をくくり出す

通常は，最大公単項式因子の係数は正 に取ります。しかし，括弧の中の最高次の項を正にしたいなどの理由で，負の因子をくくり出したほうが便利だったり，見た目がよかったりすることもあります。

たとえば，多項式$-2x^2 + 8x - 12$ は二通りに因数分解できます：

(a) 共通因子2 をくくり出す：

$$-2x^2 + 8x - 12 = 2(-x^2 + 4x - 6).$$

(b) 共通因子-2 をくくり出す：

$$-2x^2 + 8x - 12 = -2(x^2 - 4x + 6).$$

どちらも完全に正しい因数分解であり，単に好みの問題です。

Exercise 2

最大公単項式因子をくくり出して因数分解しなさい。

1. $x^2 + 3x$
2. $6x^4 + 2x^2$
3. $x^3 - x$
4. $12y^5 - 18y^3$
5. $-8x^3 + 4x^2 - 12x$
6. $15a^2b - 10ab^2$

2　形$x^2 + bx + c$ の三項式の因数分解

次に考えるのは，次に簡単な因数分解の形，すなわち$x^2 + bx + c$ の形の三項式です。この場合には，個々の因子の値を逆算することで，かなり一般的に「解く」ことができます。重要な観察は，二つの二項式の積がしばしば三項式になるということです：

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn.$$

したがって，$x^2 + bx + c$ を因数分解したいなら，中間項と定数項を再現する二つの数m とn を探せばよいです。

$x^2 + bx + c$ の因数分解

$$x^2 + bx + c$$

を二つの二項式の積に因数分解するには，

$$m + n = b \qquad \text{かつ} \qquad mn = c$$

を満たす二つの数m, n を見つければよい。そのとき

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

である。

したがって，役に立つ指針は次のように言えます：

> 足すと真ん中の項になり，掛けると右端の項になる数の組は何か。

たとえば，三項式$x^2 + 5x + 6$ を考えます。これを因数分解するには，$m + n = 5$ かつ$mn = 6$ となるm, n を探します。組合せを並べてみると，求める数は2 と3 であることがすぐにわかります。したがって，

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

c が大きいとき，あるいは負のときには，c の因子の組を並べて，和を試しながら調べるのが役に立ちます。いずれ，うまく条件を満たす組が見つかるはずです。

もう一つの例として，三項式$x^2 - 5x - 24$ を考えます。ここでは，積が-24 になる必要があるので，m とn は異符号でなければなりません。24 の因子の組はいくつかあるので，それらを並べて，和が-5 になるものを探します。因子の組は

$$-24 = (-1)(24),\ (-2)(12),\ (-3)(8),\ (-4)(6)$$

です。実際に和が-5 になるのは3 と-8 です。したがって，因数分解は

$$x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8)$$

です。

Exercise 3

次を因数分解しなさい。

1. $x^2 + 7x + 12$
2. $x^2 + 2x - 15$
3. $x^2 - 9x + 20$
4. $x^2 - 3x - 18$
5. $x^2 + 11x - 26$
6. $x^2 - 13x + 36$

3　二変数の三項式の因数分解

三項式の中には

$$x^2 + bxy + cy^2$$

の形をしたものもあります。変数が二つあっても，考え方は同じです：

$$(x + my)(x + ny) = x^2 + (m + n)xy + mny^2.$$

したがって，やはり

$$m + n = b, \qquad mn = c$$

を満たす二つの数m, n を探せばよく，その過程ではy^2 を$y \times y$ に分けて考えることを忘れないようにします。

$x^2 + bxy + cy^2$ の因数分解

$$x^2 + bxy + cy^2$$

を因数分解するには，

$$m + n = b, \qquad mn = c$$

を満たす数m, n を見つければよい。そのとき

$$x^2 + bxy + cy^2 = (x + my)(x + ny)$$

である。

例として，二変数の三項式$x^2 - xy - 12y^2$ を考えます。ここでは$m + n = -1$ かつ$mn = -12$ となる二つの数m, n を探します。少し試行錯誤すると，-4 と3 がそれに当たることがわかります。したがって，

$$x^2 - xy - 12y^2 = (x - 4y)(x + 3y)$$

と因数分解できます。

Exercise 4

次を因数分解しなさい。

1. $x^2 + 11xy + 10y^2$
2. $y^2 - 6xy + 8x^2$
3. $x^2 - 7xy + 12y^2$
4. $y^2 + 9xy + 20x^2$

4 完全因数分解

三項式の中には，共通の単項式因子を持ち，しかもそのあとさらに三項式として因数分解できるものがあります。可能なすべての段階を行ったとき，それを**完全に因数分解する** と言います。

> 完全因数分解
>
> 多項式を完全に 因数分解するには：
> 1. まず最大公単項式因子をくくり出す。
> 2. 次に，残ったものを因数分解する（多くの場合は三項式）。
> 3. この授業で使える方法でこれ以上因数分解できなくなるまで繰り返す。

たとえば，少し複雑に見える多項式$2x^2 - 4x - 6$ を考えます。これは$x^2 + bx + c$ の形の三項式ではないので，Section 2 の方法をすぐには使えません。しかし，まず共通因子2 をくくり出せることに気づきます：

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3).$$

こうすると，残った三項式は，最高次係数が1 の形になり，Section 2 の方法が使えます。続けて

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

と因数分解できるので，完全因数分解は

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x + 1)$$

です。

Exercise 5

完全に因数分解しなさい。

1. $2x^2 - 12x + 10$
2. $3x^3 - 27x^2 + 54x$
3. $4y^4 - 32y^3 + 28y^2$
4. $6x^2 + 18x - 24$

5 形$ax^2 + bx + c$ のいくつかの三項式の因数分解

ここまでは，最高次係数が1 の三項式，あるいはうまく工夫してその場合に帰着できる状況だけを扱ってきました。ここからは，より一般的で，より複雑な場合

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{ただし } a \neq 1$$

を見ます。まだ二次式なので，前節と同じように「逆FOIL」を使って考えることができます。ただし，今度は係数a が1 ではないので，それ自身も非自明に因数分解できることを考えなければなりません。最も一般的には，今探しているのは二つの数m, n ではなく，四つの数m, n, p, q です。したがって，一般の一次式どうしの積は

$$(px + m)(qx + n)$$

の形になります。前節と同様に，FOIL を使って展開し，その係数をa, b, c と比べることで，この未知数たちに対する条件を逆算できます：

$$(px+m)(qx+n) = pq\,x^2 + pn\,x + qm\,x + mn = pq\,x^2 + (pn+qm)\,x + mn.$$

これが一般の三項式ax^2+bx+c に等しいとしたいなら，係数は一致しなければなりません：

$$pq\,x^2 + (pn+qm)\,x + mn = ax^2+bx+c,$$

したがって必要な条件は

$$pq = a, \qquad mn = c, \qquad \text{および} \qquad pn+qm = b$$

です。実際には，これは「うまく制御された試行錯誤」になることが多いです。その一つのやり方は，a の因子の組とc の因子の組をすべて並べて，**外側+ 内側** の積の和がb になるかを調べることです。

ax^2+bx+c の因数分解（試行錯誤の方法）

ax^2+bx+c を因数分解するには：

1. まず，共通の単項式因子があればそれをくくり出す。
2. a の因子の組を並べる（最高次の項を決めるため）。
3. c の因子の組を並べる（定数項を決めるため。符号に注意）。
4. **外側+ 内側** がb になる組合せを試していく。

Example

$4x^2-4x-3$ を因数分解します。この場合，共通因子はないので，何かをくくり出して最高次係数が1 の三項式に帰着することはできません。したがって，そのまま$a=4$，$c=-3$ のもとで$(px+m)(qx+n)$ の形を探します。よい候補として$(2x+\square)(2x+\square)$ があります。なぜなら$2\cdot 2=4$ だからです。定数の積が-3 になるように，$(+1,-3)$ または$(-1,+3)$ を試します。すると

$$(2x+1)(2x-3) = 4x^2-6x+2x-3 = 4x^2-4x-3.$$

よって

$$4x^2-4x-3 = (2x+1)(2x-3).$$

Example

次に$6x^2+5x-4$ を因数分解します。$a=6$ なので，まず$(2x+\square)(3x+\square)$ のような形を試せます。また$c=-4$ なので，定数項の符号は異なるはずです。そこで$(2x-1)(3x+4)$ を試すと：

$$(2x-1)(3x+4) = 6x^2+8x-3x-4 = 6x^2+5x-4.$$

うまくいったので，

$$6x^2+5x-4 = (2x-1)(3x+4)$$

です。

Exercise 6

次を因数分解しなさい。

1. $4x^2 + 4x - 3$
2. $6x^2 - 7x - 3$
3. $8x^2 + 2x - 3$
4. $9x^2 - 12x + 4$
5. $10x^2 + 11x - 6$
6. $12x^2 - 5x - 2$

Exercises の解答

Exercise 1

1. $\mathrm{GCF}(10, 50) = 10$。
2. $\mathrm{GCF}(14, 49) = 7$。
3. $\mathrm{GCF}(10, 25, 50) = 5$。
4. $\mathrm{GCF}(7, 13) = 1$。

Exercise 2

1. $x^2 + 3x = x(x + 3)$。
2. $6x^4 + 2x^2 = 2x^2(3x^2 + 1)$。
3. $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$。
4. $12y^5 - 18y^3 = 6y^3(2y^2 - 3)$。
5. $-8x^3 + 4x^2 - 12x = -4x(2x^2 - x + 3)$。
6. $15a^2b - 10ab^2 = 5ab(3a - 2b)$。

Exercise 3

1. $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$。
2. $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$。
3. $x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$。
4. $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$。
5. $x^2 + 11x - 26 = (x + 13)(x - 2)$。
6. $x^2 - 13x + 36 = (x - 9)(x - 4)$。

Exercise 4

1. $x^2 + 11xy + 10y^2 = (x + y)(x + 10y)$。
2. $y^2 - 6xy + 8x^2 = (y - 4x)(y - 2x)$。
3. $x^2 - 7xy + 12y^2 = (x - 3y)(x - 4y)$。
4. $y^2 + 9xy + 20x^2 = (y + 4x)(y + 5x)$。

Exercise 5

1. $2x^2 - 12x + 10 = 2(x^2 - 6x + 5) = 2(x - 5)(x - 1)$。
2. $3x^3 - 27x^2 + 54x = 3x(x^2 - 9x + 18) = 3x(x - 3)(x - 6)$。

3. $4y^4 - 32y^3 + 28y^2 = 4y^2(y^2 - 8y + 7) = 4y^2(y-1)(y-7)$。
4. $6x^2 + 18x - 24 = 6(x^2 + 3x - 4) = 6(x+4)(x-1)$。

Exercise 6

1. $4x^2 + 4x - 3 = (2x+3)(2x-1)$。
2. $6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$。
3. $8x^2 + 2x - 3 = (4x+3)(2x-1)$。
4. $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$。
5. $10x^2 + 11x - 6 = (5x-2)(2x+3)$。
6. $12x^2 - 5x - 2 = (4x+1)(3x-2)$。