

MAT220 第4講：確率の数学的基礎

Contents

1	集合論	2
1.1	集合とは何か？	2
1.2	集合のルール	2
1.3	濃度	4
1.4	部分集合	4
1.5	冪集合	6
2	集合の演算	7
2.1	新しい集合を作る	7
2.2	補集合	7
2.3	共通部分	8
2.4	和集合	8
2.5	演算を組み合わせる	9
2.6	濃度と集合演算	10
3	配置の数え上げ	11
3.1	積の法則	11
4	順列の数え上げ	13
4.1	順列とは何か？	14
4.2	順列を数える	14
4.3	8 人の学生と 8 個の椅子を使って公式を説明する	15
5	組合せの数え上げ	17
5.1	パスカルの三角形	18
5.2	組合せで部分集合を数える	20

第1講から第3講では、統計学の基本的な言葉、データの視覚的な表現、そして平均値、中央値、分散、標準偏差といった数値的な要約について学びました。これから、記述統計から確率論へと進んでいきます。しかし、その前に、確率論の中で頻繁に使われるいくつかの数学的な概念を導入する必要があります。この講義では、まさにそのために、このコースの後半で使う集合論と数え上げの方法を導入します。

1 集合論

1.1 集合とは何か？

あるものの集まりについて数学的に話すためには、それらを一緒に書き表す方法が必要です。これが集合です。つまり、集合とは順序のない項目のリストです。

定義：集合

集合とは、ものの構造を持たない集まりのことです。

集合は、ものを入れるための数学的な箱のように想像できます。その箱には、それが存在していて、そこに入っているものを含んでいる、ということ以外には固有の構造はありません。実際、それだけです。集合とは、ものを一つの場所にまとめるための数学的な方法です。この考え方は非常に広いので、基本的にはどのような対象からでも集合を作ることができます。例えば：

- 2 より大きいすべての数の集合、
- 教室の中で茶色の髪をしているすべての人の集合、
- 今日電車で来たすべての学生の集合、
- Carl という名前のすべてのペンギンの集合。

集合の中に入っている対象を、集合の要素と呼びます。これは集合のメンバーのようなものです。数学の記法では、集合を書くときに波括弧 $\{$ と $\}$ を使います。例えば、記法

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

は、要素が 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 である集合 A を表しています。強調しておく、集合には固有の順序がないと考えるのが一番です。もちろん、集合の要素を列挙するときには何らかの順序で書かなければなりません。しかし、その順序はまったく重要ではありません。集合はその要素だけによって決まります。例えば、集合 A は次のように書いても同じです。

$$A = \{3, 4, 1, 7, 2, 5, 6\}, \quad \text{または} \quad A = \{3, 1, 4, 5, 7, 6, 2\}.$$

ある対象 x が集合 A の要素であるとき、

$$x \in A,$$

と書きます。これは単に「 x は A に属する」と読みます。もし x が A の要素でないなら、 $\neq$ と同じように、この記号に斜線を入れて表します。記法

$$x \notin A$$

は「 x は A に属さない」と読みます。例えば、 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ なら、 $3 \in A$ ですが $4 \notin A$ です。

1.2 集合のルール

集合は、ほとんどすべての数学的構造の基本的な構成要素です。なぜなら、ものの集まりがどのような構造を持つか、あるいは持たないかについて話す前に、まずそれらを同じ場所に集め

る必要があるからです。その意味で、集合論は現代数学の基礎の一つと見ることができます。しかし、集合を「構造以前のもの」のように考えることができるとしても、いくつかの基本的なルールがあります。

集合の基本ルール

- ルール 1: 同じ要素を二度書くことはできない。
- ルール 2: 二つの集合がまったく同じ要素を持つなら、それらは等しい。
- ルール 3: 集合は他の集合を要素として持つことができるが、集合は自分自身を含むことはできない。
- ルール 4: 何も入っていない特別な集合があり、これを空集合と呼び、 $\emptyset$ と書く。
- ルール 5: 絶対にすべてのものを含む普遍集合は存在しない。

ルール1は、集合の要素は一度だけ書くということを述べています。これは、例えば、次の二つの集合が等しいことを意味します。

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$$

つまり、集合を書き出すときには重複を書きません。別の言い方をすると、集合は要素が何回現れるかを数えるのではなく、その要素が存在するかどうかだけを記録します。二つ目のルールは、

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 3, 2\},$$

ということを意味します。これは、集合の中の要素の順序は重要ではない、ということの別の言い方です。ルール3により、例えば

$$A = \{1, 2, \{3, 4\}\},$$

のようなものを書くことができます。これは三つの要素を含む集合です。その三つとは、数 1、数 2、そして集合 $\{3, 4\}$ です。しかし、 $A = \{A\}$ のようなものを書くことはできません。なぜなら、これは自己参照的なパラドックスにつながるからです。記号で書くと、ルール3はすべての集合 A について $A \notin A$ という関係を強制します。四つ目のルールは、空集合 $\emptyset$ を導入します。これは何も含まない唯一の集合です。この特別な集合は、集合論における一種のゼロのような要素、つまり「何もないこと」を表す形式的な方法と見ることができます。ルール3に従うと、空集合は空集合を含む集合とは同じではないことに注意してください。

$$\emptyset \neq \{\emptyset\},$$

なぜなら、前者は要素を 0 個持ち、後者は $\emptyset$ そのものという要素を 1 個持つからです。最後に、ルール5は、絶対にすべての数学的対象を含む集合は存在しない、と述べています。このルールは技術的な理由から課されます。もし絶対にすべてを含む集合 U があったとすると、この集合もそれ自体が一つのものなので、定義上、自分自身を含まなければならないことになります。しかし、これはルール3に反します。

練習問題：集合の等しさ

次の集合が等しいかどうかを判定しなさい。

- (a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ and $B = \{9, 7, 5, 3, 1\}$.
- (b) $A = \{13, 6, 7, 9, 2\}$ and $B = \{6, 2, 13, 9\}$.
- (c) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ and $B = \{2, 2, 2, 2, 4, 6, 8, 8\}$.
- (d) $A = \{14\}$ and $B = \{7 + 7\}$.

解答

- (a) はい。この二つの集合はまったく同じ要素を持つので、 $A = B$ です。
(b) いいえ。集合 A は 7 を含みますが、集合 B は含みません。したがって $A \neq B$ です。
(c) はい。要素の重複は無視するので、 $A = B$ です。
(d) はい。 $7 + 7 = 14$ なので、この二つの集合はまったく同じ要素を含みます。したがって $A = B$ です。

1.3 濃度

集合には固有の構造がないので、話せることはそれほど多くありません。しかし、集合の中に含まれる要素を数えることで、大きさの概念を得ることができます。この「集合の大きさ」には特別な名前があります。それを集合の濃度と呼びます。

定義：濃度

有限集合 A に対して、 A の濃度とは、 A の要素の個数のことです。これは

$$|A|.$$

と書きます。

例えば、

$$|\{a, b, c, d, e\}| = 5, \quad |\emptyset| = 0.$$

1.4 部分集合

名前から想像できるように、集合 A の部分集合とは、 A から取り出した、ある種のより小さなものの集まりです。形式的には、部分集合を次のように定義できます。

定義：部分集合

任意の二つの集合 A と B に対して、 A のすべての要素が B の要素でもあるとき、 A は B の部分集合であると言い、

$$A \subseteq B,$$

と書きます。

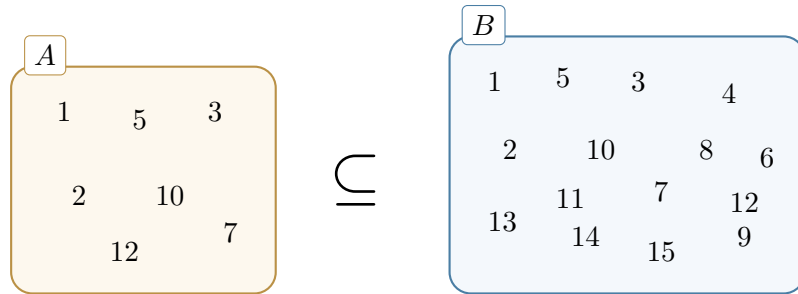
例えば、集合

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 12\}$$

は、より大きな集合

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\},$$

の部分集合です。なぜなら、 A に含まれるすべての要素が B にも含まれているからです。構造のない箱という考え方では、部分集合は次のように想像できます。



集合 A が B の部分集合であることは、 A の各要素が B にも現れているかを一つずつ確認すれば検証できます。 A の大きさは 7 なので、これは一つずつ確認できます。

特に重要な部分集合に関する事実が二つあります。任意の集合 A について、常に

$$A \subseteq A \quad \text{かつ} \quad \emptyset \subseteq A.$$

が成り立ちます。最初の式は、すべての集合は自分自身の部分集合である、ということを言っています。これはある意味で自明です。 A の任意の要素 x は、当然 A の中にあるからです。二つ目の式は、空集合はすべての集合の部分集合である、ということを言っています。なぜなら、 $\emptyset$ には A に属していない要素が存在しないからです。このような命題はしばしば空虚に真であると言われます。

練習問題：部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7, 9\},$$

とし、 S をすべての素数からなる集合とします。次の命題が真か偽かを判定しなさい。

- (a) $A \subseteq B$.
- (b) $A \subseteq S$.
- (c) $B \subseteq S$.
- (d) $\{2, 3\} \subseteq B$.
- (e) $A \subseteq A$.
- (f) $\emptyset \subseteq A$.

解答

- (a) 偽です。1 と 4 は A の要素ですが、 B の要素ではありません。
- (b) 偽です。1 と 4 は素数ではありません。
- (c) 偽です。9 は B の要素ですが、9 は素数ではありません。
- (d) 真です。2 と 3 はどちらも B の要素なので、 $\{2, 3\} \subseteq B$ です。
- (e) 真です。すべての集合は自分自身の部分集合です。
- (f) 真です。空集合はすべての集合の部分集合です。

1.5 冪集合

集合 A があり、 n 個の要素を持つとします。

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

前の節で見たように、 A のいくつかの要素を選び、それらを集合に入れ、必要なら他の要素を除くことで、 A の部分集合を作ることができます。小さい方から考えると、 A の任意の要素 x について、その要素だけからなる部分集合 $\{x\} \subseteq A$ を作ることができます。これを A のすべての要素について行くと、大きさ 1 の部分集合がたくさんできます。

$$\text{大きさ 1 の部分集合: } \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \dots, \{x_n\}.$$

大きさ 2 の部分集合をすべて列挙することもできます。これは要素のすべてのペアからなります。

$$\text{大きさ 2 の部分集合: } \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \dots$$

このような部分集合はもっとたくさんあるように見えますが、原理的にはすべて書き出すことができます。実際、この手続きを繰り返して、大きさ 3, 4, 5, などの部分集合を作ることができます。最終的にはこの手続きは止まります。なぜなら、 A には n 個の要素しかないので、大きさ n の部分集合はただ一つ、 A 自身だけだからです。

仮にこの手続きを最後まで行ったらとすると、 A の部分集合をすべて書き出したことになります。驚くことではありませんが、この集まりもまた別の集合にすることができます。この「 A のすべての部分集合からなる集合」を、 A の冪集合と呼びます。

定義：冪集合

集合 A の冪集合とは、 A のすべての部分集合からなる集合のことです。これは $\mathcal{P}(A)$ と書きます。

例えば、

$$A = \{1, 2, 3\},$$

なら、

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

見て分かるように、冪集合は元の集合よりもずっと大きいように見えます。上の例では、集合 $A = \{1, 2, 3\}$ は 3 個の要素を持ちますが、その冪集合は 8 個の要素を持ちます。これは偶然ではありません。実際、 $2^3 = 8$ です。一般に、次のルールが成り立ちます。

冪集合の大きさ

有限集合 A が n 個の要素を持つなら、

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

このルールは、この講義の後半で説明します。

2 集合の演算

2.1 新しい集合を作る

古い集合から新しい集合を作る方法はいくつかあります。確率論の文脈では、主に次の三つの演算に注目します。

1. 集合の補集合、
2. 集合の共通部分、
3. 集合の和集合。

次回の講義で見るように、これら三つの演算により、「でない」「かつ」「または」という言葉を含む事象の確率を正しく表現し、したがって計算できるようになります。これから、これらの演算を順番に簡単に見ていきます。

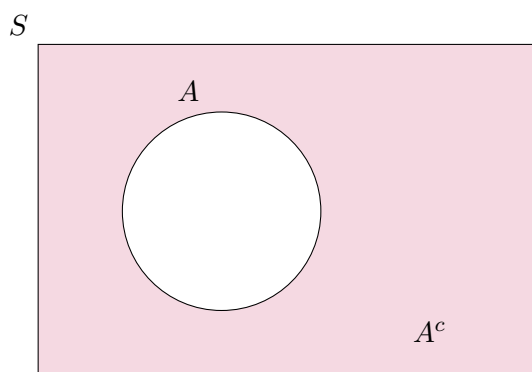
2.2 補集合

A の補集合は、しばしば A^c と書かれ、単に A に入っていないものすべての集合です。ルール5により、 A に入っていないすべてのものを単純に考えることはできません。その代わりに、ある大きな集合 S に対して相対的に補集合を取る必要があります。

定義：補集合

$A \subseteq S$ とします。 S における A の補集合とは、 S の要素 x のうち、 A に属さないものすべてからなる集合です。

視覚的には、補集合は次の図の影を付けた領域として想像できます。



例えば、集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を考えます。 A を S の中の偶数の集合、つまり $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ とすると、 S における A の補集合は、 S の中で A に入っていない数すべてになります。これは S を書き出し、 A に含まれる要素を取り除くことで求めることができます。残ったものが補集合です。 S を書き出して A の要素を取り除くと、

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

したがって、補集合 A^c は集合 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 、すなわち S の中の奇数の集合です。

2.3 共通部分

A と B の共通部分は、しばしば $A \cap B$ と書かれ、 A と B の両方に同時に入っているものすべての集合です。

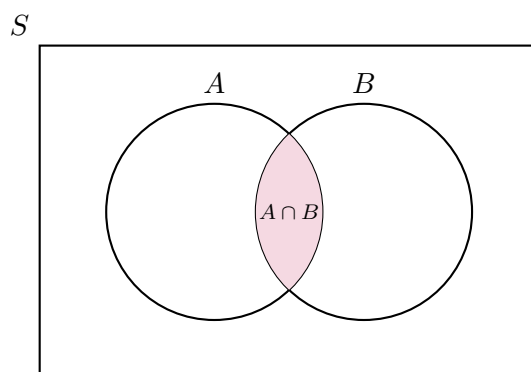
定義：共通部分

A と B の共通部分は

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

です。

視覚的には、二つの集合の共通部分は、次の図の影を付けた領域のように見えます。



ただし、二つの集合の共通部分が空になることも十分にあり得ます。これは、上の図の二つの円が重ならない場合に起こります。

例として、 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ とします。共通部分を求めるためには、 A と B の両方に同時に入っている要素を探します。見て分かるように、

$$A \cap B = \{2, 3\},$$

です。なぜなら、2 と 3 だけが両方の集合に入っている要素だからです。

2.4 和集合

A と B の和集合は、しばしば $A \cup B$ と書かれ、 A に入っているか、 B に入っているか、またはその両方に入っているものすべての集合です。この集合は、 A と B の両方を一つにまとめて作られる集合として想像できます。

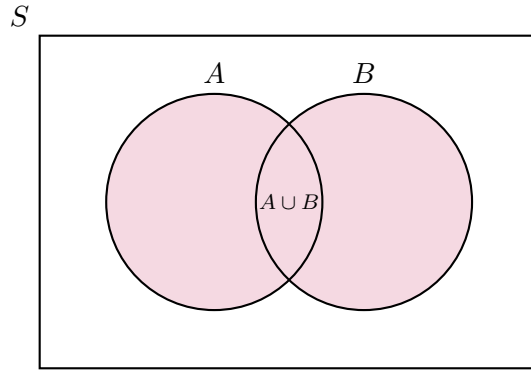
定義：和集合

A と B の和集合は

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}.$$

です。

視覚的には、二つの集合の和集合は次の図のように見えます。



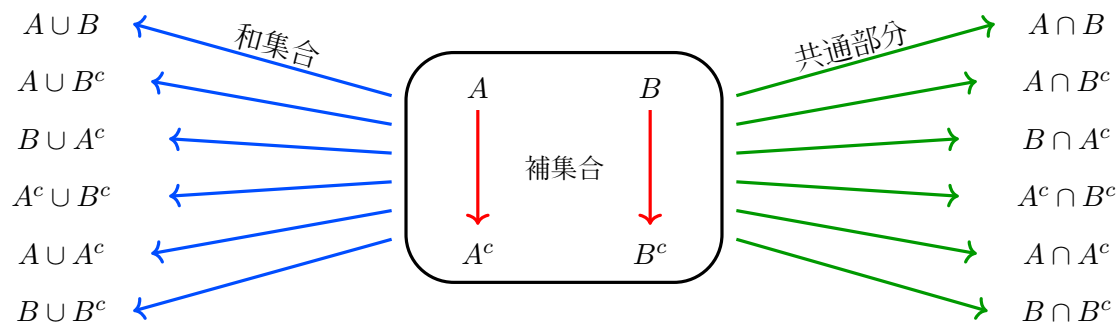
例えば、 $A = \{1, 2, 3\}$ 、 $B = \{2, 3, 4, 5\}$ とします。このとき、和集合はこれらのものをすべて集めた集合になります。

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

第1.2節のルール1に従って、要素 2 と 3 は二度は書かないことに注意してください。

2.5 演算を組み合わせる

補集合、共通部分、和集合という三つの演算を使うことで、少ない出発点から多くの新しい集合を作ることができます。二つの集合 A と B だけを考え、それらのある大きな集合 S の部分集合として見ると、これら三つの演算を適用して多くの新しい集合を作ることができます。



練習問題：集合の演算

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

とし、次の三つの部分集合を考えます。

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

次の集合を書き出さない。

- (a) A^c
- (b) $A \cap B$
- (c) $(A \cap B) \cup C$
- (d) $A \cap C$
- (e) $A \cap B \cap C$

解答

(a) A は S 中の偶数の集合なので、その補集合は

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

です。

(b) A と B の両方に含まれる唯一の要素は 2 なので、

$$A \cap B = \{2\}.$$

です。

(c) $A \cap B = \{2\}$ なので、

$$(A \cap B) \cup C = \{2\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

です。

(d) A と C の両方に含まれる要素はないので、

$$A \cap C = \emptyset.$$

です。

(e) $A \cap C = \emptyset$ なので、三つすべての集合に含まれるものはありません。したがって

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

です。

2.6 濃度と集合演算

集合演算は濃度と便利な形で関係します。いくつかの基本的な事実は次の通りです。

$$|A \cap B| \leq |A| \quad \text{and} \quad |A \cap B| \leq |B|.$$

これは、共通部分には、もともと両方の集合に入っていた要素だけが含まれるからです。

同様に、

$$|A| \leq |A \cup B| \quad \text{and} \quad |B| \leq |A \cup B|.$$

これは、和集合には A のすべての要素と B のすべての要素が含まれるからです。

しかし、 $A \cup B$ の大きさを数えるときには、重なっている部分を二重に数えないようにしなければなりません。これにより、次の公式が得られます。

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

例。

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

とします。このとき

$$|A| = 4, \quad |B| = 5, \quad A \cap B = \{3, 4\}.$$

です。したがって

$$|A \cap B| = 2.$$

よって

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 5 - 2 = 7.$$

実際、

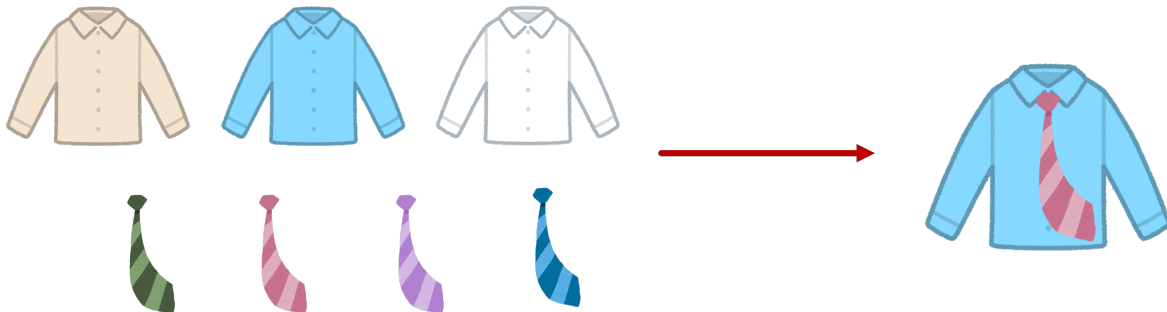
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

です。

3 配置の数え上げ

3.1 積の法則

3 枚のシャツと 4 本のネクタイがあり、今朝仕事に行くためにそれぞれ一つずつ身に付けたいとします。例えば、一つの可能な選択は、次の青いシャツと赤いネクタイです。



何通りの服装を作ることができるでしょうか。服装を選ぶ問題は、二つの別々の選択に分けることができます。つまり、シャツを選び、その後で独立にネクタイを選ぶということです。まずシャツを選ぶと、そのシャツに対して 4 本のネクタイのいずれかを合わせることができるので、4 通りの服装ができます。すべてのシャツについてこの選択を行うと、次のような構造化された表が得られます。この表は、シャツとネクタイのすべての可能な配置を示しています。



見て分かるように、可能な服装は全部で 12 通りあります。これはシャツの数 3 とネクタイの数 4 を掛けたものです。

服の絵を描く代わりに、この問題を数学的な言葉に変換することもできます。三つのシャツを s_1, s_2, s_3 , と名付け、四つのネクタイを t_1, t_2, t_3, t_4 と書くと、一つの服装はペア (s_i, t_j) からなります。上の図は次のように書き直せます。

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	(s_1, t_1)	(s_1, t_2)	(s_1, t_3)	(s_1, t_4)
s_2	(s_2, t_1)	(s_2, t_2)	(s_2, t_3)	(s_2, t_4)
s_3	(s_3, t_1)	(s_3, t_2)	(s_3, t_3)	(s_3, t_4)

3 種類のシャツ $\times$ 4 種類のネクタイ = 12 通りの配置。

このようなペアからなる表のような構造は、デカルト積として知られています。シャツからなる集合 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ と、ネクタイからなる集合 $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ があるとします。この二つの集合を「掛け合わせる」ことで、 (s_i, t_j) という形のすべてのペアからなる集合を作ることができます。この新しい集合、つまり S と T のデカルト積は、 $S \times T$ と書きます。シャツとネクタイの例で今見つけたことは、 $|S \times T| = |S| \times |T|$ ということです。配置を数える文脈では、次の一般的なルールがあります。

配置に対する積の法則

ある選択が段階的に行われるとします。第一段階に m 個の選択肢があり、第二段階に n 個の選択肢があるなら、配置の総数は

$$m \times n.$$

です。二段階より多い場合には、各段階の選択肢の数をすべて掛け合わせます。

練習問題：配置の数え上げ

お気に入りのカレー屋に行くとしします。その店にはセットメニューがあり、次のものを選びます。

- 5 種類の前菜のうち一つ、
- 15 種類のメイン料理のうち一つ、
- 5 種類のデザートのうち一つ、
- 10 種類の飲み物のうち一つ。

全部で何通りの異なる食事を作ることができますか。

解答

前菜には 5 通り、メイン料理には 15 通り、デザートには 5 通り、飲み物には 10 通りの選択肢があります。積の法則により、異なる食事の総数は

$$5 \times 15 \times 5 \times 10 = 3750.$$

です。したがって、全部で 3750 通りの食事があります。つまり、毎日通っても 10 年以上、同じ食事を二度食わずに済むということです。

4 順列の数え上げ

これから順列を導入し、その数え方を学びます。しかし、その前に、新しい記法を一つ導入する必要があります。

定義：階乗

正の整数 n に対して、 n の**階乗**とは

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

のことです。また、

$$0! = 1.$$

と定義します。

例えば、

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24,$$

また、

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800.$$

です。

1 で止める理由は、もし 0 を掛けてしまうと、すべての階乗が 0 になってしまい、役に立たなくなるからです。

4.1 順列とは何か？

第1節で見たように、対象の集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は、その要素を書く順序を気にしません。しかし、私たちはこの順序を気にすることにして、集合 A の要素を異なる順番で書き出すことができます。順序を気にしない集合の波括弧と区別するために、順序付きのリストは丸括弧 (と) を使って書くことにします。例えば、

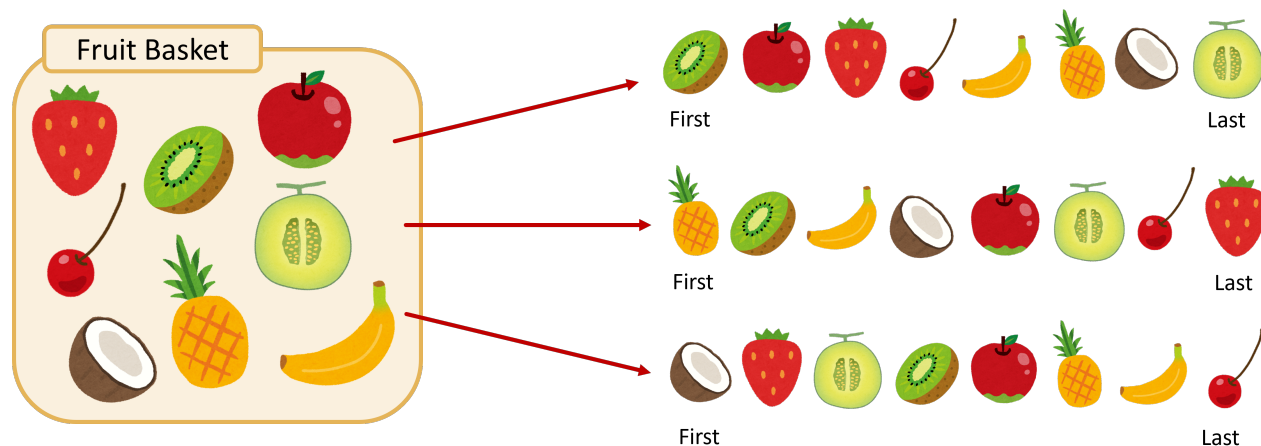
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{と} \quad (a_2, a_1, \dots, a_n)$$

は、同じ n 個の要素からなっている、異なるものと考えます。非常に簡単に言えば、順列は次のように定義できます。

定義：順列

順列とは、順序が重要であるような対象の並べ方のことです。

例として、8 個の異なる果物が入った果物かごがあるとします。とてもお腹が空いていたら、そのかごの中の果物をすべて食べたいと思うかもしれません。一つずつ食べなければならないので、可能な順序はたくさんあります。三つの可能な順序を下に示します。



8 個の果物に対する三つの可能な順列。

4.2 順列を数える

与えられた集まりに何通りの順列があるかを理解するために、小さい数から始めて、パターンが見えるかどうかを調べます。そこで、 $n = 1$ から始めて少しずつ増やしていきます。

$$n = 1: \quad 1 \text{ 通り},$$

$$n = 2: \quad 2 \times 1 = 2 \text{ 通り},$$

$$n = 3: \quad 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ 通り},$$

$$n = 4: \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ 通り}.$$

これを見ると、明らかなパターンが見えてきます。 n 個の対象の順列の数を数えるには $n!$ を使えばよいはずですが。実際、このコースでは、次の少し一般的な公式を使います。

順列の一般公式

n 個の異なる対象の中から r 個を選び、順序を付けて並べる方法の数は

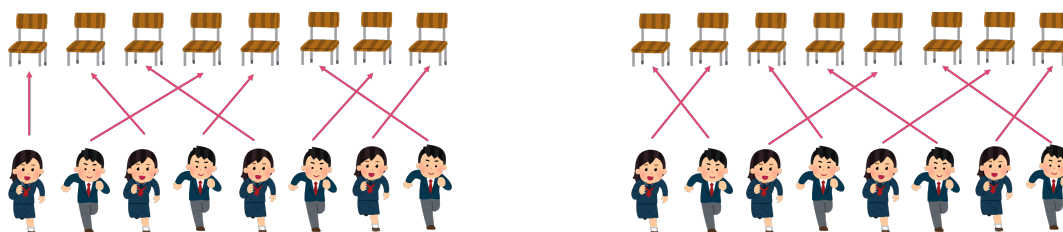
$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

です。ただし、 n と r は整数で、 $n \geq r$ とします。

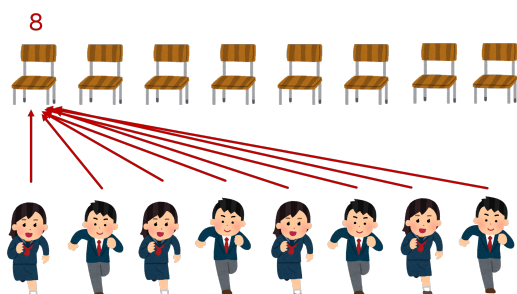
一看すると、この公式はかなり唐突に見えるかもしれません。そこで、詳しい例を使って丁寧に説明します。

4.3 8 人の学生と 8 個の椅子を使って公式を説明する

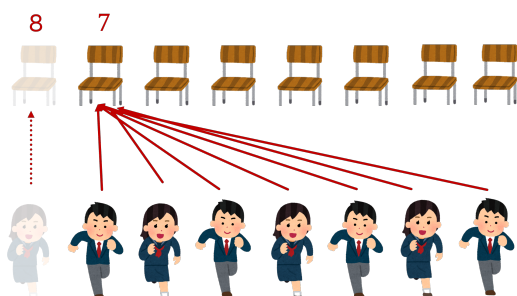
8 人の学生がいるクラスがあり、8 個の椅子があるとします。この 8 人の学生を部屋の 8 個の椅子に割り当てることで、「座席配置」を作りたいとします。例えば、下の画像には二つの可能な座席配置が示されています。



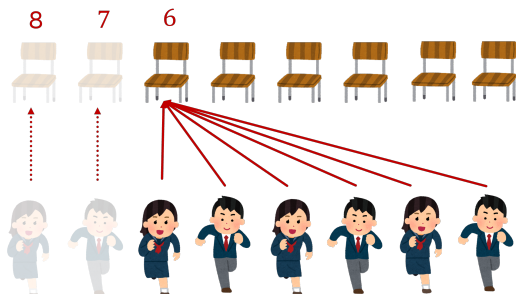
実質的に、それぞれの割り当ては順列と同じです。学生の集合を取り、「あなたが最初に座る、あなたが二番目に座る」というように順番を付けているからです。したがって、座席配置の総数は $8! = 40320$ になるはずです。これをこれから一步步説明します。



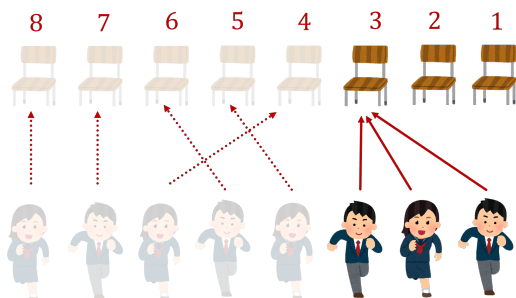
ステップ1：一つ目の椅子。最初は 8 人の学生がいるので、一つ目の椅子に座れる人の選択肢は 8 通りあります。



ステップ2：二つ目の椅子。二つ目の椅子について同じ手続きを繰り返そうとすると、残っている学生は 7 人、空いている椅子も 7 個だけです。したがって、選択肢は 8 通りではなく、7 通りになります。



ステップ3：三つ目の椅子。7人の中から一人を選んで二つ目の椅子に座らせた後、三つ目の椅子に進みます。この時点では、すでに二人の学生が割り当てられているので、三つ目の椅子に座れる学生は6人だけです。つまり、三つ目の椅子には6通りの選択肢があります。



ステップ4：パターンを続ける。この考え方を繰り返すと、残りの椅子について、5通り、次に4通り、次に3通り、次に2通り、最後に1通りの選択肢が得られます。

可能な配置の総数を求めるために、この8段階の過程に積の法則を使うと、座席配置の総数は

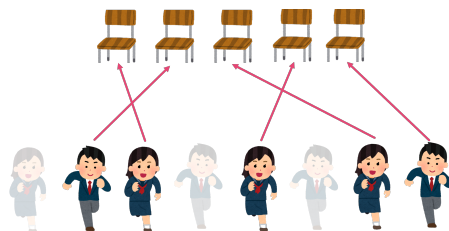
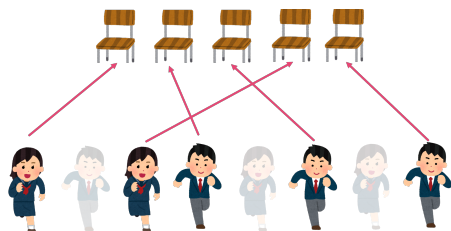
$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!.$$

となります。これにより、先ほど述べた階乗の公式が得られます。では、先ほど述べた公式

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

はどうでしょうか。設定を少し変えて説明します。

今度は教室から3個の椅子を取り除き、椅子が5個だけ残っているとします。したがって、8人の学生を座らせようとする、そのうち5人だけが座ることができ、残りの3人は立っていなければなりません。次の問題は、8人の学生のうち5人を座らせる方法は何通りあるか、ということです。二つの例を下に示します。



以前と同じ考え方を繰り返すと、一つ目の椅子には8通り、二つ目の椅子には7通り、というようになります。しかし、今は埋める椅子が5個しかないので、5個の椅子のところで手続きを早めに止めなければなりません。したがって、答えは8!ではなく、前の導出における最初の5項で与えられます。

$$P_{8,5} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4.$$

ここで $r=5$ であり、同じ公式を次のように書けることに気がきます。

$$P_{8,5} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}.$$

これは先ほど述べた公式と同じです。この考え方は、 $P_{n,r}$ の分子が n 個すべての対象を並べる方法を表し、分母 $(n-r)!$ が選ばなかった $(n-r)$ 個の対象を並べる方法を表す、というものです。この数で割ることで、それらを数え上げから取り除きます。上の椅子の例では、 $(n-r)!$ の項は、立ったまま残る 3 人の学生を並べる 6 通りに対応します。

5 組合せの数え上げ

順列を考えるときには、学生をどの順番で並べるかを気にしていました。つまり、すべての椅子を順番に並べ、「あなたが最初、あなたが二番目、…」と言って学生を割り当てていました。しかし、別のやり方も考えられます。より一般的には、単に r 人の学生を選び、椅子にどの順序で座るかを気にしないこともできます。これは、8 人の中から 5 人を選ぶことに相当します。二つの例を下に示します。



実際、「 n 個の中から r 個を選ぶすべての方法」も数えることができます。このような選び方は順列ではありません。なぜなら、この状況では順序を気にしないからです。代わりに、単にグループの中からいくつかのメンバーを選んでいるだけです。

実は、 n 個の集まりの中から r 個の対象を選ぶすべての方法には公式があります。数学では、このような順序を気にしない選び方を「組合せ」と呼び、 n 個のものから r 個を選ぶ方法の数を表すために $C_{n,r}$ という記法を使います。 $C_{n,r}$ の公式は $P_{n,r}$ の公式によく似ており、次のように与えられます。

組合せの一般公式

n 個の対象から r 個を選ぶ組合せの数は

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

です。ただし、 n と r は整数で、 $n \geq r$ とします。

ここでは $P_{n,r}$ の公式に加えて、さらに $r!$ で割っていることに注意してください。なぜそうするのでしょうか。 $P_{n,r}$ の場合、私たちは順序付きの選び方を考えています。同じ r 個の対象の選択でも、それらは $r!$ 通りに並べることができます。しかし、順序を気にしない組合せでは、その $r!$ 通りの並べ方を区別しません。したがって、全体の公式を $r!$ で割ることで、それらの選択を数え上げから取り除きます。

公式を説明するために、8 人の学生の中から 5 人を選ぶ方法の数を計算してみます。

$$C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)}.$$

もちろん、これは直接電卓に入れて計算できます。しかし、この分数では上と下の両方に 5! の因子があることも分かります。したがって、これを約分して

$$C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56.$$

となります。したがって、8 人の学生から 5 人を選ぶ方法は 56 通りあります。

5.1 パスカルの三角形

実は、 $C_{n,r}$ の公式はいくつかの興味深い数学的性質を満たします。まず、覚えておく価値のある非常に簡単な事実を二つ見ます。

$$C_{n,0} = 1 \quad \text{and} \quad C_{n,n} = 1.$$

これらの等式は、公式を代数的に確認すれば簡単に分かります。

$$C_{n,0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$

です。なぜなら $0! = 1$ だからです。同様に、

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

です。直感的に言えば、明確な解釈があります。 n 個の対象から何も選ばない方法はちょうど一通りであり、すべてを選ぶ方法もちょうど一通りです。

さらに興味深いことに、 $1 \leq r \leq n$ に対して、これらの $C_{n,r}$ の公式は次の恒等式も満たします。

$$C_{n,r-1} + C_{n,r} = C_{n+1,r},$$

これは一般にパスカルの恒等式と呼ばれます。納得できない人のために、これを代数的に確認してみます。

代数的な確認。計算すると、

$$C_{n,r-1} + C_{n,r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

これらの分数を足すために、共通分母

$$r!(n-r+1)!$$

を使います。すると、

$$\begin{aligned} C_{n,r-1} + C_{n,r} &= \frac{rn!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{rn! + (n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!} \\ &= C_{n+1,r}. \end{aligned}$$

これには簡単な数え上げによる説明もあります。 $n+1$ 個の対象から r 個を選ぶとき、一つの特別な対象に注目します。その特別な対象が選ばれる場合と、選ばれない場合があります。

- 特別な対象が選ばれるなら、残りの n 個の対象からさらに $r-1$ 個を選ぶ必要があります。これは $C_{n,r-1}$ 通りです。
- 特別な対象が選ばれないなら、残りの n 個の対象から r 個すべてを選ぶ必要があります。これは $C_{n,r}$ 通りです。

これら二つの場合を合わせると、

$$C_{n,r-1} + C_{n,r} = C_{n+1,r}.$$

が得られます。

n と r の小さい値について、 $C_{n,r}$ の値を三角形の形に並べることができます。三角形の一番上には $C_{0,0} = 1$ があり、次の行には $C_{1,0} = 1$ と $C_{1,1} = 1$ があります。しかし、行を増やしていくと、面白い構造が見えてきます。下の図では、 $C_{n,r}$ の値を三角形の形に書いています。

行 0:			1														$C_{0,0}$
行 1:			1		1												$C_{1,0}$ $C_{1,1}$
行 2:			1		2		1										$C_{2,0}$ $C_{2,1}$ $C_{2,2}$
行 3:			1		3		3		1								$C_{3,0}$ $C_{3,1}$ $C_{3,2}$ $C_{3,3}$
行 4:		1		4		6		4		1							$C_{4,0}$ $C_{4,1}$ $C_{4,2}$ $C_{4,3}$ $C_{4,4}$
行 5:	1		5		10		10		5		1						$C_{5,0}$ $C_{5,1}$ $C_{5,2}$ $C_{5,3}$ $C_{5,4}$ $C_{5,5}$
⋮						⋮											⋮

三角形の各内部の数は、その上にある二つの数の和で与えられることに注目してください。これがパスカルの恒等式の働きです。例えば、4行目の「6」（赤で示されています）は、3行目でその上にある「3」と「3」の和で与えられます。この足し算のルールを使うことで、三角形の新しい行を好きなだけ作ることができます。

各行は $C_{n,r}$ の「 n 」によって番号付けされ、その行の各項は 0 から n までの異なる r の値に対応します。したがって、 $C_{n,r}$ の値を直接計算しなくても、三角形から読み取ることができます。

5.2 組合せで部分集合を数える

組合せと冪集合の間には重要な関係があります。 A を n 個の要素を持つ集合とします。 A のうち、ちょうど r 個の要素を持つ部分集合の数を数えたいなら、これは n 個の要素から r 個を選ぶことです。そして、順序は重要ではありません。したがって、大きさ r の部分集合の数は

$$C_{n,r}.$$

です。

例。

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

とします。この集合の大きさは 4 です。部分集合をその大きさごとに数えることができます。

- $C_{4,0} = 1$ は、大きさ 0 の唯一の部分集合、すなわち $\emptyset$ を数えています。
- $C_{4,1} = 4$ は、部分集合 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ を数えています。
- $C_{4,2} = 6$ は、部分集合 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ を数えています。
- $C_{4,3} = 4$ は、部分集合 $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ を数えています。
- $C_{4,4} = 1$ は、大きさ 4 の唯一の部分集合、すなわち A 自身を数えています。

これらを足し合わせると、

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

となります。これは冪集合のルール

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^4 = 16.$$

と一致しています。

この関係は、パスカルの三角形の各行の和が 2 の冪になる理由も説明しています。

行 0:	1 = 1
行 1:	1 + 1 = 2
行 2:	1 + 2 + 1 = 4
行 3:	1 + 3 + 3 + 1 = 8
行 4:	1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16
行 5:	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32
⋮	⋮